V. ȘTEFĂNESCU M. ENACHE T. POPA

matematici contemporane

nivel elementar și mediu

VASILE ȘTEFĂNESCU • MARIN ENACHE • TUDOR POPA

MATEMATICI CONTEMPORANE

Nivel elementar și mediu

Coordonatori:
acad. prof. OCTAV ONICESCU
acad. prof. NICOLAE TEODORESCU



EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ
BUCUREȘTI, 1979

CUPRINS

PARTEA A II-A

Capitolul 13

Logica matematică

Capitolul 14

Mulţimi

Capitolul 15
Relaţii

Capitolul 16
Legea de compoziţie internă

Capitolul 17
Structuri algebrice

Capitolul 18

Construcții algebrice de mulțimi

Capitolul 19

Matrici. Determinanți

PREFAȚĂ

Mărețele sarcini puse în fața școlii de către Programul Partidului pot fi înfăptuite cu succes numai printr-o muncă de pregătire continuă a cadrelor didactice în spiritul noilor cuceriri ale științei și tehnicii și a multiplelor legături ce trebuie stabilite între școală și viață.

„Acum esențialul va consta în efortul de îmbunătățire a conținutului învățămîntului, de ridicare a nivelului său științific și de legare tot mai strînsă de producție și viață" — arăta tovarășul Nicolae Ceaușescu, secretar general al partidului.

Lucrarea de față se înscrie ca o modestă contribuție la munca de pregătire matematică a tinerei generații, la integrarea învățămîntului cu cercetarea și producția — strategii fundamentale ale partidului nostru în domeniul modernizării și perfecționării învățămîntului românesc.

Matematica, prin esența sa logic-deductivă, poate contribui într-o măsură eficientă la formarea spiritului aplicativ și educarea gîndirii practice a elevilor.

De aceea am căutat, pe cît a fost posibil, să propunem exerciții și probleme din domenii mai noi ale matematicilor școlare, punînd accent pe latura lor interpretativă.

În acest spirit ne-am propus să îmbogățim prezenta lucrare printr-un număr mai mare de exerciții și probleme cu caracter practic, propuse ca aplicații ale diferitelor capitole de matematică și cu date luate din diferite domenii de activitate : industrie, construcții, transporturi, agricultură, comerț etc. Ele sînt rezultatul colaborării autorilor cu diverse unități economice și industriale care le-au oferit anumite modele de probleme practice, rezolvate cu ajutorul cunoștințelor de matematică.

Cunoştinţele de bază ale matematicii (mulţimi, logică matematică, relaţii, structuri algebrice, calcul informaţional, informatică etc.) sînt prezentate într-o succesiune logică, fluentă, unitară, continuînd tradiţia valoroasă a lucrărilor de acest gen apărute sub coordonarea acad. N. Teodorescu. Unul din scopurile esenţiale ale acestei lucrări este acela de a prezenta noţiunile matematice cît mai accesibil, propunînd exerciţiile şi problemele progresiv, în funcţie de gradul lor de dificultate.

În prima parte se dă o expunere, pe cît a fost posibil elementară, a cunoştinţelor despre mulţimi, logică matematică, conceptele numerice de bază, informatică etc., folosind diverse modele concrete din societate, pentru ca în partea a doua aceste cunoştinţe să fie tratate la un nivel mai înalt de abstractizare. Capitolele din prima parte scot în evidenţă aspectele intuitive ale noţiunilor de probabilitate.

Tot în prima parte se dă o descriere elementară şi o definiţie a produsului cartezian şi a noţiunii matematice de relaţie, ceea ce permite definirea, într-un mod riguros, a noţiunii de funcţie. Aceste probleme sînt aprofundate în partea a doua, unde se introduc noţiunile de aplicaţie, lege de compoziţie etc., în scopul de a defini structurile algebrice fundamentale (grup, inel, corp etc.).

Deoarece teoria informaţiei — capitol ceva mai nou al matematicii — are astăzi numeroase aplicaţii în diverse domenii de activitate, am socotit necesar să introducem cîteva noţiuni de calcul informaţional care se pretează la o prezentare accesibilă tuturor celor care doresc să se iniţieze în acest domeniu — ca, de exemplu, energia şi entropia unui sistem.

Scopul elementelor de logică matematică prezentate în a doua parte este de a oferi cititorilor elemente de sprijin pentru un studiu mai aprofundat al logicii matematice şi a diverselor sale aplicaţii. Întrucît aparatul elaborat în cadrul logicii matematice se aplică la studiul mecanismelor automate şi la sinteza circuitelor, am socotit necesară propunerea unei suite de exerciţii de logică matematică aplicate la studiul unor circuite simple.

Deoarece programarea liniară şi teoria jocurilor s-au remarcat mai ales prin multiplele aplicaţii în domenii foarte variate de activitate, am considerat necesară introducerea a două capitole care să cuprindă noţiuni elementare de teoria jocurilor şi elemente simple de programare lineară.

Deşi teoria jocurilor matematice şi programarea liniară au evoluat într-un contact strîns, totuşi, nivelul prezentării cunoştinţelor de programare liniară în această lucrare nu ne-a oferit posibilitatea să evidenţiem legătura dintre ele.

Primele lecţii de teoria jocurilor au fost ţinute la noi în ţară de către academician-profesor Octav Onicescu în anul universitar 1958/1959, sub forma unui curs special. Pentru o cunoaştere mai amplă şi detaliată a noţiunilor de programare liniară, recomandăm cartea *Strategia jocurilor cu aplicaţii la programarea liniară*, de acad. prof. Octav Onicescu.

Menţionăm că de un real folos ne-au fost şi cursurile de *Teoria jocurilor cu aplicaţii în ştiinţele sociale*, ţinute de către prof. univ. Mircea Maliţa, în cadrul Universităţii Bucureşti, precum şi lucrarea aceluiaşi autor *Teoria şi practica negocierilor*.

Cunoştinţele despre diverse mulţimi numerice: mulţimea numerelor naturale, a numerelor întregi şi raţionale introduse în prima parte, alături de exerciţiile care le urmează, dau posibilitatea cititorilor să facă conexiuni mai largi între diferite cunoştinţe, prezentînd aceste mulţimi pe baza unor modele simple. Aceste cunoştinţe sînt reluate în partea a doua la un nivel superior de generalitate, cînd se trece la construcţia sistematică a diverselor mulţimi numerice.

Noţiunile sumare despre vectori şi operaţii cu vectori — introduse în prima parte — sînt tratate mai detaliat în partea a doua, unde se introduce noţiunea de produs scalar şi se studiază sistematic spaţiul vectorial.

Modelul geometric al spaţiului vectorial este folosit pentru tratarea unitară a unor probleme de geometrie şi trigonometrie.

Problemele şi exerciţiile din lucrarea de faţă reprezintă rodul activităţii îndelungate de experimentare a acestor noţiuni de către autorii lor în şcoli de diferite grade şi din diferite medii, în perioada 1965—1975.

Datorită spaţiului grafic limitat nu s-au putut prezenta în lucrare şi anumite scheme de lecţii sau probe de control. De asemenea, nu s-au introdus anumite teme experimentate, ca de exemplu: elemente de geometrie descriptivă, elemente de geometrie afină şi proiectivă, noţiuni de topologie, simplexe, noţiuni de teoria grafurilor, combinatorică, analiză matematică şi ecuaţii diferenţiale cu aplicaţii în mecanică, statistică matematică etc.

În lucrare sînt prezentate exerciţii şi probleme date la diferite concursuri şi examene — (treapta întîi şi treapta a doua, bacalaureat, admitere în învăţămîntul superior etc.), care oferă candidaţilor un material de antrenament pentru examenele viitoare.

Autorii aduc şi pe această cale mulţumiri colectivelor din anumite secţii ale întreprinderilor: „23 August", Electronica, I.I.R.U.C., AVERSA, Mecanică fină, IPROLAM din Capitală,

care au oferit modele ale unor exerciţii şi probleme practice, precum şi ale liceelor de Mecanică nr. 1, Alexandru Sahia, George Coşbuc, Economic nr. 3, ca şi ale şcolilor generale nr. 122, 86, 28, 51. şi tuturor şcolilor din ţară, unde au fost experimentate anumite teme.

În mod deosebit, exprimăm sentimentele noastre de gratitudine acad. prof. O. Onicescu şi acad. prof. N. Teodorescu pentru amabilitatea de a fi coordonat această activitate precum şi profesorilor universitari George Ciucu şi Solomon Marcus pentru îndemnul de a scrie această carte în care să se reflecte afinitatea dintre matematică, ştiinţele naturii, tehnică şi viaţa socială. De asemenea, aducem mulţumirile noastre lectorilor universitari dr. Dumitru Smaranda şi dr. Constantin V. Crăciun pentru sugestiile făcute la unele capitole ale lucrării şi tuturor celor care au contribuit la apariţia acestei lucrări.

Fiind la prima sa ediţie, considerăm că ea va putea fi în mod substanţial îmbunătăţită, astfel încît să fie de un real folos învăţămîntului în perspectiva înnoirilor care se anunţă.

AUTORII
Bucureşti 1975

PARTEA ÎNTÎI

Capitolul 1
MULȚIMI

1.1. DESCRIERE. NOTAȚII

În foarte multe din activitățile practice ale omului intervine noțiunea de colecție, de grupare.

Un elev care este membru în cercul de filatelie din școală își ordonează timbrele după anumite criterii : țara care a emis timbrul, tema ce-o reprezintă etc. El realizează în acest mod colecții după criteriul ales pentru clasificarea timbrelor. Un bibliotecar clasifică cărțile din bibliotecă după conținut : beletristică, științe sociale, științe ale naturii, arte etc. Un muncitor își aranjează obiectele de lucru după modul lor de întrebuințare : unelte mecanice piese de schimb etc.

Spunem că elevul, bibliotecarul sau muncitorul realizează colecții sau grupări de obiecte.

Noțiunea de mulțime este analoagă noțiunii de colecție sau de grupare. În mod practic, pentru a forma o mulțime trebuie să ni se dea un anumit criteriu după care să putem determina obiectele care formează mulțimea. Criteriul ales pentru a grupa obiectele unei mulțimi ne arată ce proprietate comună au obiectele mulțimii. Așa, de exemplu, toate timbrele emise de țara noastră fac parte din mulțimea timbrelor emise de Republica Socialistă România. Obiectele acestei mulțimi sînt timbre. Proprietatea comună a acestor timbre este emiterea lor de către țara noastră.

În alcătuirea mulțimilor de obiecte trebuie să eliminăm anumite criterii în care intervin aprecieri subiective. În acest sens, dacă într-o clasă dorim să formăm mulțimea elevilor inteligenți, vom întîmpina în mod evident o anumită dificultate. Despre un anumit elev unii vor afirma că este inteligent, iar alții că nu este inteligent. Spunem că în acest caz criteriul ales pentru alcătuirea acestei mulțimi este îndoielnic.

Criteriul ales pentru alcătuirea unei mulţimi notată A, sau proprietatea comună pe care o au obiectele care formează mulţimea, trebuie să nu dea naştere la îndoieli. Astfel încît, dacă ni se dă un anumit obiect, notat a, să putem afirma că acest obiect nu se poate afla decît în două situaţii : (1) obiectul a face parte din mulţimea A ; (2) obiectul a nu face parte din mulţime, şi în mod cert o altă situaţie nu poate exista.

Mulţimea este rezultatul unei operaţii mintale ; ea poate fi concretă dacă obiectele ei sînt concrete şi abstractă dacă elementele ei sînt abstracte ; ca obiect mulţimea este totdeauna abstractă.

Exemple de mulţimi :

— Mulţimea elevilor care fac parte din corul unei şcoli.
— Mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul M a r t e.
— Mulţimea pomilor din grădina unei şcoli.
— Mulţimea elevilor promovaţi ai unei clase.
— Mulţimea profesorilor din şcoala noastră.
— Mulţimea obiectelor care se găsesc în penarul unui elev.
— Mulţimea formată din numerele 1, 2, 3, 4, 5.

Obiectele care formează o anumită mulţime se numesc elemente ale mulţimii, atunci cînd le considerăm numai din punct de vedere al apartenenţei lor la acea mulţime, fără a distinge în alt mod atributele lor.

Mulţimile se notează de obicei cu literele majuscule $A, B, C, \ldots$. Elementele mulţimii se notează de obicei prin litere minuscule $a, b, c, \ldots$ sau prin alte semne.

Dacă un anumit obiect notat cu a face parte din mulţimea A, atunci spunem că obiectul a aparţine mulţimii.

Pentru a arăta că un anumit obiect notat a aparţine unei mulţimi A, se întrebuinţează simbolul $\in$ şi se scrie $a \in A$ — relaţie care se citeşte : „elementul a aparţine mulţimii A".

Dacă un anumit element b nu face parte dintr-o mulţime notată A, se scrie $b \notin A$ şi se citeşte : „elementul b nu aparţine mulţimii A".

Faţă de criteriul ales pentru alcătuirea mulţimii A, un element oarecare x se găseşte în două situaţii posibile : $x \in A$ sau $x \notin A$ (elementul x aparţine mulţimii A sau elementul x nu aparţine mulţimii A).

În mulţimea elevilor promovaţi ai unei şcoli, elementele mulţimii sînt elevii care au promovat. În mulţimea formată din

numerele 1, 2, 3, 4, 5 elementele mulțimii sînt fiecare din numerele scrise mai sus.

Elementele unei mulțimi se scriu, de obicei, între două acolade fiind despărțite prin virgule.

Exemple

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{\square, \triangle, \bigcirc, \square\}$$

$$C = \{\text{Ionel, Petre, Gheorghe}\}.$$

Putem scrie: $2 \in A$; $3 \in A$ ... ; $3 \notin B$ și citim: „2 aparține lui A; 3 aparține lui A", respectiv „3 nu aparține lui B".

Pentru descrierea unei mulțimi se folosește, de regulă, unul din următoarele două procedee:

1) Se enumeră toate obiectele care fac parte din mulțime, ca în exemplele de mai sus;

2) Se indică o proprietate sau mai multe proprietăți, care sînt comune elementelor mulțimii și numai lor.

Proprietatea comună pe care o posedă toate elementele unei mulțimi se numește proprietate caracteristică.

Dacă se indică o proprietate pe care o au obiectele unei mulțimi, se reprezintă printr-o literă x orice element al mulțimii și se scrie proprietatea caracteristică, ce definește orice element al mulțimii. Litera se desparte de proprietatea caracteristică prin două puncte sau o linie verticală și se încadrează această scriere în acolade.

Exemple

1) $A = \{x | x$ elev premiant al școlii noastre$\}$.

Mulțimea A este formată din toți elevii premianți ai școlii noastre.

2) $B = \{x | x$ număr cîștigător la loterie$\}$.

Mulțimea B este formată din toate numele cîștigătoare la tragerea Loto.

În această scriere presupunem că x descrie mulțimea, adică poate fi înlocuit cu oricare din elementele mulțimii.

O b s e r v a ț i e

Putem avea mulțimea concretă $\{1, 2, 3, \square\}$, formată din simbolurile 1, 2, 3 și un pătrat, și mulțimea abstractă $\{1, 2, 3, 4\}$ formată din numerele 1, 2, 3, 4.

Scrierea mulţimii folosind o proprietate caracteristică a elementelor ei este comodă atunci cînd numărul elementelor este mare.

În scrierea mulţimii prin enumerarea elementelor, convenim ca un element să fie scris o singură dată.

Să notăm cu M mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul m a m a.

Ţinînd seama de convenţia pe care am introdus-o pentru scrierea unei mulţimi, vom avea :

$$M = \{m, a\}.$$

În cuvîntul m a m a literele *m* şi *a* sînt scrise de două ori. În mulţimea M aceste litere nu se pot scrie decît o singură dată. Deci, într-o mulţime nu se poate scrie de mai multe ori unul şi acelaşi element.

1.2. EGALITATEA MULŢIMILOR

Două mulţimi, notate A şi B, sînt egale dacă sînt formate din aceleaşi elemente. Dacă mulţimile A şi B sînt egale atunci propoziţiile ,,pentru orice x, $x \in A$'' şi ,,pentru orice x, $x \in B$'' sînt simultan adevărate sau false. Se scrie $A = B$ şi se citeşte ,,mulţimea A este egală cu mulţimea B''.

Dacă mulţimile sînt formate dintr-un număr mic de elemente, pentru a verifica egalitatea se analizează pe rînd elementele celor două mulţimi şi se verifică dacă ele sînt identice.

O b s e r v a ţ i e

Egalitatea mulţimilor nu trebuie confundată cu egalitatea numărului de elemente al celor două mulţimi. Două mulţimi pot avea acelaşi număr de elemente, fără ca ele să fie egale.

Exemplu

Se dau mulţimile :

$$A = \{+, -, :\} \quad B = \{1, 2, 3\}.$$

Mulţimea A are trei elemente ; mulţimea B are tot trei elemente. Deşi mulţimile A şi B au acelaşi număr de elemente ele nu sînt egale, deoarece sînt formate din elemente diferite.

1.3. MULȚIME CU UN ELEMENT

În matematică, și în vorbirea curentă, folosim foarte des cuvîntul mulțime.

Obiectele care alcătuiesc o mulțime au un caracter foarte variat. În vorbirea curentă noțiunea de mulțime arată existența mai multor obiecte, care sînt grupate după anumite proprietăți.

Vrem, de exemplu, să scriem mulțimea numerelor naturale care sînt mai mari decît 3 și mai mici decît 5. După convenția de scriere adoptată, vom avea :

$$A = \{x | x \text{ natural, } 3 < x < 5\}.$$

Litera x desemnează orice element al mulțimii A.

Putem trece de la acest mod de a scrie mulțimea la scrierea mulțimii A prin enumerarea tuturor elementelor (numerelor), care au proprietatea mai sus enunțată. În acest caz este evident că singurul element (număr) care se află între 3 și 5 este numărul 4. Adoptînd cel de al doilea mod de scriere a mulțimii, adică prin enumerarea elementelor, vom scrie :

$$A = \{4\}.$$

În matematică îi vom spune lui A tot mulțime, deși este formată dintr-un singur element.

Elementul 4 al mulțimii A nu trebuie confundat cu mulțimea însăși. Vom scrie $4 \in \{4\}$, adică numărul 4 aparține mulțimii A.

Alte exemple

Să formăm mulțimea elevilor dintr-o școală care sînt înscriși în anumite cercuri de activități extrașcolare. O parte din elevi formează „cercul micilor naturaliști", alții formează „cercul electrotehnicienilor". Dacă un singur elev, pe care-l notăm cu litera a, frecventează cercul de arte, trebuie să distingem „cercul de arte", ca mulțime ce nu conține decît un singur element, elevul a, de elevul considerat ca element al mulțimii „cercul de arte".

Vom exprima această deosebire astfel : $\{a\} \neq a$.

1.4. MULȚIMEA VIDĂ

Să revenim din nou la exemplul mulțimii ale cărei elemente sînt numere naturale. Se cere să se scrie mulțimea numerelor naturale fără soț (impare) mai mari decît 7 și mai mici decît 9.

$$B = \{x | x \text{ numărul natural impar și } 7 < x < 9\}.$$

Este evident că nu există nici un număr natural fără soţ cuprins între 7 şi 9. Vom spune că mulţimea *B* nu are nici un element şi o vom numi mulţimea vidă. Pentru notaţia mulţimii vide se utilizează simbolul Ø.

Alte exemple de mulţimi vide.

Mulţimea elevilor din clasa a XII-a a unei şcoli, care nu ştiu să scrie numărul natural 5.

Mulţimea locuitorilor planetei Marte care în anul trecut au vizitat şcoala noastră.

Mulţimea elevilor din clasa noastră care anul trecut au făcut o călătorie pe Lună.

1.5. DIAGRAME VENN

Relaţiile dintre mulţimi, cît şi proprietăţile lor, pot fi mai uşor înţelese, dacă vom reprezenta mulţimile şi elementele lor folosind anumite scheme grafice. Pentru reprezentarea grafică a unei mulţimi se utilizează diagrama Venn.

Folosirea figurilor pentru a reprezenta mulţimile este foarte veche. Matematicianul Leonhard Euler (1707—1783) s-a folosit de figuri rotunde pentru a explica anumite reguli ale logicii. Logicianul John Venn (1834—1923), profesor la Cambridge, a adus diagramelor lui Euler îmbunătăţiri utile. Pentru aceasta, numim diagrame Venn diagramele reprezentînd mulţimile.

O diagramă Venn este o reprezentare grafică a unei mulţimi printr-o porţiune din plan mărginită de o curbă închisă fără puncte duble.

De obicei, elementele mulţimii sînt reprezentate prin puncte distincte, la două elemente distincte ale unei mulţimi corespund două puncte distincte.

Exemple de diagrame Venn (fig. 1.1, *a* şi *b*).

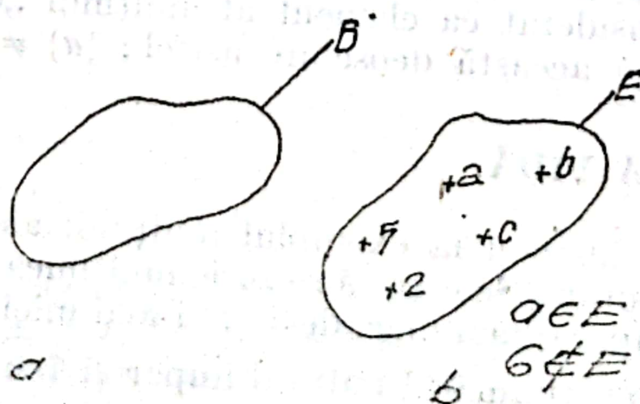


Fig. 1.1

1.6. SUBMULȚIMI

Sînt cazuri cînd, pe lîngă proprietatea aleasă pentru alcătuirea unei mulțimi, se mai consideră încă o proprietate pe care o au numai unele din elementele mulțimii, iar altele nu o au. Această proprietate este caracteristică numai pentru unele din elementele mulțimii date.

Să presupunem, de exemplu, că în interiorul unei curbe închise fără puncte duble deosebim figuri geometrice cunoscute : pătrate, dreptunghiuri, cercuri, triunghiuri.

Aceste figuri geometrice formează o mulțime. Să notăm cu A această mulțime (fig. 1.2).

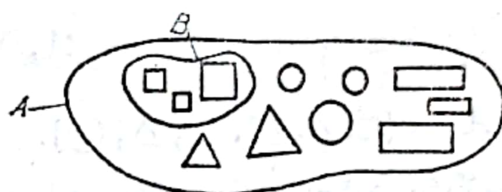


Fig. 1.2

Se marchează printr-o linie curbă închisă toate figurile geometrice care sînt pătrate. Toate figurile geometrice care sînt pătrate formează o nouă mulțime, pe care o vom nota cu litera B.

Este evident că orice element care aparține mulțimii B, adică este un pătrat, aparține și mulțimii A. Spunem că mulțimea B este inclusă în mulțimea A.

Mulțimea B este o parte sau o submulțime a mulțimii A.

O mulțime B este o submulțime a lui A sau este inclusă în A, dacă orice element x care aparține mulțimii B aparține și mulțimii A. Dacă $x \in B$, atunci $x \in A$.

Pentru a scrie că o mulțime notată B este o submulțime a mulțimii A sau că este inclusă în A, se întrebuințează semnul $\subset$, care este simbolul grafic al incluziunii. Se scrie $B \subset A$ și se citește „mulțimea B este inclusă în mulțimea A".

Dacă o anumită mulțime C nu este inclusă în mulțimea A, se folosește semnul $\not\subset$ și se scrie $C \not\subset A$, care se citește : „mulțimea C nu este inclusă în mulțimea A".

Alte exemple de submulțimi

— În mulțimea A a elevilor din clasa noastră mulțimea B a elevilor care poartă ochelari este o submulțime a lui A.

— În mulțimea E a elevilor dintr-o clasă, mulțimea X a elevilor care sînt pionieri formează o submulțime.

— În mulțimea F a muncitorilor unei întreprinderi mulțimea L a muncitorilor calificați formează o submulțime.

— Se consideră mulţimea A a literelor din care este alcătuit cuvîntul a l a r m a şi mulţimea B a literelor din care este alcătuit cuvîntul l a m a.

Să scriem mulţimile enumerînd toate elementele din care sînt alcătuite :

$$A = \{a, l, r, m\}\ ;\ B = \{l, a, m\}$$

Constatăm că orice element care aparţine mulţimii B aparţine şi mulţimii A. Mulţimea B este inclusă în mulţimea A şi este o submulţime a mulţimii A. Vom scrie : $B \subset A$.

1.7. SUBMULŢIMI COMPLEMENTARE

Se dă mulţimea :

$$A = \{\square, \triangle, \square, \circ, \triangle, \bigcirc\}.$$

În mulţimea A să formăm submulţimea pătratelor. Pentru a forma această submulţime trebuie să enunţăm o proprietate suplimentară pe care o au numai unele din elementele acestei mulţimi, şi anume figurile geometrice care au un unghi drept şi laturile egale. Să notăm cu B mulţimea pătratelor :

$$B = \{\square, \square\}.$$

Orice element care face parte din mulţimea B face parte şi din mulţimea A.

Vom scrie : $B \subset A$. Sînt şi elemente care fac parte din mulţimea A, dar nu fac parte din mulţimea B. Aceste elemente formează o nouă submulţime, numită submulţimea complementară a lui B în raport cu A sau, mai simplu, complementara lui B în mulţimea A.

Complementara mulţimii B în raport cu mulţimea A se notează $C_A B$ (fig. 1.3).

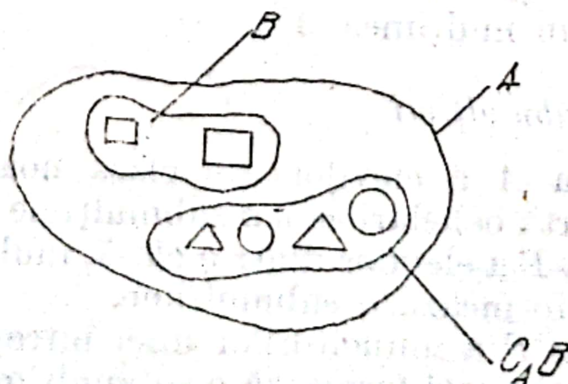


Fig. 1.3

Avem :

$$C_A B = \{\triangle, \bigcirc, \circ, \blacktriangle\}.$$

Pentru a forma submulţimea complementară a unei mulţimi date este necesar să precizăm mulţimea de referinţă. În exemplul precedent mulţimea de referinţă este :

$$A = \{\square, \triangle, \boxdot, \bigcirc, \blacktriangle, \circ\}.$$

Avem : $B \subset A$ şi $B \neq A$, deoarece există elemente ale lui A care nu aparţin lui B. Aceste elemente formează submulţimea complementară a lui B în A.

Se notează :

$$C_A B = \{x | x \in A \text{ şi } x \notin B\}.$$

Alte exemple

1. Să notăm cu A mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul R a d u şi cu B mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul d a u :

$$A = \{R, a, d, u\}; \quad B = \{d, a, u\}.$$

Orice element care aparţine mulţimii B aparţine şi mulţimii A. Mulţimea B este o submulţime a mulţimii A. Complementara mulţimii B în raport cu mulţimea A este formată din toate elementele care aparţin mulţimii, dar nu aparţin mulţimii B.

Prin urmare : $C_A B = \{R\}$.

Complementara mulţimii B în raport cu mulţimea A este formată dintr-un singur element, litera R (fig. 1.4).

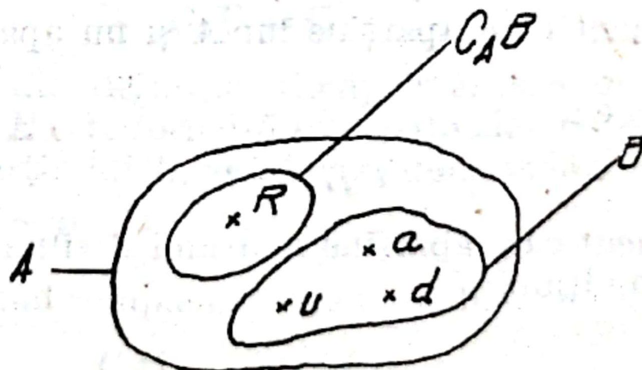


Fig. 1.4

2. Să notăm cu M mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul a v i o n :

$$M = \{a, v, i, o, n\}.$$

Fie N mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul n o i :

$$N = \{n, o, i\}.$$

Vom avea : $N \subset M$ şi :

$$C_M N = \{x | x \in M \text{ şi } x \notin N\},$$

sau :

$$C_M N = \{a, v\} \text{ (fig. 1.5).}$$

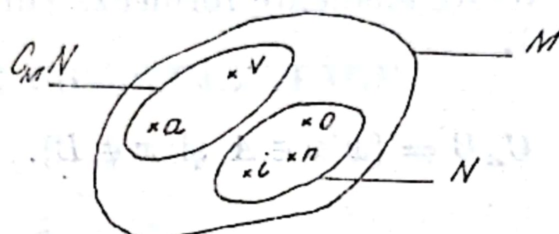


Fig. 1.5

3. A este mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul a r b o r e.

B este mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul a e r ;
D este mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul b o b ;

$$A = \{a, r, b, o, e\},$$

$$B = \{a, e, r\},$$

$$D = \{b, o\}.$$

Orice element al mulţimii B este un element al mulţimii A şi orice element al mulţimii C aparţine, de asemenea, mulţimii A.

Prin urmare $B \subset A$; $D \subset A$.

Orice element care aparţine lui A şi nu aparţine lui B, aparţine lui D.

Prin urmare :

$$C_A B = D. \quad (1)$$

Orice element care aparţine mulţimii A şi nu aparţine mulţimii D, aparţine mulţimii B.

Prin urmare :

$$C_A D = B. \quad (2)$$

Substituind valoarea lui D din relaţia (1) în relaţia (2) obţinem :

$$C_A(C_A B) = B. \quad (3)$$

Se arată în mod asemănător că:

$$C_A(C_A D) = D. \qquad (4)$$

Complementara complementarei unei mulţimi faţă de aceeaşi mulţime de referinţă este mulţimea însăşi.

Alte notaţii.

În cazul în care se cunoaşte mulţimea de referinţă, se obişnuieşte să se noteze complementara unei mulţimi cu o liniuţă trasată deasupra literei majuscule, cu care însemnăm mulţimea, sau se foloseşte o literă c ca indice:

Vom scrie deci:

$$C = \bar{D},\ C_A B = \bar{B}, \text{ sau } C_A D = D^c \text{ şi } C_A B = B^c.$$

Relaţiile (3) şi (4) se scriu şi :

$$\bar{\bar{B}} = B,\ \bar{\bar{D}} = D \text{ sau } (B^c)^c = B \text{ şi } (D^c)^c = D.$$

4. În mulţimea N a numerelor naturale submulţimea numerelor naturale impare (fără soţ) este complementara mulţimii numerelor naturale pare (cu soţ).

5. Fie N mulţimea numerelor naturale şi submulţimile:

$$M = \{x | x \leqslant 100\} \text{ şi } P = \{x | x > 100\}.$$

Se pot stabili relaţiile:

$$C_N M = P \text{ şi } C_N P = M,$$

sau:

$$\bar{M} = P;\ \bar{P} = M.$$

6. Cazuri particulare:

$$C_E E = \emptyset. \qquad (5)$$

Aceasta rezultă din definiţie. Complementara mulţimii E în raport cu mulţimea E este formată din toate elementele care aparţin lui E dar nu aparţin lui E, adică mulţimea vidă.

$$C_E E = \{x | x \in E \text{ şi } x \notin E\}.$$

Din relaţia (5) luînd complementara în ambii membri deducem:

$$C_E \emptyset = C_E(C_E E). \qquad (6)$$

După cele arătate în exemplul precedent avem:

$$C_E(C_E E) = E. \text{ Prin urmare, } C_E \emptyset = E.$$

P r o p r i e t ă ț i

Dacă $A \subset B \subset E$, atunci $C_E B \subset C_E A$.

Dacă un element aparține mulțimii $C_E B$, atunci el nu aparține mulțimii B și, prin urmare, el nu aparține nici mulțimii A, deoarece $A \subset B$. Dacă un element nu aparține mulțimii A, atunci el aparține mulțimii $C_E A$. Prin urmare, dacă un element aparține mulțimii $C_E B$, el va aparține și mulțimii $C_E A$.

Deci:

$$C_E B \subset C_E A.$$

Să ilustrăm aceste proprietăți printr-un exemplu:

Fie mulțimile:

$$E = \{x | x \in N \text{ și } x \leqslant 10\};$$

$$B = \{x | x \in N \text{ și } x \leqslant 6\};$$

$$A = \{x | x \in N \text{ și } x \leqslant 4\}.$$

Mulțimea E este formată din numerele naturale mai mici sau cel mult egale cu 10; B este formată din mulțimea numerelor naturale mai mici sau cel mult egale cu 6; A este formată din mulțimea numerelor naturale mai mici sau cel mult egale cu 4.

Să scriem aceste mulțimi enumerînd toate elementele din care sînt alcătuite:

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Este evidentă relația: $A \subset B \subset E$.

După definiția complementarei avem:

$$C_E B = \{x | x \in E \text{ și } x \notin B\},$$

sau:

$$C_E B = \{7, 8, 9, 10\}. \quad (7)$$

În mod asemănător:

$$C_E A = \{x | x \in E \text{ și } x \notin A\}. \quad (8)$$

sau:

$$C_E A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}. \quad (9)$$

Din relaţiile (7) şi (9), deducem :

$$C_E B \subset C_E A.$$

1.8. OPERAŢII CU MULŢIMI

1.8.1. INTERSECŢIA

Se numeşte intersecţia mulţimilor A şi B mulţimea care este constituită din elemente comune mulţimilor A şi B. Intersecţia mulţimilor A şi B se notează $A \cap B$ şi se citeşte „mulţimea A intersectată cu mulţimea B". Semnul „$\cap$" este simbolul intersecţiei.

Avem :

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ şi } x \in B\}. \text{ (fig. 1.6)}.$$

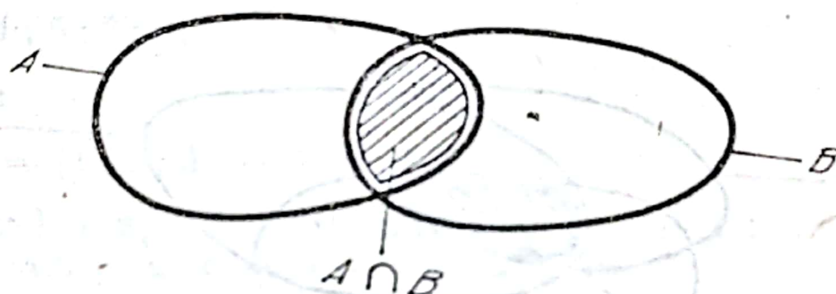


Fig. 1.6

Exemple:

Se dau mulţimile :

A — Mulţimea elevilor care cîntă în corul şcolii ;

B — Mulţimea elevilor care poartă ochelari.

Mulţimea $A \cap B$ este formată din elevii care poartă ochelari şi care cîntă în corul şcolii.

Dacă în mulţimea elevilor care cîntă în corul şcolii nu există nici un elev care să poarte ochelari, atunci vom spune că intersecţia mulţimilor A şi B este mulţimea vidă $\emptyset$ şi vom scrie : $A \cap B = \emptyset$.

Dacă intersecţia a două mulţimi A şi B este mulţimea vidă, mulţimile A şi B se numesc disjuncte.

Aşadar, dacă două mulţimi A şi B nu au elemente comune ele se numesc disjuncte.

1.8.2. PROPRIETĂȚILE INTERSECȚIEI

(1) Se arată destul de simplu, pornind de la definiție că oricare ar fi mulțimea A, avem $A \cap A = A$.

(2) Din figură se observă că $A \cap B \subset A$ și $A \cap B \subset B$.

(3) $A \cap B = B \cap A$ (comutativitatea).

(4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociativitatea).

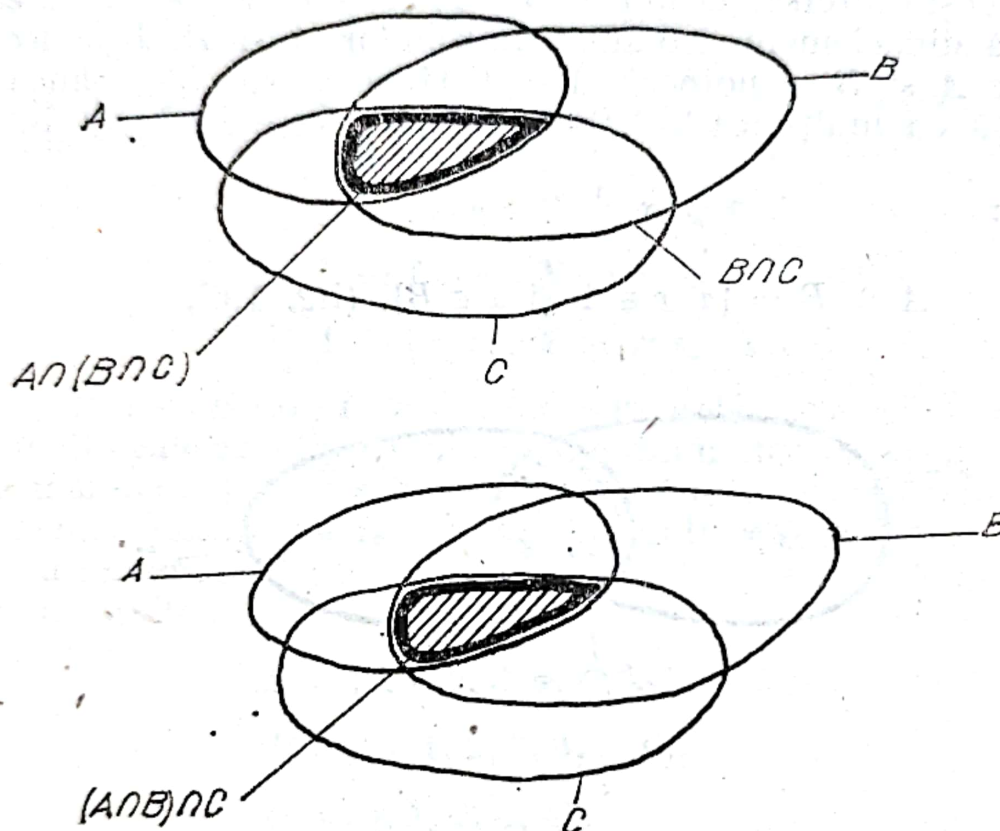


Fig. 1.7

Pentru ilustrarea acestei proprietăți se folosesc diagramele Venn (fig. 1.7).

(5) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(6) Dacă $A \subset B$ atunci $A \cap B = A$.

1.8.3. REUNIUNEA

Reuniunea mulțimii A și a mulțimii B este mulțimea alcătuită din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile A sau B. Se notează $A \cup B$ și se citește mulțimea A reunită cu mulțimea B.

Dacă un element aparţine mulţimii $A \cup B$, atunci el aparţine sau mulţimii A sau mulţimii B, dar poate să aparţină ambelor mulţimi.

Exemple (fig. 1.8):

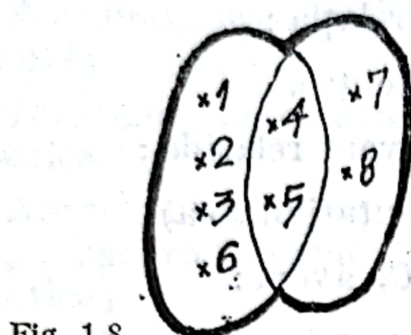


Fig. 1.8

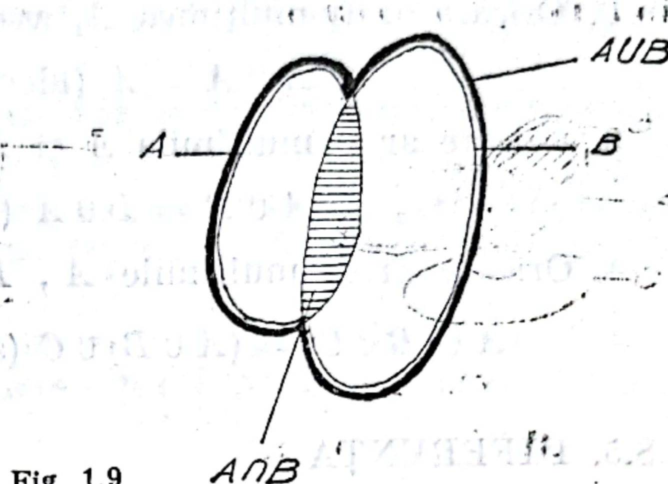


Fig. 1.9

$A = \{1;2;3;4;5;6\}$,

$B = \{4;5;7;8\}$.

Avem:

$A \cup B = \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Numărul 4 aparţine atît mulţimii A, cît şi mulţimii B. În mulţimea $A \cup B$ el se scrie o singură dată.

În general, dacă reprezentăm mulţimile A şi B prin porţiuni din plan cuprinse în interiorul a două curbe închise, atunci porţiunea din plan cuprinsă în interiorul conturului îngroşat (fig. 1.8) reprezintă reuniunea celor două mulţimi.

Alte exemple.

Profesorul diriginte al unei clase alcătuieşte o listă cu elevii care sînt înscrişi la cercul de matematică şi la cercul de fizică. Să notăm cu A mulţimea elevilor din această clasă înscrişi la cercul de matematică şi cu B mulţimea elevilor înscrişi la cercul de fizică.

$A \cup B$ este mulţimea elevilor înscrişi la cercul de matematică sau la cercul de fizică. Un elev care participă la ambele cercuri aparţine atît mulţimii A cît şi mulţimii B, aparţine deci mulţimii $A \cap B$, dar şi mulţimii $A \cup B$.

Prin urmare

$$A \cap B \subset A \cup B \quad \text{(fig. 1.9)}.$$

1.8.4. PROPRIETĂȚILE REUNIUNII

1. Oricare ar fi mulțimile A și B, avem relațiile:

$$A \subset A \cup B; \ B \subset A \cup B.$$

2. Oricare ar fi mulțimea A, avem relația:

$$A \cup A = A \text{ (idempotența)}.$$

3. Oricare ar fi mulțimile A și B, avem relațiile:

$$A \cup B = B \cup A \text{ (comutativitatea)}.$$

4. Oricare ar fi mulțimile A, B, C, avem:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \text{ (asociativitatea)}.$$

1.8.5. DIFERENȚA

Diferența dintre mulțimile A și B este mulțimea elementelor lui A care nu aparțin mulțimii B.

Se notează $A \setminus B$ sau mai simplu $A - B$.

Avem:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

În același mod în care am definit diferența $A \setminus B$, putem să definim diferența dintre mulțimea B și mulțimea A, notată $B \setminus A$, care este formată din elementele lui B ce nu aparțin mulțimii A.

Avem:

$$B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ și } x \notin A\}.$$

În diagrama următoare (fig. 1.10) conturul plin reprezintă mulțimea $A \setminus B$, iar conturul punctat, mulțimea $B \setminus A$.

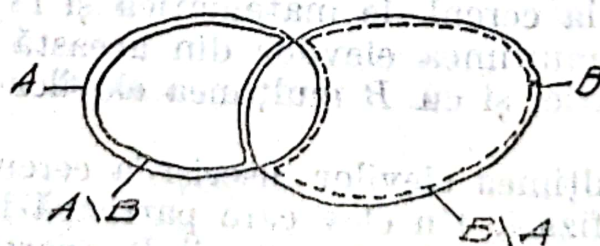


Fig. 1.10

Rezultă imediat că $A \setminus B$ este o parte a mulțimii A, deci $A \setminus B \subset A$, în timp ce $B \setminus A$ este o parte a lui B, adică $B \setminus A \subset B$.

Este evident că mulțimile $A \setminus B$ și $B \setminus A$ sînt disjuncte.

Exemple

Într-o clasă sînt elevi care fac parte din echipa de gimnastică a școlii și elevi care fac parte din cercul de activități artistice.

Să notăm:

A = mulțimea elevilor care fac parte din echipa de gimnastică a școlii;

B = mulțimea elevilor care fac parte din cercul de activități artistice.

Atunci $A \setminus B$ este mulțimea elevilor care fac parte din echipa de gimnastică a școlii, dar nu fac parte din cercul de activități artistice;

$B \setminus A$ este mulțimea elevilor care fac parte din cercul de activități artistice, dar nu fac parte din echipa de gimnastică a școlii.

1.8.6. DIFERENȚA SIMETRICĂ

Diferența simetrică a două mulțimi A și B este reuniunea mulțimilor disjuncte $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

Pentru scrierea diferenței simetrice a două mulțimi se folosește simbolul „Δ":

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Exemplu

Pentru a selecționa elevii care vor participa la un concurs „Din istoria și geografia patriei", profesorul-diriginte al unei clase face o verificare prealabilă, înregistrînd elevii care au note foarte bune sau la istorie sau la geografie, sau la amîndouă.

Să notăm cu A mulțimea elevilor care au note foarte bune la istorie și cu B mulțimea elevilor care au note foarte bune la geografie. Mulțimea $A \setminus B$ este formată din elevii care au note foarte bune la istorie, dar nu au note foarte bune la geografie. Mulțimea $B \setminus A$ este formată din elevii care au note foarte bune la geografie, dar mai puțin bune la istorie.

Mulțimea elevilor care au note foarte bune la una și numai una din cele două discipline — istorie sau geografie — este:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Mulţimea $A \triangle B$ care este formată din elevii ce au note foarte bune numai la una din cele două discipline, istorie sau geografie, se numeşte diferenţă simetrică.

1.8.7. PROPRIETĂŢILE DIFERENŢEI

1. Dacă $A \subset B$, atunci $A \setminus B$ este mulţimea vidă. Orice element care aparţine mulţimii A aparţine şi mulţimii B. Prin urmare nu există elemente care să aparţină mulţimii A şi să nu aparţină mulţimii B.

2. Dacă $A \subset B$, atunci $B \setminus A$ este complementara mulţimii A în raport cu mulţimea B (fig. 1.11).

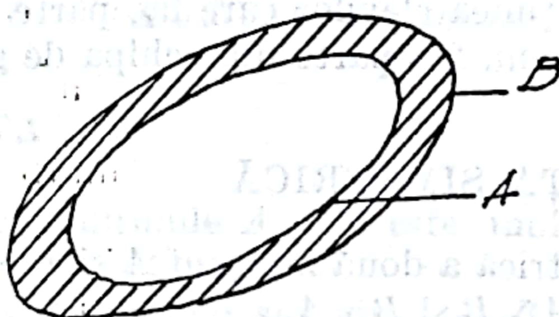


Fig. 1.11

Mulţimea $B \setminus A$ este formată din toate elementele lui B care nu aparţin lui A.

$$B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ şi } x \notin A\}.$$

Prin urmare,

$$B \setminus A = C_B A.$$

3. Diferenţa mulţimilor nu este asociativă.

Să considerăm trei mulţimi oarecare A, B, C.

Să reprezentăm cu ajutorul diagramelor lui Venn mulţimile $(A \setminus B) \setminus C$ şi $A \setminus (B \setminus C)$ (fig. 1.12 şi 1.13).

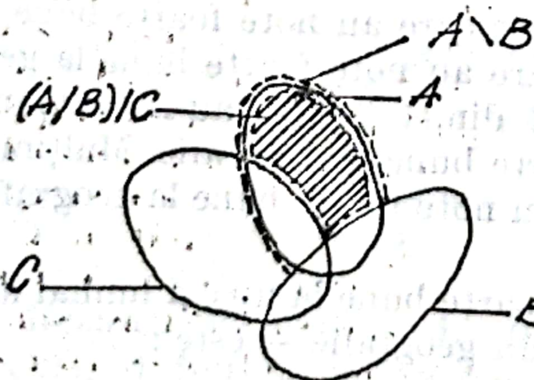


Fig. 1.12

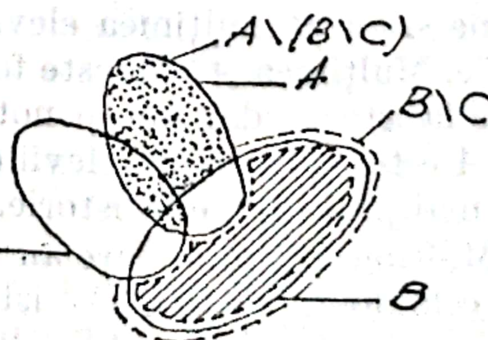


Fig. 1.13

Mulţimea $(A \setminus B) \setminus C$ este reprezentată prin porţiunea haşurată din fig. 1.12 în timp ce $A \setminus (B \setminus C)$ este reprezentată prin porţiunea haşurată din fig. 1.13.

Se remarcă că cele două porţiuni nu coincid.

Prin urmare, $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$.

4. Dacă $A \cap C = \emptyset$ atunci $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

Ilustrarea acestei proprietăţi se poate face cu ajutorul diagramelor Venn (fig. 1.14 şi 1.15).

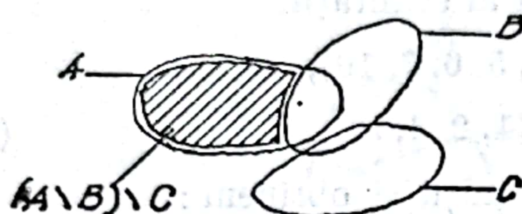


Fig. 1.14

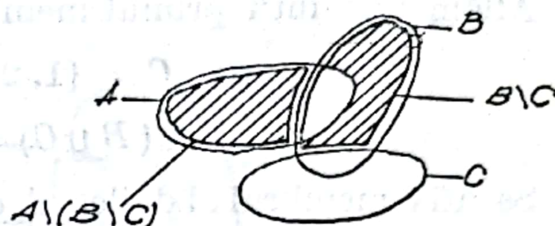


Fig. 1.15

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus B, \quad A \setminus (B \setminus C) = A \setminus B.$$

1.8.8. DISTRIBUTIVITATEA INTERSECŢIEI FAŢĂ DE REUNIUNE

Dacă se dau mulţimile A, B şi C atunci avem relaţia:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

numită distributivitatea lui A faţă de reuniunea mulţimilor B şi C

Pentru a arăta distributivitatea intersecţiei faţă de reuniune putem proceda în două moduri:

a) Pe două diagrame (fig. 1.16 şi 1.17) reprezentînd mulţimile A, B şi C figurăm mulţimile:

$$A \cap (B \cup C) \text{ şi } (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

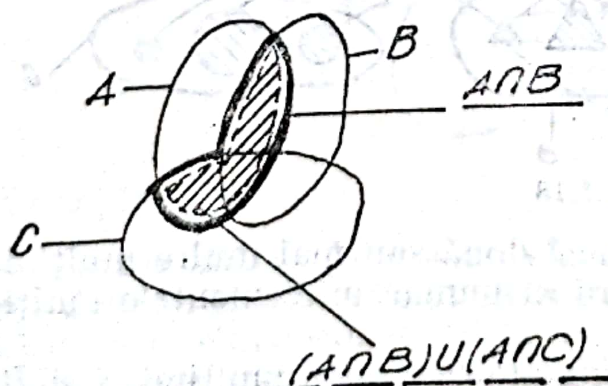


Fig. 1.16

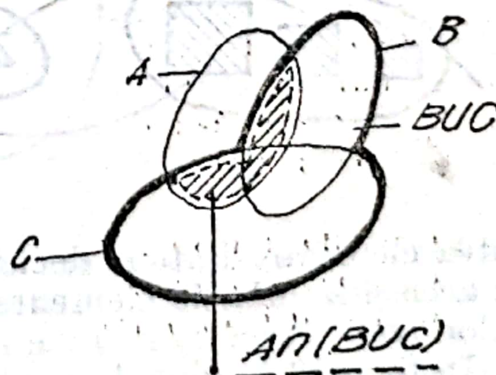


Fig. 1.17

Se compară cele două porțiuni hașurate și se observă că ele coincid.

b) Să arătăm că proprietatea este adevărată pentru trei mulțimi A, B și C.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$B = \{4, 5, 6, 7\}$,

$C = \{1, 2, 4, 5, 10\}$.

Aflăm mai întîi primul membru al egalității.

$$B \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 10\},$$

$$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 4, 5\}. \qquad (1)$$

Se află membrul al doilea al egalității și obținem :

$$A \cap B = \{4, 5\}\,;\; A \cap C = \{1, 2, 4, 5\}\,;$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 4, 5\}. \qquad (2)$$

Din compararea relațiilor (1) și (2) se verifică egalitatea :

$$A \cap B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

1.9. NUMĂR NATURAL

1.9.1. NOȚIUNEA DE CORESPONDENȚĂ BIUNIVOCĂ

În figura 1.18 sînt desenate diagramele Venn a trei mulțimi. Fiecare din aceste mulțimi are cîte trei elemente. Aceste mulțimi sînt diferite între ele, dar au o proprietate comună : au tot

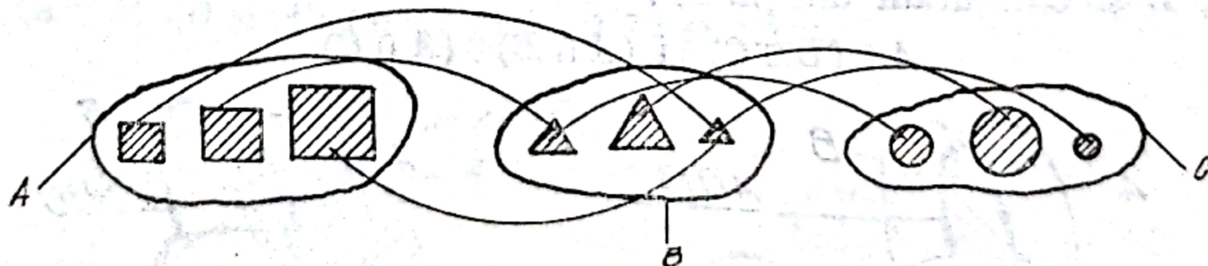


Fig. 1.18

atîtea elemente. Putem decide dacă două sau mai multe mulțimi au același număr de elemente fără să numărăm elementele mulțimilor respective.

În figura 1.19 sînt desenate diagramele a două mulțimi A și B. Facem să corespundă unui element al mulțimii A un element al

mulţimii B. Vom lua un alt element al mulţimii A şi-l vom pune în corespondenţă cu un element al mulţimii B şi aşa mai departe. Corespondenţa dintre elementele celor două mulţimi este arătată prin săgeţi care pleacă de la mulţimea A către mulţimea B. Dacă în această operaţie de corespondenţă orice element al mulţimii A are un corespondent unic în mulţimea B şi fiecare element al mulţimii B este corespondentul unui singur element al mulţimii A, se spune că am stabilit o corespondenţă biunivocă între elementele celor două mulţimi.

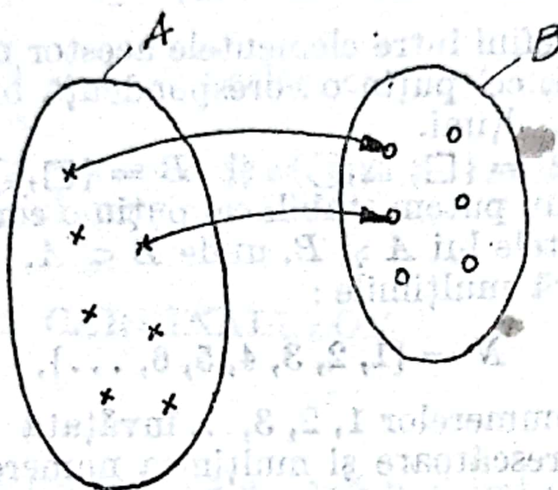


Fig. 1.19

Definiţie

Două mulţimi A şi B se numesc *echipotente* dacă există o corespondenţă biunivocă care asociază la fiecare element din A un element unic din B, astfel încît la două elemente distincte din A corespund elemente distincte din B şi nu există nici un element în B care să nu fie în corespondenţă cu un element din A.
Se scrie $A \sim B$ (fig. 1.20).

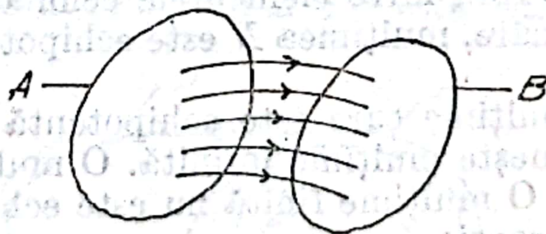


Fig. 1.20

Exemplu

Într-o sală de laborator, elevii efectuează experienţe. Profesorul doreşte să afle dacă sînt atîtea scaune cîţi elevi sînt, fără ca să numere elevii sau scaunele. Pentru aceasta el invită elevii să se aşeze pe scaune. Dacă nu a mai rămas nici un scaun liber sau nici un elev fără scaun, înseamnă că numărul elevilor este egal cu numă-

rul scaunelor. Între mulţimea elevilor şi mulţimea scaunelor există o corespondenţă biunivocă.

Mulţimi finite. Mulţimi infinite

1. Se consideră mulţimile:

$$A = \{\square, \triangle, \bigcirc\} \text{ şi mulţimea } B = \{\overline{\square}, \overline{\triangle}, \overline{\bigcirc}\}.$$

Aceste mulţimi sînt echipotente, deoarece corespondenţa:

$$\square \to \overline{\square}, \quad \triangle \to \overline{\triangle}, \quad \bigcirc \to \overline{\bigcirc},$$

pe care o putem defini între elementele acestor mulţimi este biunivocă. Există, deci, cel puţin o corespondenţă biunivocă între elementele acestor mulţimi.

2. Mulţimile $A = \{\square, \triangle, \bigcirc\}$ şi $B = \{\square, \bigcirc\}$ nu sînt echipotente deoarece nu putem stabili cel puţin o corespondenţă biunivocă între elementele lui A şi B, unde $B \subset A$.

3. Se consideră mulţimile:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\},$$

adică mulţimea numerelor 1, 2, 3,... învăţată în şcoala primară scrisă în ordine crescătoare şi mulţimea numerelor cu soţ (pare).

$$N' = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}.$$

Evident, dacă $x \in N'$, atunci $x \in N$ şi, prin urmare, $N' \subset N$. Mulţimile N şi N' sînt echipotente, deoarece corespondenţa

$$\begin{matrix} \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, \ldots\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \{1 \cdot 2, & 2 \cdot 2, & 3 \cdot 2, & 4 \cdot 2, & 5 \cdot 2, & 6 \cdot 2, \ldots\} \end{matrix}$$

pe care o putem stabili între elementele celor două mulţimi este biunivocă. Prin urmare, mulţimea N este echipotentă cu o submulţime a sa proprie.

Definiţie. Orice mulţime care este echipotentă cu o submulţime a sa proprie se numeşte mulţime infinită. O mulţime care nu este infinită este finită. O mulţime finită nu este echipotentă cu nici o submulţime a sa proprie.

Două mulţimi sînt echipotente dacă există (cel puţin) o corespondenţă biunivocă între elementele celor două mulţimi. Semnificaţia acestei definiţii constă în faptul că ea exprimă matematic proprietatea celor două mulţimi de a avea acelaşi număr de elemente fără a utiliza noţiunea de număr şi fără a considera că mulţimile sînt finite sau infinite.

Clasa tuturor mulţimilor echipotente cu o mulţime A se numeşte cardinalul mulţimii A şi se scrie card A. În cazul cînd A este o mulţime finită, cardinalul mulţimii A este numărul de elemente ale mulţimii.

Dacă între elementele a două mulţimi A şi B există o corespondenţă biunivocă, atunci ele au acelaşi număr de elemente.

1.9.2. CARDINALUL UNEI MULŢIMI

Definiţie

Două mulţimi A şi B au acelaşi cardinal dacă şi numai dacă ele sînt echipotente.

Vom scrie $\text{card}A = \text{card}B$ şi se citeşte cardinalul mulţimii A este egal cu cardinalul mulţimii B.

1.9.3. ADUNAREA CARDINALELOR

Definiţie

Dacă a şi b sînt cardinalele a două mulţimi disjuncte A şi B, atunci suma $a + b$ este cardinalul reuniunii celor două mulţimi, $A \cup B$.

Prin urmare dacă:

$A \cap B = \emptyset$ şi $\text{card}A = a$, $\text{card}B = b$, atunci $\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B = a + b$.

Exemplu

Fie A şi B două mulţimi disjuncte, astfel încît $\text{card}A = 3$, $\text{card}B = 2$. Cardinalul reuniunii $A \cup B$ este egal cu 5 (fig. 1.21).

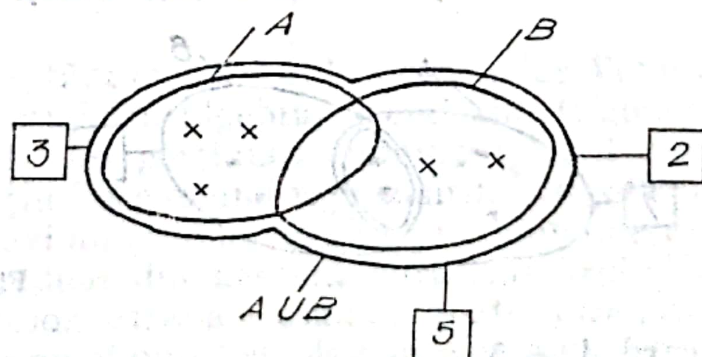


Fig. 1.21

Avem: $\text{card}\ A = 3$; $\text{card}\ B = 2$; $\text{card}\ (A \cup B) = 5$.

$\text{card}\ (A \cup B) = \text{card}\ A + \text{card}\ B$.

1.9.4. PROPRIETĂȚILE OPERAȚIEI DE ADUNARE A CARDINALELOR

1. Adunarea este comutativă.
card$A = a$, card$B = b$, $A \cap B = \emptyset$.
Din relația $A \cup B = B \cup A$ obținem :
card $(A \cup B)$ = card $(B \cup A)$,
card A + card$B$ = card$B$ + card A
$a + b = b + a$

2. Adunarea este asociativă.
card $A = a$, card $B = b$, card $C = c$, A, B și C disjuncte două cîte două.
Din relația $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ obținem :
card $[(A \cup B) \cup C]$ = card $[A \cup (B \cup C)]$,
sau :
card $(A \cup B)$ + card C = card A + card $(B \cup C)$.
(card A + card B) + card C = card$A$ + (card B + card C).

3. Zero este element neutru pentru adunare.
Din relația $A \cup \emptyset = A$ obținem :
card $(A \cup \emptyset)$ = card A
sau :
card A + card $\emptyset$ = card A

$$a + \text{card}\emptyset = a. \tag{1}$$

Din relația (1) obținem : card $\emptyset = 0$.
Cardinalul mulțimii vide este numărul natural 0.

1.9.5. OPERAȚII CU CARDINALE ÎN CAZUL CÎND MULȚIMILE NU SÎNT DISJUNCTE

Să considerăm două mulțimi A și B (fig. 1.22).

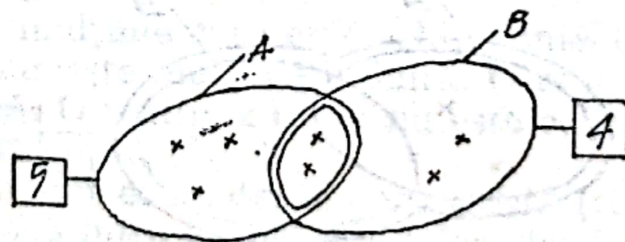


Fig. 1.22

Avem :

card $A = 5$
card $B = 4$
card $(A \cap B) = 2$.

Din figură, avem :

card $(A \cup B) = 7$ și card $(A \cap B) = 2$

Se obține : card A + card$B$ = card $(A \cup B)$ + card $(A \cap B)$, sau : card $(A \cup B)$= card A + card B — card$(A \cap B)$.

Exemple

1. Se consideră diagramele din fig. 1.23. Să se găsească :

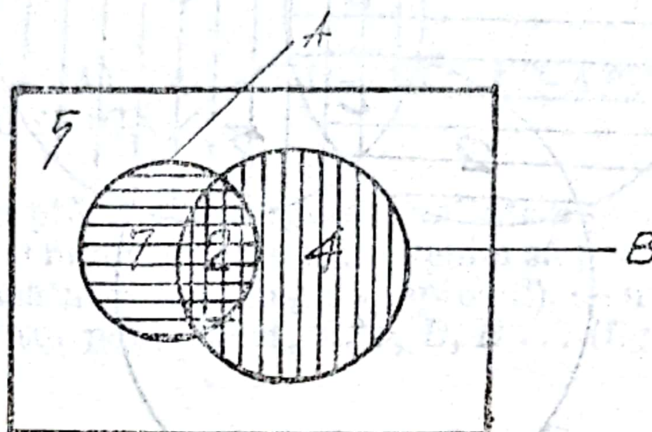


Fig. 1.23

card $(A \cap B)$, card A, card $(B \cap \bar{A})$, card $\bar{A}$, card $(\overline{A \cup B})$.

Soluție : card $(A \cap B) = 2$; card $A = 7 + 2 = 9$; card $(B \cap \bar{A}) = 4$; card $\bar{A} = 5 + 4 = 9$; card $(\overline{A \cup B}) = 5$.

2. Într-un grup de 35 de elevi, 15 au studiat algebra, 22 au studiat geometria, 14 au studiat trigonometria, 11 au studiat algebra și geometria, 8 au studiat geometria și trigonometria, 5 au studiat algebra și trigonometria și 3 au studiat toate subiectele. Cîți elevi nu au studiat nici o disciplină.

Soluție

Să reprezentăm cu ajutorul diagramelor Venn (1.24) mulțimile elevilor care studiază algebra, geometria, trigonometria. Se scrie apoi numărul 3 în porțiunea comună celor 3 cercuri. Vom scrie apoi 2 în porțiunea comună reprezentînd trigonometria și algebra, deoarece 5 elevi au studiat algebra și trigonometria și prin urmare trebuie să scădem din această cifră numărul 3 care reprezintă numărul elevilor care au studiat toate disciplinele. Se obține în acest mod numai numărul elevilor care au studiat numai algebra și trigonometria și nu au studiat geometria. Continuînd în același mod, se obțin toate datele trecute în fig. 1.24.

Numărul tuturor elevilor care au studiat aceste discipline este 30. Dacă scoatem acest număr din 35, se obţine numărul elevilor care nu au studiat nici o disciplină.

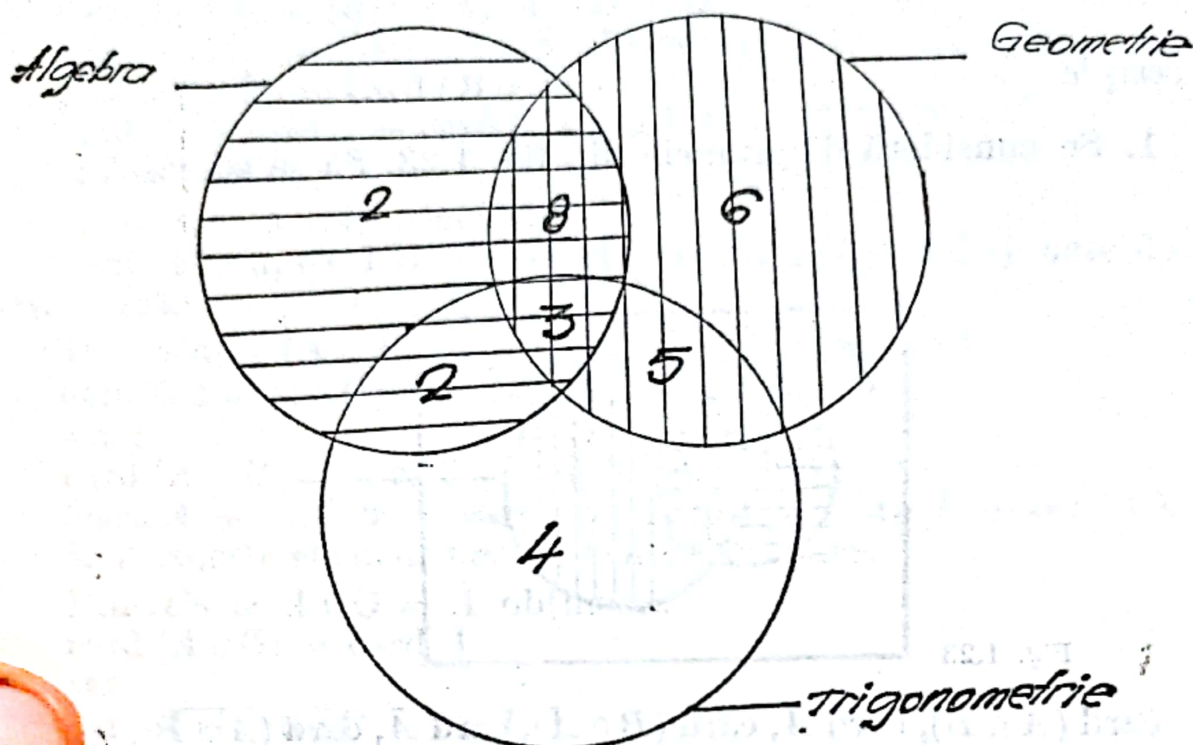


Fig. 1.24

1.9.6. FORMAREA SUCCESIVĂ A NUMERELOR NATURALE

Se consideră mulţimea vidă, notată cu litera Ø. **Zero este** cardinalul mulţimii vide.

$$0 = \text{card}\,\varnothing$$

1 — este cardinalul mulţimii {0}.

$$1 = \text{card}\,\{0\}.$$

Numărul 2 este cardinalul mulţimii {0 ; 1}.

$$2 = \text{card}\,\{0\,;\,1\}.$$

Numărul 3 este cardinalul mulţimii {0 ; 1 ; 2}.

$$3 = \text{card}\,\{0, 1, 2\}.$$

Procedînd în acelaşi mod vom obţine succesiv

$$4 = \text{card}\,\{0, 1, 2, 3\}.$$

$$5 = \text{card}\,\{0, 1, 2, 3, 4\}\ \text{etc.}$$

O mulţime M, care este echipotentă cu mulţimea $\{0, 1, 2, \ldots \ldots n-1\}$, are acelaşi cardinal n.

$$\text{card } M = n.$$

Mulţimea cu elemente 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; . . . ; n ; . . . se numeşte mulţimea numerelor naturale. Mulţimea numerelor naturale se notează cu N şi se scrie:

$$N = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

1.9.7. REPREZENTAREA NUMERELOR NATURALE PE AXA NUMERICĂ

Desenăm o dreaptă (d) şi un segment unitate u şi luăm pe această dreaptă un punct O numit origine şi convenim să purtăm la dreapta punctului O, segmentul u de-a lungul dreptei (d), de un număr oarecare de ori. Se obţin punctele $A, B, C, D, E \ldots$ (fig. 1.25).

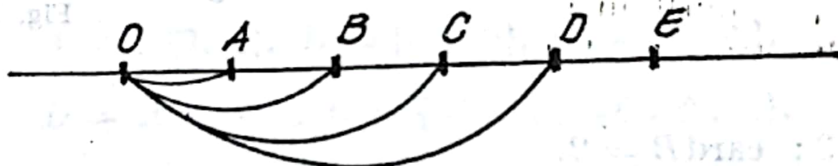


Fig. 1.25

Avem $OA = 1u$, $OB = 2u$, $OC = 3u \ldots$

Prin urmare, punctelor $A, B, C, D, E, \ldots$ le corespund numerele 1, 2, 3 . . . care sînt în mod unic determinate. Unui număr natural îi corespunde un singur punct pe dreaptă; la numere naturale diferite corespund puncte diferite. Dintre două numere naturale date, mai mare este numărul căruia îi corespunde un punct pe axă aşezat mai la dreapta:

$$1 < 2 < 3 \ldots .$$

1.9.8. MULŢIME FINITĂ

Dacă se numără 15 elevi ai unei clase, desemnînd succesiv fiecare elev printr-un număr se stabileşte de fapt o corespondenţă biunivocă dintre mulţimea elevilor şi mulţimea primelor 15 numere naturale plecînd de la 1. Cele două mulţimi au acelaşi cardinal, numărul 15.

Dacă mulţimea M este finită, atunci cardinalul său este numărul n care arată cîte elemente are mulţimea M.

Vom scrie card $M = n$.

1.9.9. ADUNAREA NUMERELOR NATURALE

Să considerăm numerele naturale 3 şi 2. Pentru a calcula suma lor procedăm astfel:

Formăm două mulţimi disjuncte A şi B care au 3 şi, respectiv, 2 elemente (fig. 1.26).

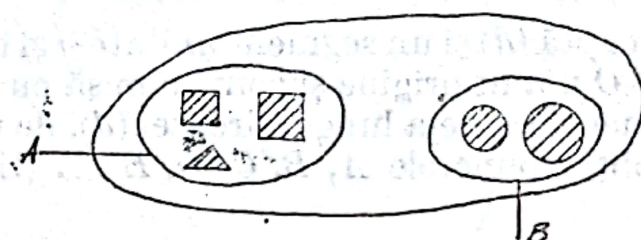


Fig. 1.26

Avem:

$\text{card}A = 3$; $\text{card}B = 2$.

Formăm reuniunea mulţimilor A şi B şi obţinem o nouă mulţime $A \cup B = C$, care are 5 elemente; $\text{card}C = 5$.
Aplicăm proprietatea referitoare la adunarea cardinalelor şi obţinem:

$$\text{card}A + \text{card}B = \text{card}(A \cup B) = \text{card}C.$$

$$3 + 2 = 5.$$

Prin urmare, operaţia de adunare a numerelor naturale se reduce la operaţia de adunare a cardinalelor mulţimilor finite.

1.9.10. SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE

Considerăm o mulţime A formată din 5 elemente.

Să formăm o submulţime B, inclusă în A, care are două

elemente. Avem : $3 + 2 = 5$, egalitate care se mai scrie $3 = 5 - 2$; în general dacă se consideră două mulţimi A şi B, avînd $B \subset A$:

$$\text{card}(A \setminus B) = \text{card}A - \text{card}B \text{ (fig. 1.27).}$$

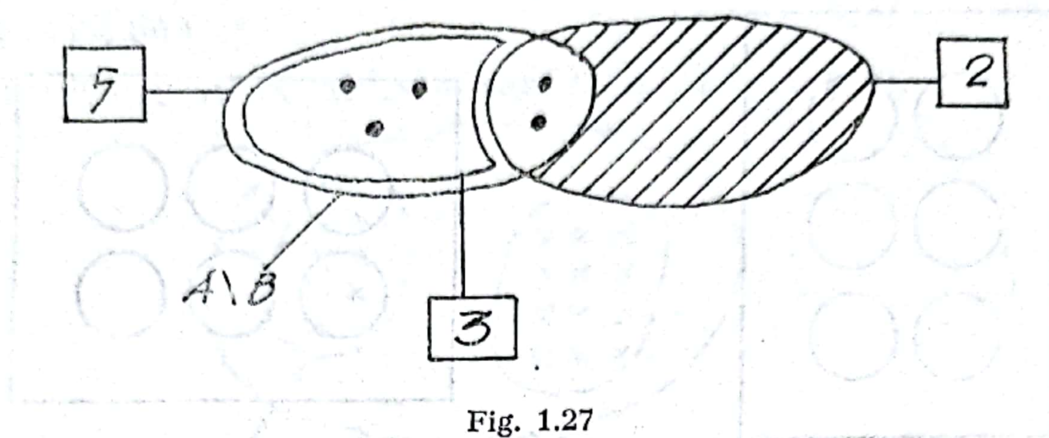


Fig. 1.27

1.9.11. ÎNMULŢIREA NUMERELOR NATURALE

Fie mulţimile :

$$A = \{\square, \square\},\ B = \{\bigcirc, \circ\},\ C = \{\triangle, \triangle\},$$

$$D = A \cup B \cup C = \{\square, \square, \bigcirc, \circ, \triangle, \triangle\}.$$

Avem : $\text{card}A = \text{card}B = \text{card}C = 2$; $\text{card}D = 6$.
Din relaţia :

$\text{card}A + \text{card}B + \text{card}C = \text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}D$, deducem :

$$2 + 2 + 2 = 6.$$

Suma $2 + 2 + 2$ se poate scrie $3 \cdot 2$ şi se numeşte produsul numerelor naturale 3 şi 2.

Se scrie : $3 \cdot 2 = 6$ sau $6 = 3 \cdot 2$.

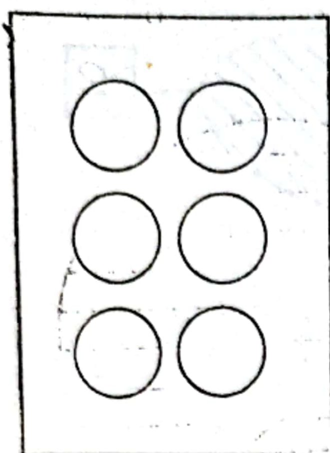
Operaţia care asociază la două numere naturale 2 şi 3 numărul 6 se numeşte înmulţire.

1.9.12. PROPRIETĂŢILE ÎNMULŢIRII

a) Înmulţirea numerelor naturale este comutativă

$$3 \cdot 2 = 6 \text{ (fig. 1.28 } a) \qquad 2 \cdot 3 = 6 \text{ (fig. 1.28 } b)$$

$$3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 6$$



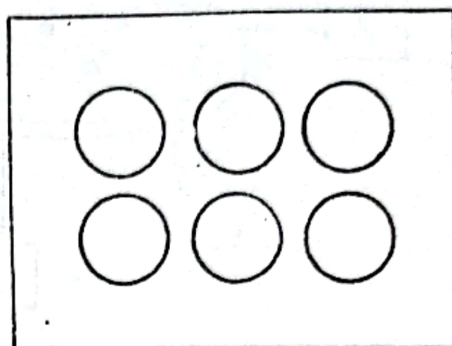


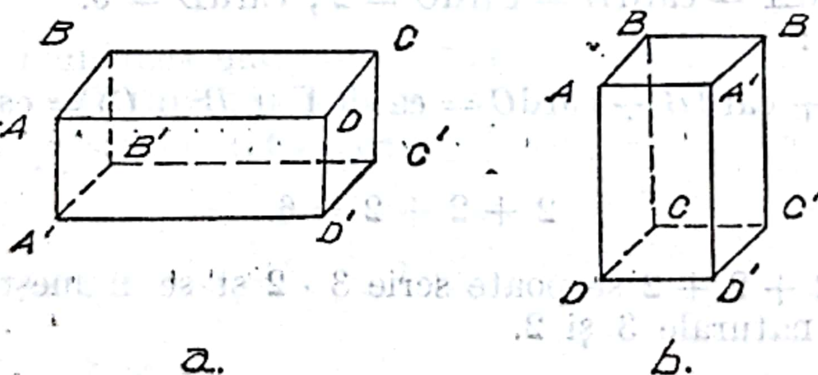
Fig. 1.28

Mai general putem scrie:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

b) Înmulțirea numerelor naturale este asociativă.

Volumul paralelipipedului $ABCDA'B'C'D'$ (fig. 1.29) poate fi



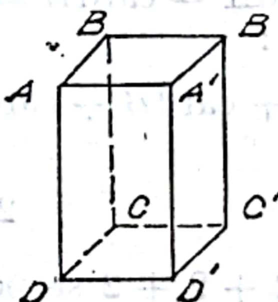


Fig. 1.29

calculat în două moduri: considerînd bază dreptunghiul $ABCD$ sau $DCC'D'$.

$$V = (4 \cdot 2) \cdot 3 \text{ (fig. 1.29 } a), \; V = 4 \cdot (2 \cdot 3) \text{ (fig. 1.29 } b),$$

și avem:

$$(4 \cdot 2) \cdot 3 = 4 \cdot (2 \cdot 3).$$

În general $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

c) Înmulţirea numerelor este distributivă faţă de adunare. Să considerăm două mulţimi disjuncte A şi B, avînd:

$$\text{card} A = 4 \cdot 2; \ \text{card} B = 4 \cdot 3; \ \text{card} A \cup B = 4 \cdot 5.$$

Din relaţiile:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card} A + \text{card} B$$ (fig. 1.30, *a* şi *b*),

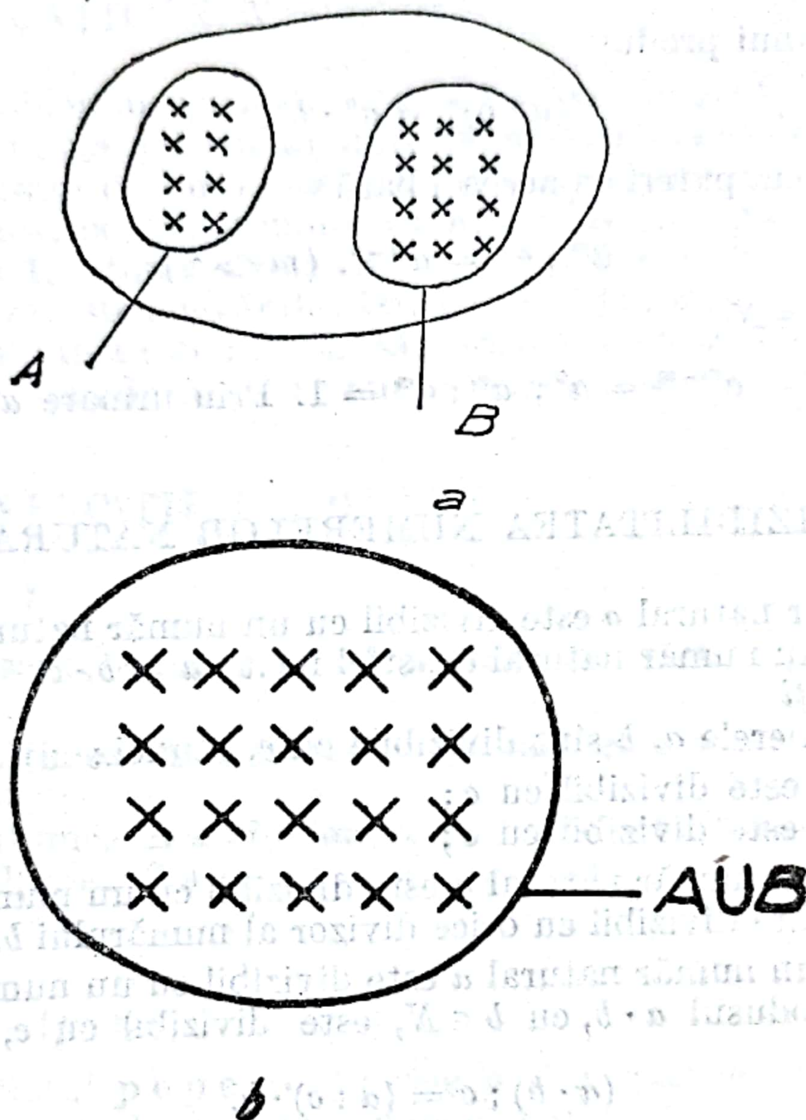


Fig. 1.30

obţinem:

$$4 \cdot (2 + 3) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3.$$

În general: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

1.9.13. OPERAŢII CU PUTERI

Pentru a ridica un număr natural a la o putere de exponent număr natural n diferit de 0, se calculează produsul a n factori egali cu a.

Numărul n se numeşte exponentul puterii iar a baza puterii.

4—c. 1782

Se verifică uşor următoarele proprietăţi:

1. Produsul puterilor cu aceeaşi bază

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad a, m, n \in N.$$

2. Puterea unei puteri

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

3. Puterea unui produs

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

4. Cîtul a două puteri cu aceeaşi bază

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \ (m > n)$$

5. $a^\circ = 1, \ a \in N$

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^\circ; \ a^m : a^m = 1. \text{ Prin urmare } a^\circ = 1.$$

1.9.14. DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

Un număr natural a este divizibil cu un număr natural b ($b \neq 0$) dacă există un număr natural c, astfel încît: $a = b \cdot c$.

Proprietăţi

Dacă numerele a, b sînt divizibile cu c, atunci:

1. $a + b$ este divizibil cu c;
2. $a - b$ este divizibil cu c;
3. Dacă un număr natural a este divizibil cu un număr natural b, atunci el este divizibil cu orice divizor al numărului b.
4. Dacă un număr natural a este divizibil cu un număr natural c, atunci produsul $a \cdot b$, cu $b \in N$, este divizibil cu c, şi avem:

$$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b.$$

1.9.15. CRITERII DE DIVIZIBILITATE

Un număr este divizibil cu 10 dacă ultima sa cifră este zero.

Un număr este divizibil cu 2 dacă ultima sa cifră este zero, sau un număr cu soţ.

Un număr este divizibil cu 5 dacă ultima sa cifră este zero sau 5.

Un număr este divizibil cu 3 sau cu 9 dacă suma cifrelor sale este un număr divizibil cu 3 sau cu 9.

Un număr este divizibil cu 25 dacă ultimele sale două cifre sînt : 00, 25, 75, 50.

1.9.16. ECUAȚII ÎN N

Să considerăm egalitatea $3x + 2 = 8$. Această egalitate este adevărată numai pentru anumite valori date variabilei x.

O egalitate de forma $ax + b = c$; $a, b, c, x \in N$, care este adevărată numai pentru anumite valori ale lui x, se numește **ecuație**. Dacă $x = 1$, atunci avem $3 \cdot 1 + 2 = 5 \neq 8$ și, prin urmare, egalitatea nu este adevărată. Dacă $x = 2$, atunci avem : $3 \cdot 2 + 2 = 8$ și egalitatea este adevărată. Numărul natural 2 pentru care egalitatea este adevărată se numește **soluția ecuației**.

1.9.17. EXERCIȚII REZOLVATE

Exemplul 1

Să se scrie, enumerînd elementele din care sînt constituite, mulțimile :

1°) Mulțimea A a literelor din care este alcătuit cuvîntul p e p e n e;

2°) Mulțimea B a cifrelor cu care este scris numărul 110 110 ;

3°) Mulțimea C a zilelor unei săptămîni.

Soluție

1°) $A = \{p, n, e\}$

În cuvîntul p e p e n e literele p și e apar de mai multe ori. În mulțimea A ele se scriu o singură dată.

2°) $B = \{1 ; 0\}$

3°) $C =$ {luni, marți, miercuri, joi, vineri, sîmbătă, duminică}.

Exemplul 2

Fie E mulțimea elevilor din clasa a V-a, premianți ai unei școli. Petrișor și Ionel nu sînt premianți. Faceți o diagramă și arătați că Petrișor și Ionel nu fac parte din mulțimea E.

Soluție

Vom trasa mai întîi o curbă închisă care reprezintă mulțimea E (fig. 1.31.).

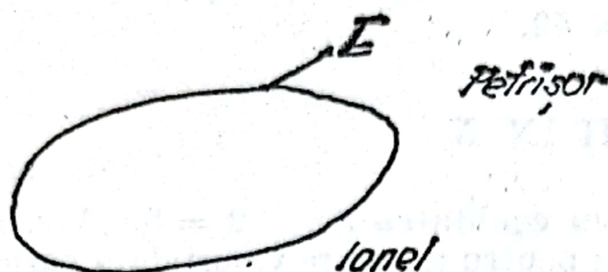


Fig. 1.31

Deoarece există un număr mare de premianți în clasele a V-a ale unei școli, nu vom desena nimic în interiorul curbei închise. Petroșor și Ionel, deoarece nu sînt premianți, vor fi reprezentați prin două puncte în exteriorul curbei.

Exemplul 3

Să se alcătuiască diagrama Venn pentru mulțimea
$E = \{x \mid x$ este un număr impar mai mic decît $10\}$.
Să se indice că $18 \notin E$.

Soluție

Elementele mulțimii E sînt numerele 1, 3, 5, 7, 9. Prin urmare trebuie să plasăm 5 puncte în interiorul curbei închise ce reprezintă mulțimea E. De unde rezultă diagrama din fig. 1.32.

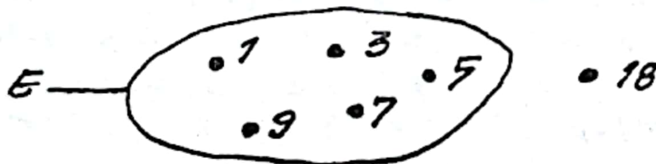


Fig. 1.32

Punctul reprezentînd numărul 18 este așezat în exteriorul curbei închise.

Exemplul 4

Să notăm:
A mulțimea locuitorilor orașului București.
B mulțimea locuitorilor din Republica Socialistă România.
C mulțimea locuitorilor din Europa.
Să se reprezinte aceste trei mulțimi prin diagrame.

Soluție

Avem: $A \subset B \subset C$, de unde rezultă diagrama din fig. 1.33.



Fig. 1.33

Orice locuitor al orașului București este și locuitor al Republicii Socialiste România. Orice locuitor al României este și locuitor al Europei.

Exemplul 5

$A = \{x \mid x$ este elev premiant al școlii noastre$\}$

$B = \{x \mid x$ este elev care cîntă în corul școlii noastre$\}$

Să se afle $A \cup B$ și apoi să se facă diagrama.

Soluție

$A \cup B$ este format din elementele care aparțin mulțimii A sau mulțimii B.

Deci: $A \cup B = \{x \mid x$ este elev premiant sau elev care cîntă în corul școlii$\}$ (fig. 1.34).

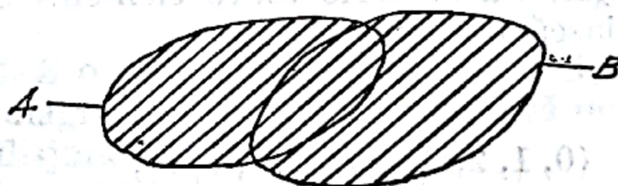


Fig. 1.34

Mulțimile A și B pot avea elemente comune. Un elev care cîntă în corul școlii poate fi și premiant.

Mulțimea $A \cup B$ este formată din porțiunea hașurată.

Exemplul 6

Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

$B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Să se afle $A \cap B$ și apoi să se alcătuiască diagrama.

Soluție

$$A \cap B = \{5, 6, 7\} \text{ (fig. 1.35).}$$

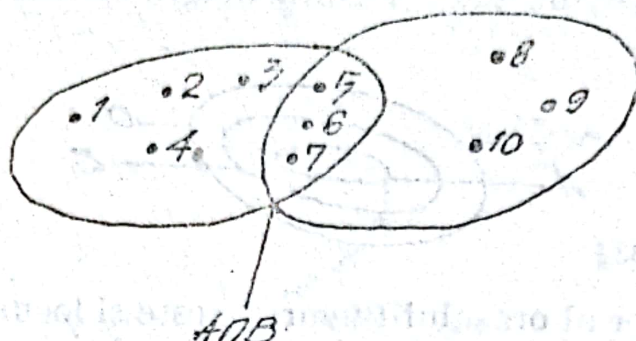


Fig. 1.35

Exemplul 7

Se consideră trei mulțimi date prin diagramele lor (fig. 1.36).

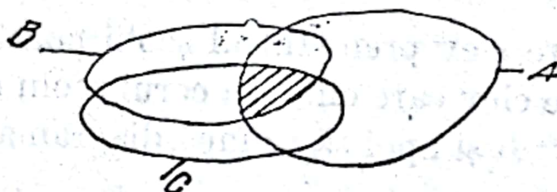


Fig. 1.36

Să se traseze intersecția lor.

Exemplul 8

Se consideră mulțimile :
$A = \{x \mid x$ număr natural mai mic decît 10$\}$;
$B = \{x \mid x$ număr natural impar mai mic decît 10$\}$.
Să se afle $C_A B$. Să se scrie toate elementele mulțimii $C_A B$.
Să se alcătuiască diagrama.

Soluție

Avem : $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
$C_A B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$,
$C_A B = \{x \mid x$ număr natural par mai mic decît 10$\}$ (fig. 1.37).

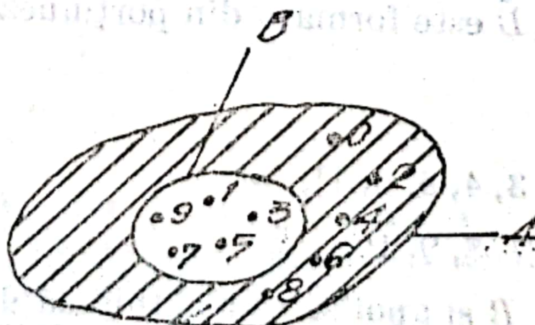


Fig. 1.37

Exemplul 9

Se consideră diagramele din figurile 1.38 și 1.39.

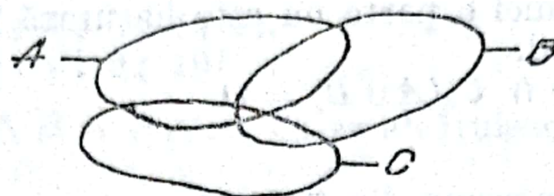


Fig. 1.38

Să se hașureze, reproducînd de fiecare dată figura :

a) $A \cap B$; b) $A \cup B$; c) $A - B$; d) $A \triangle B$; e) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup$ $\cup (B \cap C)$.

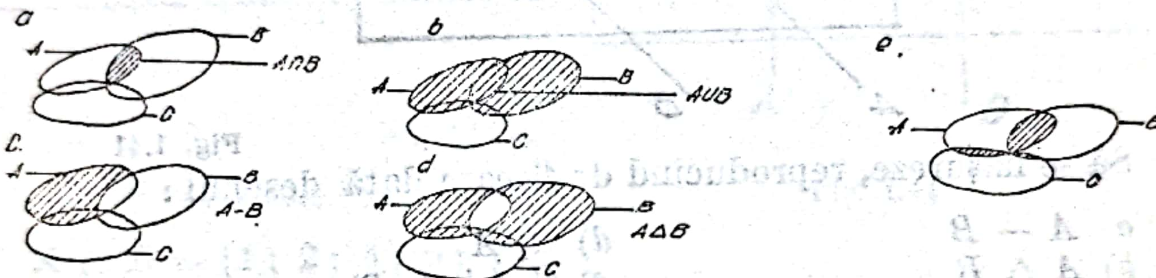


Fig. 1.39

Exemplul 10

Se consideră E o mulțime de referință și A, B două părți ale lui E. Folosind diagramele Venn să se arate că mulțimile $A \cap B$ și $C_E(A \cup B)$ sînt disjuncte (fig. 1.40).

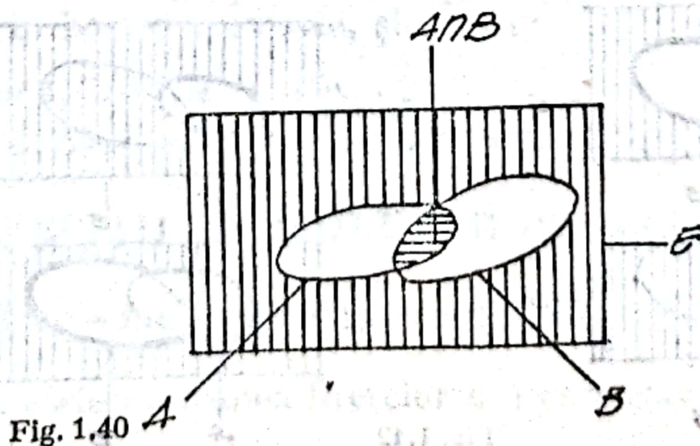


Fig. 1.40

Soluție

În diagrama din fig. 1.40 mulţimea $A \cap B$ este reprezentată prin haşuri orizontale, $C_E(A \cup B)$ este reprezentată prin haşuri verticale.

Se observă că nici o parte nu este haşurată în acelaşi timp şi vertical şi orizontal.

Deci: $(A \cap B) \cap C_A(A \cup B) = \emptyset$.

Exemplul 11

Se consideră diagrama din fig 1.41

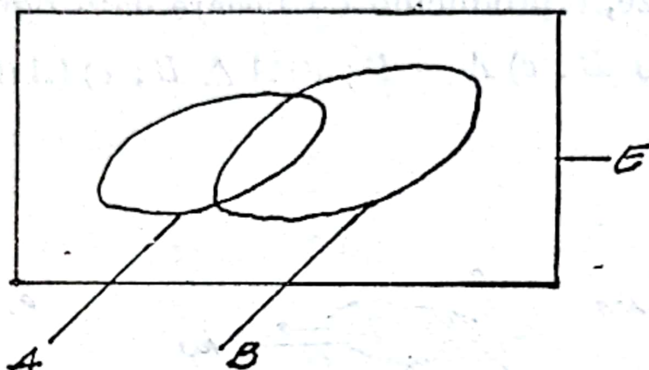


Fig. 1.41

Să se haşureze, reproducînd de fiecare dată desenul:

a) $A - B$
b) $A \triangle B$
c) $C_E B$
d) $C_E A$
e) $C_E (A \cap B)$
f) $C_E (A \cup B)$

Soluție (fig. 1.42)

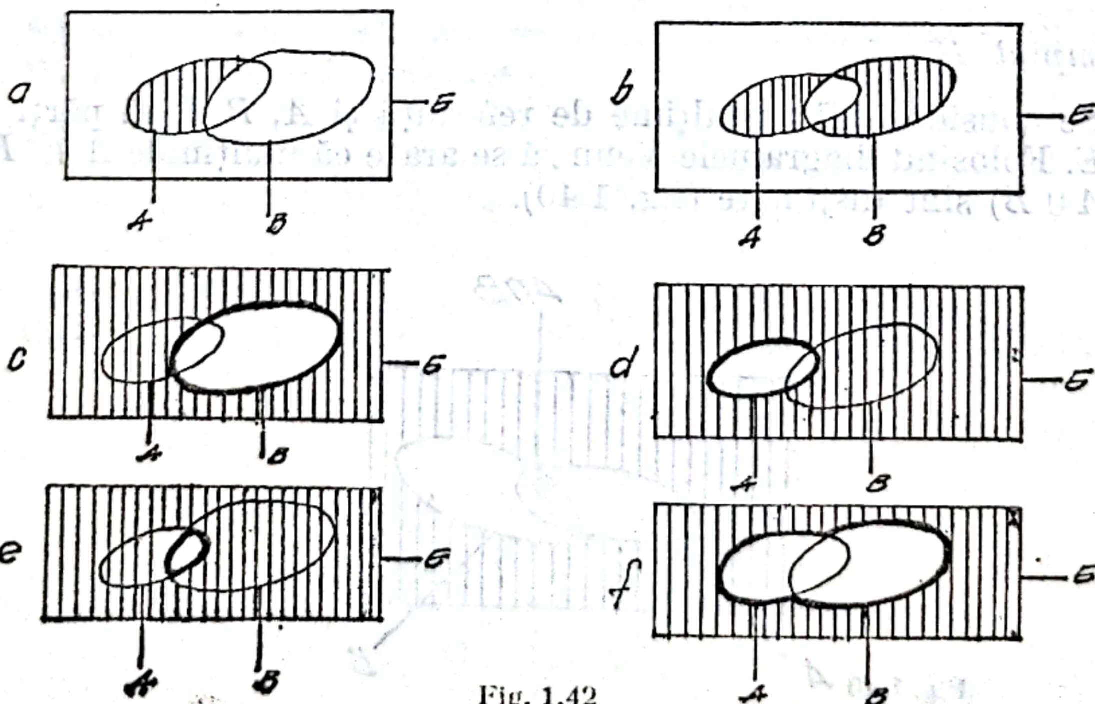


Fig. 1.42

Exemplul 12

Se consideră mulţimile:

$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$,
$B = \{3; 5; 6; 7; 9; 10\}$.

Să se afle $A \triangle B$ şi $B \triangle A$. Să se alcătuiască apoi diagramele.

Soluţie (fig. 1.43).

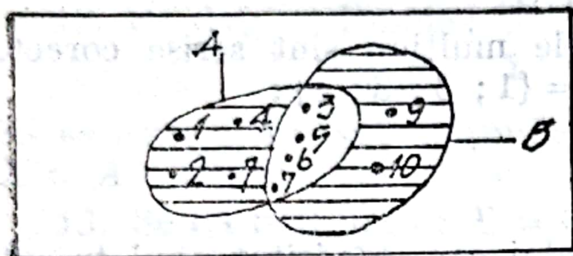


Fig. 1.43

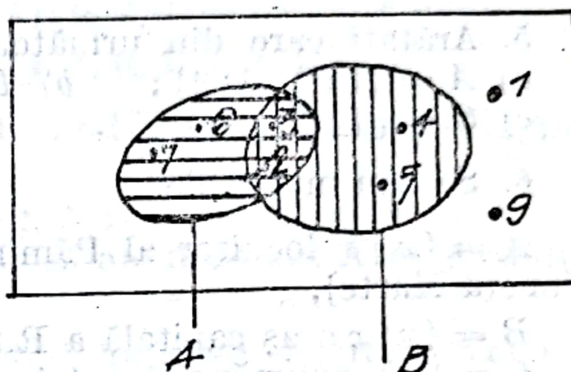


Fig. 1.44

$A \triangle B = \{1; 2; 4; 9; 10\}$,
$B \triangle A = \{9; 10; 1; 2; 4\}$.

Exemplul 13

Se dau diagramele din fig. 1.44. Se cere:
card$A$, card $(A \cap B)$, card$(A \cup B)$, card$(\overline{A \cup B})$.

Soluţie

Mulţimea A este reprezentată prin haşuri orizontale iar mulţimea B prin haşuri verticale, şi avem:

card$A = 4$, card$(A \cap B) = 2$,
card$(A \cup B) = 6$, card$(\overline{A \cup B}) = 2$.

1.9.18. EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE

1. Să se scrie mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul **m a m a**.
2. Să se scrie mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul **t a t a**.

3. Se dă mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Care din următoarele afirmaţii sînt adevărate:

a) $3 \in A$; *b*) $4 \notin A$; *c*) $5 \in A$; *d*) $4 \in A$.

4. Să se scrie mulţimea A a literelor din care este alcătuit cuvîntul c a r şi mulţimea B a literelor din care este alcătuit cuvîntul a c.

Să se arate care din următoarele afirmaţii sînt adevărate:

a) $A \subset B$; *b*) $A = B$; *c*) $A \supset B$; *d*) $A \in B$.

5. Arătaţi care din următoarele mulţimi sînt scrise corect.
a) $A = \{1; 2; 3; 4\}$; *b*) $B = \{1; 3; 3; 5\}$;
c) $C = \{\square, \triangle, \bigcirc, \square\}$.

6. Se dau mulţimile:

$A = \{x \mid x$ locuitor al Pămîntului care a vizitat anul trecut planeta Marte$\}$,
$B = \{x \mid x$ oraş capitală a R.S.R.$\}$.
$C = \{x \mid x$ număr natural divizor al lui $4\}$.

Arătaţi care din aceste mulţimi este mulţimea vidă şi care este mulţimea cu un singur element.

7. Să se reprezinte cu ajutorul diagramelor Venn mulţimile:
$A = \{1, 2, 3, 4\}$,
$B = \{2, 3, 5, 6, 7\}$,
$C = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

8. Să se reprezinte mulţimile:
$A = \{1, 4, 5, 7, 8\}$,
$B = \{1, 4, 9, 10\}$,
$C = \{1, 2, 3, 4\}$,

completînd diagramele Venn desenate (fig. 1.45).

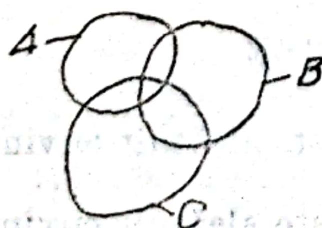


Fig. 1.45

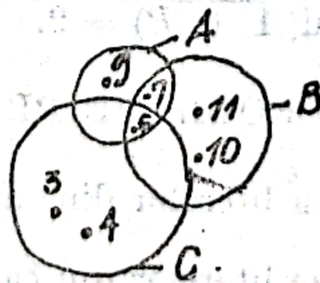


Fig. 1.46

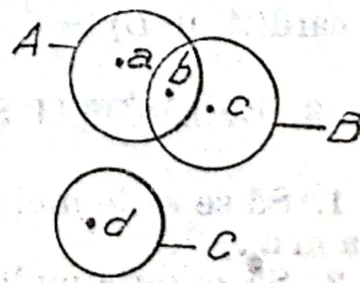


Fig. 1.47

9. În fig. 1.46 sînt reprezentate cu ajutorul diagramelor Venn mulţimile A, B, C.

Să se scrie mulţimile A, B, C enumerînd toate elementele din care sînt alcătuite.

10. Să se arate în ce relaţie sînt elementele a, b, c, d, e faţă de mulţimile A, B, C (fig. 1.47).

11. Să se scrie submulţimile proprii ale mulţimii :

$$A = \{a, 1, b\}.$$

12. Se dau mulţimile : $X = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$Y = \{4, 5, 6, 7, 2, 3, 1\}.$$

Să se scrie toate submulţimile A care verifică dubla incluziune $X \subset A \subset Y$.

13. Se dă mulţimea : $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
Să se scrie toate submulţimile proprii ale mulţimii X care conţin elementul 1.

14. În fig. 1.48 este reprezentată printr-o diagramă Venn o

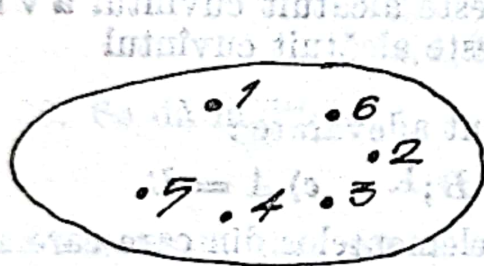


Fig. 1.48

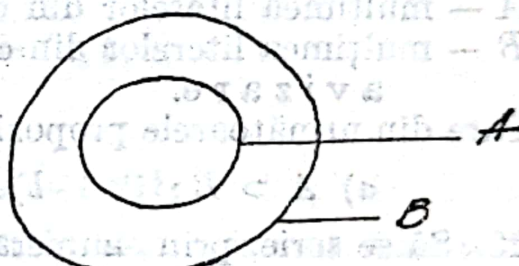


Fig. 1.49

mulţime. Să se determine cu ajutorul altor două diagrame două submulţimi disjuncte ale mulţimii A. Să se scrie aceste submulţimi enumerînd elementele din care sînt alcătuite.

15. Să se scrie toate mulţimile A care verifică relaţiile :

$$\{1, 2, 4\} \subset A \text{ şi } A \subset \{7, 1, 8, 2, 4\}.$$

16. Se dau mulţimile :

$$A = \{2, 3, 4\} \text{ şi } B = \{x, 2\}.$$

Să se determine x astfel încît să fie satisfăcută relaţia $B \subset A$.

17. Să se reprezinte grafic cu ajutorul diagramelor Venn mulţimile :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad B = \{2, 3\}.$$

Ce relaţie există între mulţimile A şi B (fig. 1.49)?

18. Se dau mulţimile :
A — mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul **c a r**;
B — mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul **a c a r**.
Care din următoarele propoziţii sînt adevărate:

1. $A \subset B$; 2. $A = B$; 3. $B \supset A$.

19. Se dau mulţimile :
A — mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul **m a r e**;
B — mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul **r a m e**.
Care din următoarele propoziţii sînt adevărate :

1) $A = B$; 2) $A \subset B$.

20. Se dau mulţimile :
A — mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul **p e r d e l e**;
B — mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul **r e p e d e**
Să se arate că avem relaţia : $B \subset A$.

21. Se dau mulţimile :
A — mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul **a v i z**;
B — mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul **a v i z a r e**.
Care din următoarele propoziţii sînt adevărate :

a) $A \supset B$; b) $A \subset B$; c) $A = B$

22. Să se scrie, prin enumerarea elementelor din care care sînt alcătuite, mulţimile :
$A = \{x \mid x$ divide numărul $9\}$,
$B = \{x \mid x$ număr natural mai mic decît 20, care se împarte fără rest la $4\}$.

23. Arătaţi care din următoarele proprietăţi definesc o mulţime :
a) x este elev silitor al clasei în care învaţă ;
b) x este un locuitor al planetei Pămînt ;
c) x este un elev inteligent din şcoala noastră.

24. Se dă mulţimea $A = \{2+2 ; 2 \times 2 \times 2\}$. Să se arate care din următoarele afirmaţii sînt adevărate :

a) $2 \in A$;
b) $4 \notin A$;
c) $8 \in A$.

25. Se dau mulţimile :
$A = \{a ; b ; c ; d\}$,
$B = \{1 ; 2\}$,
$C = \{\{1\} ; \{2\} ; \{1 ; 2\}\}$.

Să se arate care din următoarele propoziţii sînt adevărate şi care sînt false:

a) $B \in A$;
b) $B \in C$;
c) $\{1\} \in B$;
d) $\{1\} \in C$.

26. Să se arate care din următoarele afirmaţii sînt adevărate:
a. $24 \in \{x \mid x$ multiplu al numărului $4\}$,
b. $3 \in \{x \mid x$ divizor al numărului $9\}$,
c. $14 \in \{x \mid x$ divizor al numărului $36\}$.

27. Să se scrie în mod mai simplu mulţimile
$A = \{4+4, \quad 5-3, \quad 2\times 3, \; 5\times 2\}$,
$B = \{5-4, \quad 3\times 2+1, \quad 6+2\times 2\}$.

28. Să se determine elementele x, y astfel încît să avem satisfăcute egalităţile:

$$\{1, 2, x, y\} = \{1, 2, 4, 5\}.$$

29. Să se arate că oricare ar fi obiectele a, b, c avem:

$$\{a, b, b, c\} = \{a, b, c\}.$$

30. Se dă mulţimea:

$$A = \{\{x\}, \{x; y\}\}.$$

Să se arate care din următoarele afirmaţii sînt adevărate şi care sînt false:

a) $\{x\} \subset A$;
b) $\{x\} \notin A$;
c) $\{x\} = x$;
d) $\{x\} \in A$.

31. Se dă mulţimea $A = \{x \in N \mid x < 5\}$.
Cu ajutorul diagramei Venn să se reprezinte grafic mulţimea. Care din următoarele propoziţii sînt adevărate:

a) $4 \in A$;
b) $6 \in A$;
c) $2 \notin A$.

32. Să se scrie mulţimea numerelor naturale mai mici decît numărul natural 5.

33. Se dă mulţimea:

$$A = \{x \in N \mid 1 \leqslant x \leqslant 8\}.$$

Să se scrie mulţimea A, enumerînd elementele din care este alcătuită.

34. Se dă mulţimea: $A = \{x \in N \mid 1 < x < 8\}$. Să se scrie mulţimea A enumerînd elementele din care este alcătuită.

35. Se dau mulţimile:
$A = \{x \in N \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$; $B = \{x \in N \mid 1 < x \leqslant 5\}$.
Să se scrie aceste mulţimi enumerînd elementele din care sînt alcătuite.

36. Se dau mulţimile:
$A = \{x \in N \mid 1 < x < 5\}$;
$B = \{x \in N \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$.
Care din următoarele propoziţii sînt adevărate:

1) $A \subset B$;
2) $B \subset A$;
3) $A = B$.

37. Se dă mulţimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Să se scrie o submulţime X a lui A, formată din numere pare şi o submulţime Y, formată din numere impare.

38. Să se determine mulţimea:

$$A = \{x \in N \mid x = 3n;\ n = 1, 2, 3, 4\}.$$

39. Să se determine mulţimea:

$$A = \{x \in N \mid x = 3n - 1,\ n = 1, 2, 3\}.$$

40. Se dau mulţimile:
$A = \{x \in N \mid x = 2n;\ n = 1, 2, 3, 4\}$
$B = \{x \in N \mid x = 2n + 1;\ n = 1, 2, 3, 4\}$.

Să se scrie aceste mulţimi enumerînd elementele din care sînt alcătuite.
Să se arate care din următoarele afirmaţii sînt adevărate şi care sînt false:

a) $A \subset B$; b) $B \supset A$; c) A şi B nu au elemente comune.

41. Se dau mulţimile:
$A = \{x \in N \mid x = n + 2;\ n = 1, 2, 3, 4, 5\}$;
$B = \{x \in N \mid x = n + 3;\ n = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Să se arate care din următoarele afirmaţii sînt adevărate:

$$a)\ A \subset B;\ b)\ A = B;\ c)\ B \subset A.$$

42. Se dau mulţimile :

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{4, 5, 6, 7, 8\}, \quad C = \{2, 3\}.$$

Să se scrie aceste mulţimi indicînd o proprietate caracteristică a elementelor lor.

43. Se dau mulţimile :

$$A = \{3, 5, 7, 9, 11\}, \quad B = \{4, 7, 10, 13\}.$$

Să se scrie mulţimile A şi B indicînd o proprietate caracteristică a elementelor lor.

44. Se dă mulţimea :

$$A = \{x \mid x = 3n + 2 ;\ n = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Să se arate care din următoarele afirmaţii sînt adevărate şi care sînt false :

a) $17 \in A$; *b*) $26 \in A$; *c*) $44 \in A$.

45. Se dau mulţimile :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Să se afle $A \cup B$.

46. Se dau mulţimile :
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
$B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.
Să se afle $A \cap B$.

47. În figura 1.50 sînt reprezentate cu ajutorul diagramelor Venn mulţimile A, B şi C.

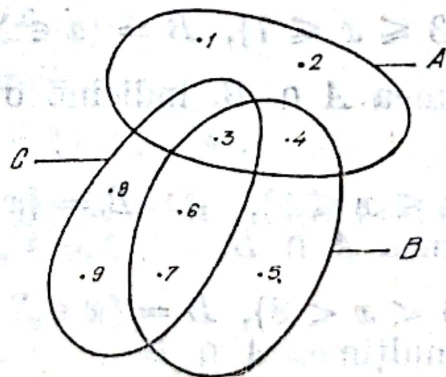


Fig. 1.50

Să se afle :

$A \cap B$; $A \cap C$; $B \cap C$;
$A \cup B$; $A \cup C$; $B \cup C$;
$A \cap (B \cap C)$; $(A \cup B) \cup C$.

48. Se dau mulţimile:
$A = \{0, 1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3, 4, 5\}$; $C = \{0, 3, 6\}$.
Să se determine mulţimile:
$M = A \cup (B \cap C)$; $N = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

49. Se dau mulţimile:

$$A = \{x \in N \mid 1 \leqslant x \leqslant 4\}; \; B = \{5; 6\}.$$

Să se scrie mulţimea $A \cup B$, indicînd o proprietate caracteristică a elementelor sale.

50. Să se verifice cu ajutorul diagramelor Venn proprietatea de asociativitate a reuniunii mulţimilor (fig. 1.51):

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$

51. Să se verifice cu ajutorul diagramelor Venn proprietatea de asociativitate a intersecţiei (fig. 1.52).

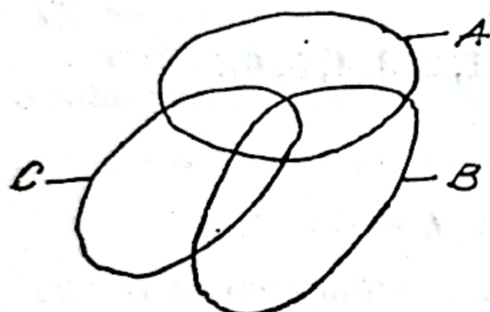


Fig. 1.51

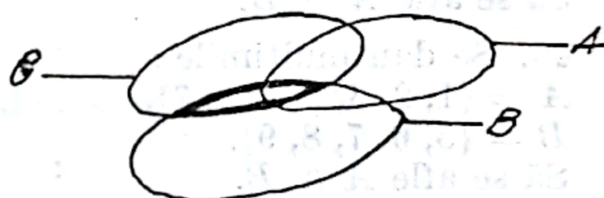


Fig. 1.52

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

52. $A = \{x \in N \mid 3 \leqslant x \leqslant 7\}$, $B = \{x \in N \mid 5 \leqslant x \leqslant 10\}$.

Să se scrie mulţimea $A \cap B$, indicînd o proprietate caracteristică a elementelor.

53. $A = \{x \in N \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{x \in N \mid 5 \leqslant x \leqslant 7\}$.
Să se scrie mulţimea $A \cap B$.

54. $A = \{x \in N \mid 6 < x < 8\}$, $B = \{x \in N \mid 8 < x < 10\}$.
Să se determine mulţimea $A \cap B$.

55. $A = \{x \in N \mid 3 < x < 5\}$, $B = \{x \in N \mid 5 < x < 7\}$.
Să se scrie mulţimea $A \cup B$.

56. $A = \{x \in N \mid 5 \leqslant x < 7\}$, $B = \{x \in N \mid 7 \leqslant x < 9\}$.
Să se determine mulţimea $A \cup B$.



57. $A = \{x \in N \mid 5 \leqslant x\}$, $B = \{x \in N \mid x \leqslant 7\}$.

Să se afle mulţimea $A \cap B$. Să se scrie mulţimea $A \cup B$, indicînd o proprietate caracteristică a elementelor sale.

58. $A = \{x \in N \mid 3 < x < 5\}$, $B = \{x \in N \mid 5 < x < 9\}$.

Să se scrie mulţimea $A \cup B$ ca o diferenţă de mulţimi.

59. Se dau mulţimile:

$A = \{x \in N \mid 3 < x\}$ $B = \{x \in N \mid x \leqslant 7\}$.
Să se determine mulţimea $A \cup B$.

60. Se dau mulţimile:

$P = \{x \in N \mid x$ număr par$\}$;
$Q = \{x \in N \mid x$ număr fără soţ$\}$.
Să se determine mulţimile:

$P \cup Q$ şi $P \cap Q$.

61. Se dau mulţimile:

$$A = \{x \in N \mid x > 5\};\ B = \{x \in N \mid x \geqslant 3\}.$$

Să se scrie mulţimile: $A \cup B$; $A \cap B$ indicînd o proprietate caracteristică a elementelor lor.

62. Se dau mulţimile:

$A = \{a; 1; 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 4\}$.

Să se determine a astfel încît să avem egalitatea:

$A \cup B = \{x \in N \mid x \leqslant 4\}$.

63. Se dau mulţimile:

$A = \{x, y, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Să se determine x şi y astfel încît să avem egalitatea:
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

64. Fie mulţimile:

$A = \{a, 1, 2\}$, $B = \{2, 3, a\}$.

Să se determine a astfel încît să avem egalitatea

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

65. Se dau mulţimile:

$A = \{x \in N \mid 1 \leqslant x \leqslant a\}$, $B = \{x \in N \mid a \leqslant x \leqslant 6\}$.

Să se determine a astfel încît să fie satisfăcută egalitatea $A \cap B = \{4\}$.

Să se scrie apoi $A \cup B$ indicînd o proprietate caracteristică a elementelor.

66. Se dau mulţimile:

$A \cap B = \{3\}, \quad A \cap C = \{7\}.$

Să se determine mulţimea: $A \cup (B \cap C)$.

67. Fie mulţimile:

$A \cup B = \{x \in N | 1 \leqslant x \leqslant 4\}, \; A \cup C = \{x \in N | 1 \leqslant x \leqslant 5\}.$

Să se determine mulţimea: $A \cup (B \cap C)$.

68. Fie mulţimile:

$A = \{1, 2, 3,\}, \; B = \{2, 4, 5\}.$

Cu ajutorul diagramelor Venn (fig. 1.53) să se arate că:

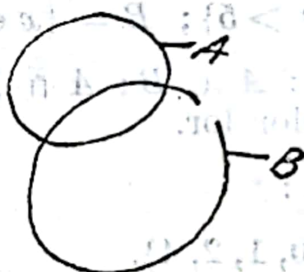


Fig. 1.53

$$A \subset A \cup B, \quad A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B.$$

69. Să se arate că dacă: $\{a\} \cap C = \{a\}$, atunci avem relaţia: $a \in C$.

70. Se consideră mulţimea:

$A = \{x \in N | 3 \leqslant x \leqslant 7\} \setminus \{4\}$
$B = \{x \in N | 4 \leqslant x \leqslant 8\} \setminus \{5\}.$

Să se determine mulţimile: $A \cap B$ şi $A \cup B$.

71. Să se determine mulţimea X cunoscînd că ea satisface simultan condiţiile:

$X \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4, 5\};$
$X \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2\}.$

72. Să se determine mulţimea $X \subset \{1, 5, 6, 2\}$, cunoscînd că: $X \cap \{1, 5, 6, 2\} = \{1, 2\}$.

73. Se dau mulţimile:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$.
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Să se determine mulţimile: $C_E A$ şi $C_E B$.

74. Se dau mulţimile;

$A = \{x \in N | x \leqslant 8\}$, $B = \{x \in N | 2 \leqslant x \leqslant 8\}$,
$E = \{x \in N | x \leqslant 10\}$.

Să se determine $C_E A$ şi $C_E B$

75. Se consideră mulţimile:

$E = \{1, a, c, d\}$, $F = \{b, d, 2, c, 7\}$, $G = \{b, x, a, d\}$.

Să se determine mulţimile: $E \cup F$; $E \cup G$; $F \cup G$; $E \cap (F \cup G)$; $F \cap G$; $C_E(E \cap G)$.

76. A — este mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul R a d u.
B — este mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul d a u. Să se afle $C_A B$.

77. A — este mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul c a r t e. B — este mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul a r t e. Să se arate că mulţimea $C_A B$ are un singur element.

78. X — este mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul a r b o r e;
Y — este mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul a e r;
Z — este mulţimea literelor din care este alcătuit cuvîntul b o b,
Să se verifice egalitatea: $C_X Y = Z$; $C_X Z = Y$.

79. Se dă mulţimea:

$A = \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

Să se scrie şi în alt mod mulţimea A indicînd o proprietate.

80. În mulţimea E a persoanelor adulte se notează cu: A, mulţimea bărbaţilor; B, mulţimea femeilor; C, mulţimea persoanelor care poartă ochelari; D, mulţimea persoanelor care poartă pălărie.
Enumeraţi cîte o proprietate caracteristică a mulţimilor;

$$A \cap B, C \cap D, C_E A, C_E B, C_E D.$$

81. e : $E = \{x \in N,\ x \leqslant 8\}$
$B = \{x \in N,\ 0 \leqslant x \leqslant 6\}$
$C = \{x \in N,\ 3 \leqslant x \leqslant 7\}$
$A = \{x \in N,\ 5 \leqslant x \leqslant 8\}$.

a) Să se determine : $C_E B$, $C_E C$, $C_E(A \cup C)$, $C_E A$, $C_E C$.
b) Să se verifice relaţia :

$$C_E(A \cup C) = C_E A \cap C_E C.$$

82. Folosind relaţia din problema precedentă (punct b) să se determine $C_E(A \cup B)$, dacă se dau mulţimile :

$$C_E A = \{1, 2, 3, 4\},\ C_E B = \{1, 2, 3, 5\}.$$

83 *a*) Se consideră mulţimea : $E = \{a, b, c, d, e\}$ şi submulţimile :
$C_E A = \{a, b, c\}$, $C_E\ B = \{b, c, d\}$. Să se determine în două moduri mulţimile : $A \cup B$ şi $A \cap B$.

84. Să se determine mulţimea :

$$A = \left\{x \in N \mid \frac{4x^2 + 6x + 8}{2x + 3} \in N\right\}.$$

85. Să se determine mulţimea :

$$A = \left\{x \in N \mid -1 < \frac{x-5}{2} < +2\right\}.$$

86. Să se determine mulţimea :

$$A = \{x \in N \mid (x - 1) + (3x + 2) - 2x = 5\}.$$

87. Să se determine mulţimile A şi B ştiind că sînt îndeplinite condiţiile :

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
$A \cap B = \{1, 2\}$;
$A - B = \{5\}$.

88. Să se determine elementele mulţimii :

$$A = \left\{x \in N \mid x = \frac{2u + 1}{2u - 3};\ u \in N\right\}.$$

89. Să notăm :

A — mulţimea divizorilor unui număr a ;
B — mulţimea divizorilor unui număr b.
Se ştie că :

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$;
$A \cap B = \{1, 2, 4, 5\}$;
$A - B = \{7, 3\}$.

Folosind diagramele Venn, să se determine a şi b.

90. Se consideră mulţimile :

$$A = \{x \in N\,;\, x \leqslant 10\};$$

$$B = \left\{\frac{\sqrt{63} - \sqrt{45}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}, \frac{\sqrt{125} + \sqrt{75}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}\right\};$$

$$C = \left\{\frac{\sqrt{12} + \sqrt{80}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}, \frac{\sqrt{15} - \sqrt{125}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}\right\}.$$

Să se arate care din următoarele propoziţii sînt adevărate : $p_1 : A \subset B$; $p_2 : A = B$; $p_3 : B \subset A$; $p_4 : C \subset A$; $p_5 : C \cup B \subset A$.

Cardinalul mulţimii

91. Fiind date mulţimile :

$A = \{□, △, ?\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{0\}$.

Să se calculeze card A, card B, card C.

92. Se dau mulţimile :

$A = \{a, b, c, d, e\}$,
$B = \{c, d, e, f, g\}$.

Să se afle : card $(A \setminus B)$; card $(B \setminus A)$.

93. Care este numărul de elemente ale mulţimii :
$A = \{x \in N \mid 0 \leqslant x \leqslant 100\}$.

94. Să se afle cardinalul mulţimilor :

$A = \{x \in N \mid 3 \leqslant x \leqslant 33\}$,
$B = \{x \in N \mid 1 \leqslant x \leqslant 81\}$.

95. Mulţimea A are 43 elemente, mulţimea B are 20 elemente, iar mulţimea $A \cup B$ are 63 elemente. Sînt disjuncte aceste mulţimi?

96. Mulţimea A are 14 elemente, mulţimea B are 16 elemente, iar mulţimea $A \cup B$ are 20 elemente. Sînt disjuncte mulţimile A şi B?

Să se calculeze numărul de elemente al mulţimii $A \cap B$.

97. Se dă mulţimea $A = \{1; 2; 3\}$. Să se scrie mulţimea numerelor cuprinse între 100 şi 300 formate cu elemente ale mulţimii A luate ca cifre.

98. În figura 1.54 sînt reprezentate prin diagramele Venn mulţimile A şi B.

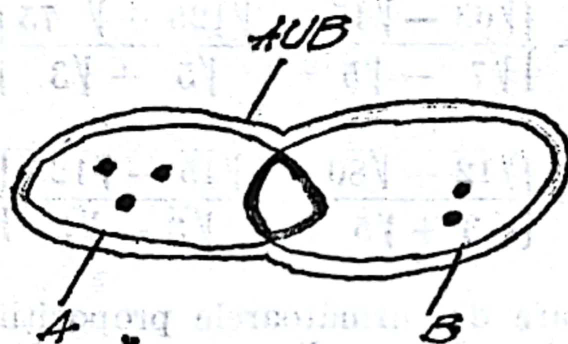


Fig. 1.54

Să se afle:
card A; card B; card $(A \cup B)$. Să se verifice relaţia: card $(A \cup B) =$ card $A +$ card B.

99. Cu ajutorul diagramelor Venn desenate în fig. 1.55. să se



Fig. 1.55

afle: card A, card B, card $(A \setminus B)$, card $(A \cap B)$.

Să se verifice relaţia: card $(A \cup B) =$ card$A +$ card $B -$ $-$ card $(A \cap B)$.

100. În fig. 1.56 sînt reprezentate cu ajutorul diagramelor Venn mulţimile A şi B. Să se calculeze: card A; card B; card $A \cup B$; card $(A \setminus B)$.

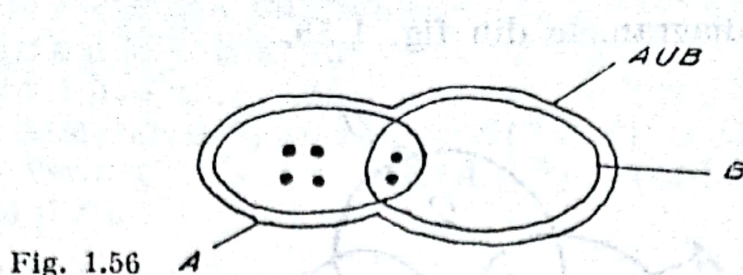


Fig. 1.56

Să se verifice apoi formula :

$$\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\,A + \text{card}\,B - \text{card}\,(A \cap B).$$

101. În figura 1.57 se indică diagrama unor mulţimi şi numărul elementelor scrise în fiecare mulţime.

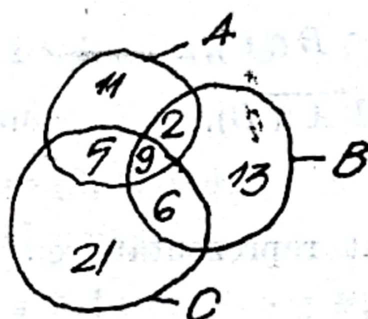


Fig. 1.57

Să se afle :

card A, card$B$, card $(\overline{A \cup B \cup C})$,
card$(A \cap B)$, card $(A \cap B \cap C)$,
card $\bar{A}$, card $\bar{B}$, card $\bar{C}$,

102. Se dau diagramele din fig. 158.

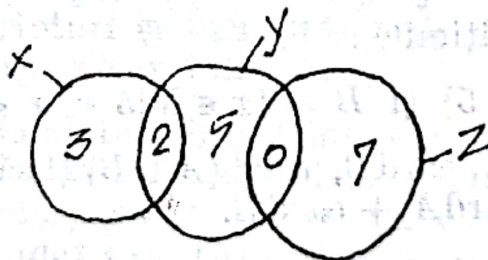


Fig. 1.58

Să se afle :

card X, card Y, card Z,
card $(X \cup Y \cup Z)$
card $\bar{X}$, card $\bar{Y}$, card $\bar{Z}$,
card $(Y \cap Z)$, card $(X \cap Y)$.

103. Se dau diagramele din fig. 1.59.

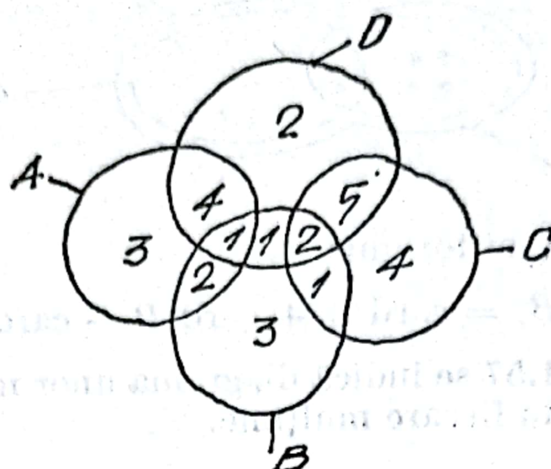


Fig. 1.59

Să se afle: card $(A \cap B \cap C)$,

card$(B \cap C \cap D)$, card$\overline{(A \cap B)}$,

card $(A \cup B \cup C)$.

104. În fig. 1.60 sînt reprezentate cu ajutorul diagramelor

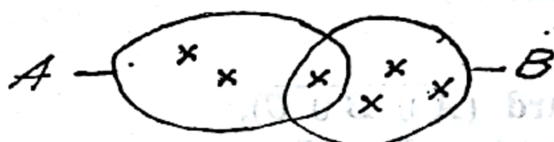


Fig. 1.60

Venn mulţimile A şi B. Să se afle: card A, card B, card$(A \setminus B)$, card $(A \cap B)$.

Săse verifice apoi relaţia: card $(A \setminus B)$ = card A — card$(A \cup B)$.

105. Se dau mulţimile:

$A = \{x \in N | x < 5\}$ şi $B = \{x \in N | 5 < x < 10\}$.

Să se afle: card$A$, card$B$, card $(A \cup B)$ şi să se verifice relaţia: card$(A \cup B)$ = card$A$ + card$B$.

106. Se dau mulţimile:

$A = \{x \in N | x < 10\}$,

$B = \{x \in N | 10 < x < 15\}$.

Se poate spune, fără a determina mulţimea $A \cup B$, că egalitatea: card $(A \cup B)$ = card A + card B este adevărată? De ce?

107. Se consideră mulţimile:
$A = \{x \in N | 3 \leqslant x \leqslant 10\}$,
$B = \{x \in N | 5 \leqslant x \leqslant 15\}$.
Să se afle: card A, card B, card $(A \cap B)$, card $(A \cup B)$.
Să se verifice relaţia: card $(A \cup B)$ = card A + card B — card $(A \cap B)$.

108. Se dă mulţimea:

$$M = \{x \in N | x = 2n + 1,\ n = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Să se determine mulţimile:
$A = \{x \in M | x \leqslant 3\}$,
$B = \{x \in M | x \leqslant 10\}$.

109. Se dă card $A = 18$, card $B = 24$, card $(A \cup B) = 36$.
Să se afle:
card $(A \cap B)$, card $(A \setminus B)$, card $(B \setminus A)$.

110. Se dau mulţimile:

$$A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{3, 4, 5, 6\}.$$

Să se determine mulţimile:

$C = \{(x; y) | x \in A;\ y \in A;\ 2x + y \in B\}$,
$D = \{(x; y) | x \in A;\ y \in A;\ x + y \in B\}$,
$S = \{(x; y) | x \in A;\ y \in A;\ x + y \in B$ şi $2x - y \in B\}$.

Să se afle:

card C, card D, card $(C \cap D)$, card $(C \cup D)$, card S.

111. Mai mulţi pionieri au luat masa de seară la cantină. S-au servit 35 fripturi şi 40 prăjituri. Cunoscînd că 10 pionieri au mîncat fiecare cîte o friptură şi cîte o prăjitură şi că 5 pionieri nu au mîncat nici fripturi şi nici prăjituri, să se afle numărul pionierilor care au fost la cantină.

112. Mai mulţi pionieri au intrat într-o cofetărie şi au comandat: 20 prăjituri, 10 sticle cico-cola şi 14 sticle pepsi-cola. Să se afle numărul pionierilor, ştiind că toţi au comandat, dar că 5 dintre ei nu au comandat prăjitură ci au băut cico-cola, iar 6 au băut pepsi-cola (evident, niciun pionier nu a băut şi pepsi-cola şi cico-cola ci numai un fel de băutură).

113. Într-o tabără sînt 172 pionieri, care au participat la trei concursuri: şah, desen şi atletism. Se ştie că fiecare pionier a participat la cel puţin un concurs, dar avînd posibilitatea să parti-

cipe la toate trei; 84 pionieri au luat parte numai la cîte un concurs dintre care 23 numai la şah, 19 numai la desen, 21 pionieri au participat la toate concursurile; 110 au concurat la atletism din care 41 şi la cel de şah.

Se cere:

a) numărul de participanţi la atletism;
b) numărul de participanţi la şah;
c) numărul celor care au participat la şah sau desen;
d) numărul participanţilor şi la şah şi la desen;

Indicaţie

În interiorul diagramelor se scrie numărul de elemente al fiecărei mulţimi (fig. 1.61).

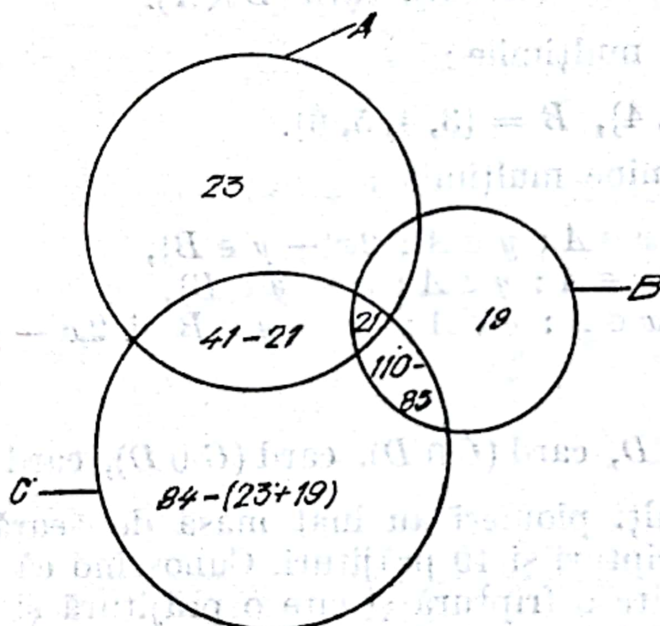


Fig. 1.61

114. Elevii unei şcoli au organizat mai multe acţiuni:
Strîngerea plantelor medicinale, la care au participat 43 elevi, îngrijirea grădinii pomicole a şcolii, la care au participat 38 elevi, amenajarea bazei sportive, la care au participat 45 elevi.

Cunoscînd că 10 elevi au luat parte la toate acţiunile, 20 elevi au participat la strîngerea plantelor medicinale şi la îngrijirea grădinii, 15 elevi au participat şi la îngrijirea grădinii şi la amenajarea bazei sportive şi 18 au luat parte la strîngerea plantelor şi amenajarea bazei sportive, să se afle numărul pionierilor care au luat parte la fiecare activitate.

115. Fiind date mulţimile:

$A = \{x \in N | x = 2n + 1; n = 1, 2, 3, 4, 5\}$
$B = \{x \in N | x = 2n - 1; n = 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Să se scrie mulţimea $A \cap B$, indicîndu-se o proprietate caracteristică a elementelor ei.

116. Se dă mulţimea:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Să se scrie toate submulţimile X ale lui A care verifică relaţia: $\{1, 2\} \subset X$ şi apoi să se afle numărul de elemente al acestor submulţimi.

117. Să se determine mulţimile A şi B care satisfac relaţiile:

$A \setminus B = \{1, 2\}$, $\quad A \cap B = \{3; 4\}$,
$B \setminus A = \{5, 6\}$, $\quad A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Să se afle: card $(A \cup B)$; card $(A \cap B)$.

118. Dacă A, B şi C sînt trei mulţimi date, exprimaţi fiecare porţiune haşurată cu ajutorul operaţiilor $\cup$, $\cap$, $-$. (fig. 1.62).

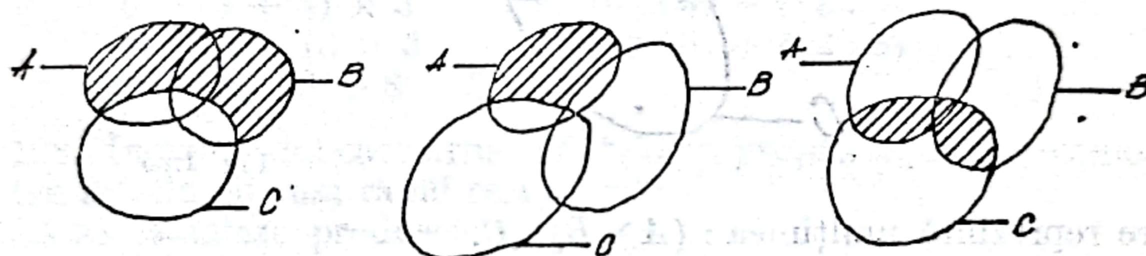


Fig. 1.62

119. Să se arate cu ajutorul diagramelor Venn că dacă

$A \subset B$, atunci: $C_B A = B \setminus A$.

120. Să se exprime cu ajutorul operaţiilor $\cup$, $\cap$, C, porţiunile haşurate din diagramele desenate în figurile 1.63 şi 1.64.

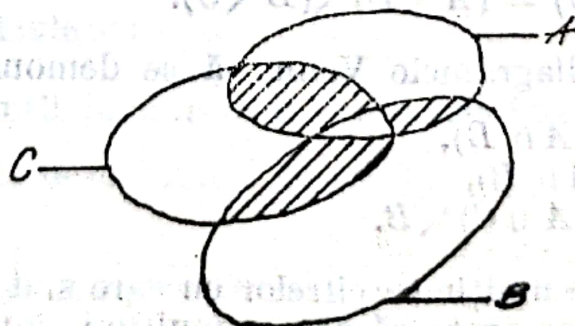


Fig. 1.63

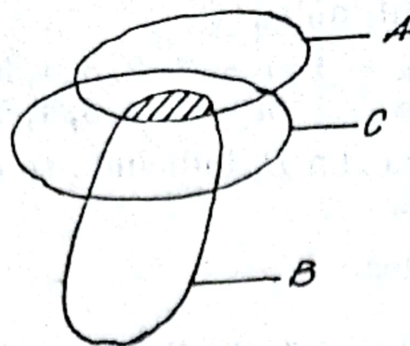


Fig. 1.64

121. În diagrama desenată în fig. 1.65 să se haşureze porţiunea

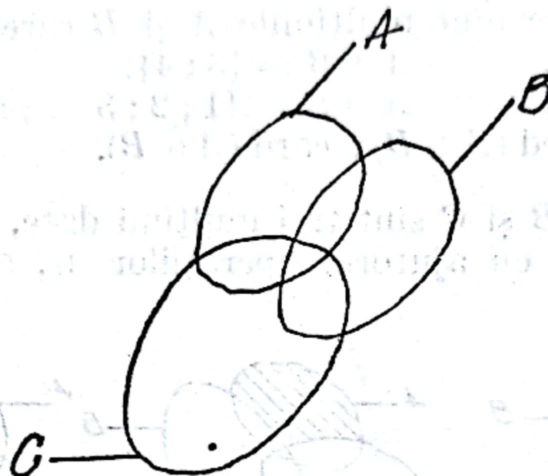


Fig. 1.65

care reprezintă mulţimea : $(A \setminus B) \setminus C$.

122. Cu ajutorul diagramelor Venn, să se verifice dacă este adevărată egalitatea :

$(B \cap A) \cup (B \cap C) = B \setminus (A \setminus C)$, oricare ar fi mulţimile A, B, C.

123. Să se verifice, cu ajutorul diagramelor Venn, dacă sînt adevărate egalităţile :

$(A \cap B) \setminus (B \setminus C) = (B \cap A) \cap (A \cap C)$,
$(A \cap B) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \setminus (B \setminus C)$.

124. Folosind diagramele Venn, să se demonstreze relaţiile :

$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$,
$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$,
$(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$.

125. Să se scrie mulţimea cifrelor cu care sînt scrise numerele 11 413 şi 431. Să se arate că aceste mulţimi sînt egale.

126. Se dă mulţimea $A = \{4, 0, 3\}$. Să se scrie, indicînd o proprietate caracteristică, mulţimea tuturor numerelor cuprinse între cel mai mic şi cel mai mare număr natural de trei cifre, scrise cu ajutorul elementelor mulţimii A, luate ca cifre.

Operaţii cu numere naturale

127. În exerciţiul care urmează, marcaţi printr-un cerculeţ una din literele A, B, C, D sau E, care corespunde răspunsului corect :

$85 + 27 =$	$58 + 87 =$
A. $80 + 20 + 5 + 7$	A. $58 + 2 + 80 + 7$
B. $85 + 25 + 7$	B. $58 + 80 + 2 + 5$
C. $85 + 5 + 7$	C. $50 + 87 + 8 + 2$
D. $80 + 25 + 5 + 7$	D. $58 + 80 + 0 - 2$

$78 \times 3 =$	$72 : 6 =$
A. $(70 \times 8) + 3$	A. $(60 : 4) + (12 : 2)$
B. $(70 \times 3) + 8$	B. $(72 : 3) : 3$
C. $(70 + 8) \times 3$	C. $(60 : 6) - (12 : 6)$
D. $70 + (8 \times 3)$	D. $(60 : 6) + (12 : 6)$
E. $70 \times 3 + 8 \times 3$	

128. În exerciţiul care urmează, folosiţi proprietăţile operaţiilor pentru a afla cît mai rapid rezultatul.

Să se calculeze produsele :

803×49, 546×480, 2109×5040.

129. Să se calculeze cîturile :

$197 \times 500 : 50$; $437 \times 500 : 500$;

$14\,200 : 25$; $3\,500 : 125$.

130. Să se calculeze rapid produsele :

a) $(17 \cdot 25) \cdot 4 =$

b) $16 \cdot 21 \cdot 625 \cdot 3 =$

131. Să se calculeze :

$3100 : 25$.

Socotiţi mai întîi în minte şi apoi scrieţi rezultatul.

132. Să se calculeze mintal suma :

$462 + 56 =$

133. Să se găsească procedeul cel mai simplu de calcul :

a) $74 \cdot 2 + 26 \cdot 2 =$

b) $(124 \cdot 5) + (136 \cdot 5) =$
c) $(273 \cdot 8) + (427 \cdot 8) =$

134. Folosind proprietățile operațiilor să se calculeze sumele și diferențele următoare:

a) $146 - 134 + 137$
b) $235 + 47 + 7 + 265 + 3$
c) $(1337 + 488) + 663$
d) $1\,199 + 406$
e) $(357 + 476) - 257$
f) $(826 - 438) - 126$

135. Să se aplice proprietățile și apoi să se calculeze:

$19600 : 25 : 98$, $5 \cdot 200 : (13 \cdot 25)$,
$14 \cdot 400 : (15 \cdot 16 \cdot 12)$.

136. Să se calculeze, în modul cel mai simplu, următoarele: $(75 \cdot 224 \cdot 10) : 25$, $(343 \cdot 300 \cdot 27) : 100$.

137. Să se afle produsul sumei numerelor a și b cu numărul c, dacă:

a) $a = 14$, $b = 6$, $c = 30$;
b) $a = 15$, $b = 10$, $c = 8$.

138. Să se afle produsul diferenței numerelor x și y cu numărul a, dacă:

a) $x = 25$, $y = 10$, $a = 4$;
b) $x = 1044$, $y = 44$, $a = 15$.

139. Să se afle produsul sumei numerelor a și b cu diferența acestor numere, dacă:

a) $a = 14$, $b = 4$;
b) $a = 125$, $b = 25$.

140. Să se aplice proprietățile operațiilor pentru a calcula diferențele:

a) $4291 - (2191 - 1015)$;
b) $6247 - (3227 - 2070)$.

141. Să se calculeze: $(4051 - 2145) - 1051$.

142. Să se scadă din numărul 7273 suma numerelor 1173 și 396:

$7273 - (1173 + 396)$.

143. Să se calculeze:

$E = (210 \cdot 3 + 180 \cdot 2) : (21 \cdot 3 + 18 \cdot 2)$

Socotiţi mai întîi în minte şi apoi scrieţi rezultatul.

Indicaţie: Se va observa că: $210 \cdot 3 + 180 \cdot 2 = (21 \cdot 3 + 18 \cdot 2) \cdot 10$.

144. Să se calculeze în modul cel mai simplu cîtul:

$E = (216 \cdot 57 + 184 \cdot 25) : (27 \cdot 57 + 23 \cdot 25)$

145. Să se afle numerele naturale a, b şi c, dacă:

$ab = 60$, $ac = 90$; $b + c = 10$.

146. Să se afle numerele naturale x, y şi z, cunoscînd că:

$2xy = 300$, $2xz = 100$, $y - z = 10$.

147. Să se afle numerele naturale m, n, p şi q, dacă:

$mn = 40$, $mp = 60$, $mq = 30$, $n + p - q = 7$.

Ecuaţii şi inecuaţii în N

148. Să se rezolve ecuaţiile:

$x + 1347 = 2477$;

$1300 + x = 1800$.

149. Să se rezolve ecuaţiile: $x - 3050 = 1000$; $z + 187 = 397$; $343 - t = 300$.

150. Să se determine mulţimea valorilor x care satisfac inegalităţile:

$x + 5 < 28$; $x - 5 < 25$.

151. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $4x = 60$, $3a = 90$, $5x = 125$;

b) $x : 4 = 5$, $x : 7 = 7$, $18 : x = 3$.

152. Să se rezolve ecuaţiile:

$4x + 5 = 13$; $13 - 4x = 5$;

$8 + x - 5 = 10$; $10 + 2x - 3 = 9$.

153. Să se rezolve ecuaţiile:

$400 - (x + 300 - 10) = 10$;

$(1000 - 862) - 277 + (4280 - x) = 0$

154. Să se afle valoarea necunoscută x care verifică ecuaţiile:

$2x - 318 = x$;

$x + 315 = 2x + 208$;

$506 - x = 873 - 2x$.

155. Să se determine mulţimea A:
$A = \{x \in N | 2x - 1 < 9\}$

156. Să se rezolve ecuaţiile:
$501(x - 594) = 164 - 289$;
$\{[(8x - 98) : 2\,56] \cdot 36 - 268\} : 500 = 4$;
$348 - [220 - (2x - 277) + 31] : 2 = 295$;
$400 - [300 - (4x + 100) + 120] = 15000$;
$[(5x + 1) \cdot 8\,15 + 90] : 45 = 63$
$200 - 18 : (372 : 3x - 1) - 28 = 166$

157. Să se determine numărul natural x cunoscînd că numărul $x + 4$ este succesorul numărului 14.

158. Se dă numărul natural $x + 2$.
Să se scrie trei numere naturale care sînt succesive lui.

159. Să se determine numărul natural $x \in \{1, 2, 6, 9\}$, care satisface ecuaţia: $x + x + 5 = 9$.

160. Să se scrie mulţimea tuturor numerelor de forma $x + 4$, dacă $x \in \{1, 4, 8, 16\}$.

Probleme rezolvate cu ajutorul ecuaţiilor în N

161. Numărul x se înmulţeşte cu 4 şi se obţine numărul 60. Să se afle numărul x.

162. La ce număr trebuie să-l împărţim pe 75, pentru a obţine numărul 25?

163. Dacă scădem din numărul 14 306 un număr x se obţine numărul 10 306.
Să se afle x.

164. Dacă mărim de trei ori un număr şi la rezultat adăugăm numărul 15, se obţine numărul 54.
Să se afle numărul.

165. Dacă împărţim 45 la un număr necunoscut şi adăugăm la rezultat 25 obţinem numărul 40, să se afle numărul necunoscut.

166. Vîrsta tatălui este de două ori mai mare decît vîrsta fiului. Amîndoi au împreună vîrsta de 60 ani.
Ce vîrstă are fiecare?

167. O mamă este mai în vîrstă decît fiul ei cu 20 ani. Amîndoi au împreună 40 de ani.
Ce vîrstă are fiecare?

Capitolul 2

BAZE DE NUMERAȚIE

2.1. SISTEME DE NUMERAȚIE

Numărul este o noțiune abstractă. Cifra este semnul grafic sau simbolul numărului. Simbolurile folosite pentru a reprezenta numerele au fost diferite în antichitate de la un popor la altul. Mai multe popoare au folosit liniile pentru a reprezenta numerele (fig. 2.1).



Fig. 2.1

Egiptenii au folosit procedeul grupării acestor linii pentru a recunoaște numerele de la 1 la 9 (fig. 2.2).



Fig. 2.2

Pentru notația grupării de 10 elemente, egiptenii au folosit simbolul ∩, babilonienii au folosit simbolul <, iar romanii au folosit simbolul X.

În sistemul nostru de scriere, numit zecimal, un număr natural se scrie cu ajutorul a zece cifre. Acestea sînt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ele sînt semnele grafice sau simbolurile primelor zece numere naturale. Orice număr natural se scrie cu ajutorul unor combinații de cifre după reguli bine stabilite. Sistemul zecimal folosește procedeul formării de grupe (submulțimi) avînd fiecare cîte zece elemente. Zece grupe de un ordin inferior formează o unitate de ordin superior.

6— c. 1782

Putem însă grupa elementele unei mulţimi şi în alte moduri. De exemplu, în figura 2.3 26 de cerculeţe pot fi grupate în trei moduri diferite.

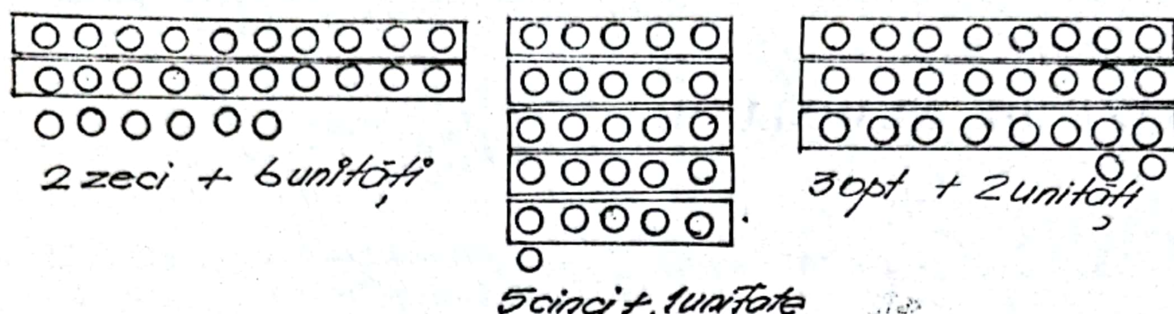


Fig. 2.3

Numărarea elementelor se poate face în mai multe moduri, care au dat naştere la diferite *sisteme de numeraţie.*

Pentru a număra elementele unei mulţimi, se formează submulţimi finite disjuncte (fără elemente comune) ale unei mulţimi date, submulţimi care au acelaşi număr de elemente, ultima dintre acestea putînd avea un număr mai mic de elemente decît celelalte.

Numărul de elemente al submulţimilor echipotente care s-au format prin gruparea elementelor unei mulţimi date se numeşte baza sistemului de numeraţie.

În funcţie de numărul de elemente pe care le conţin aceste submulţimi, sistemele de numeraţie au primit diferite denumiri: zecimal, binar etc. sau, cum se mai spune: cu baza zece, cu baza doi etc.

Aşa, de exemplu, sistemul de numeraţie cu baza cinci are ca punct de plecare formarea de submulţimi disjuncte avînd acelaşi număr de elemente cu mulţimea degetelor de la o mînă.

Sistemul binar (cu baza doi), care se foloseşte la codificarea informaţiilor pentru maşinile de calcul, se bazează pe formarea de submulţimi cu cîte două elemente.

Numărul de elemente al unei astfel de submulţimi indică şi numărul de cifre care se folosesc în cazul fiecărui sistem de numeraţie. După cum ştim, în sistemul zecimal se folosesc cele zece cifre arabe; în sistemul cu baza cinci se folosesc cinci cifre: 0, 1, 2, 3, 4, în sistemul cu baza doi se folosesc două cifre: 0 şi 1.

2.2. NUMERAŢIA ÎN BAZA 10

Dacă mulţimea are mai mult de zece elemente, pentru a număra elementele ei formăm mulţimi disjuncte de cîte zece elemente.

Exemplul 1

Să scriem în baza 10 numărul care arată cîte elemente are mulţimea A (fig. 2.4).

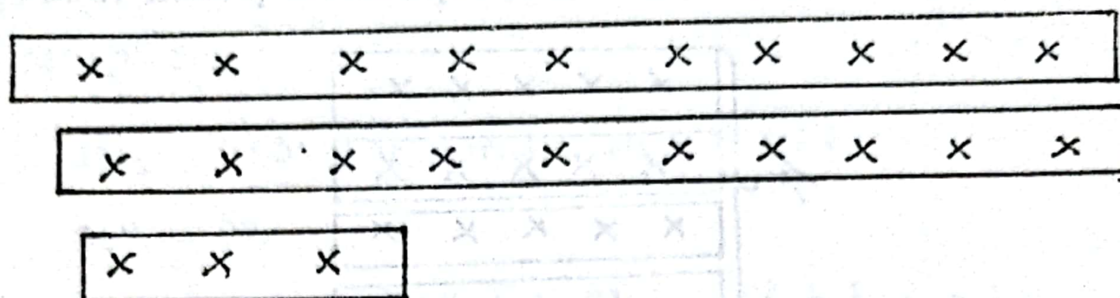


Fig. 2.4

Se observă că s-au format două submulţimi de cîte 10 elemente şi au mai rămas trei elemente.

2 zeci + 3 elemente

Sub cele două grupe cu 10 elemente sînt aşezate cele trei elemente care nu au putut fi grupate într-o nouă submulţime de 10 elemente.

Deasupra sînt aşezate submulţimile cu cîte 10 elemente. Astfel, numărul de elemente din mulţimea dată se scrie 23.

Cifra 3 ocupă primul loc din partea dreaptă, locul unităţilor, iar cifra 2 locul al doilea — de la dreapta spre stînga — al zecilor, sau locul zecilor.

Cifra 2, care ocupă primul loc în scrierea numărului, va arăta numărul de grupe (submulţimi), de cîte zece elemente fiecare, care s-au putut forma din mulţimea dată.

Cifra 3 ne arată numărul de elemente ale mulţimii A care au rămas negrupate.

2.3. NUMERAŢIA ÎN ALTE BAZE

Exemplul 2

Să scriem în sistemul cu baza cinci numărul care arată cîte elemente sînt în mulţimea A (fig. 2.5).

Vom proceda — ca şi în cazul sistemului zecimal — cu deosebirea că submulţimile disjuncte vor avea cîte cinci elemente.

Urmînd un procedeu asemănător, se formează patru submulţimi disjuncte, avînd fiecare cîte cinci elemente, şi mai rămîn trei elemente (care nu pot forma o grupă cu cinci elemente).

4 cinci + 3 unităţi

Prin convenţie numărul de elemente al mulţimii date se scrie : 43_5

Numărul 43_5 se poate scrie ca o sumă de produse dintre fiecare cifră a numărului cu o putere a lui 5, exponentul puterii fiind egal

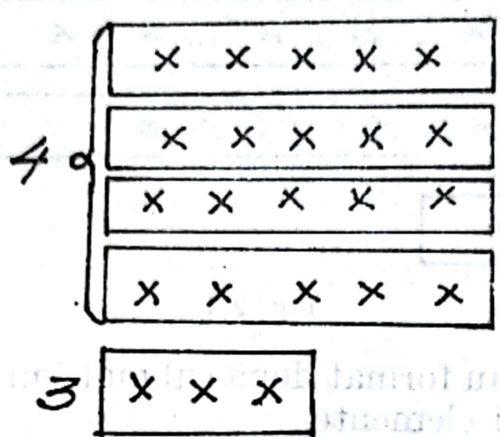


Fig. 2.5

cu numărul de ordine al locului ocupat de cifra respectivă în numărul dat, acest număr de ordine fiind socotit de la dreapta spre stînga :

$$43_5 = 4 \cdot 5 + 3 = 23$$

În sistemul zecimal de numeraţie vom scrie numerele ca o sumă de termeni putere ai numărului 10 şi folosind cifrele : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

De exemplu :

$$254 = (2 \times 10^2) + (3 \times 10^1) + (4 \times 10^0)$$

(Reamintim că $a^0 = 1$)

În baza 5 de numeraţie vom scrie numerele ca o sumă de termeni puteri ale numărului 5, folosind numai cifrele 0, 1, 2, 3, 4.

De exemplu :

$$44_5 = (4 \times 5^1) + (4 \times 5^0)$$

$$148_5 = (1 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (8 \times 5^0)$$

$$244_5 = (2 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (4 \times 5^0).$$

La fel vom scrie şi numerele :

$10\,326 = 10\,000 + 300 + 20 + 6$, sau ca o sumă de produse :

$10\,326 = 1 \cdot 10\,000 + 0 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6$ sau,

folosind puterile lui 10 :

$$10\,326 = 1 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6.$$

Se observă că fiecare cifră are o dublă semnificaţie: indică numărul submulţimilor şi poziţia pe care o ocupă de la dreapta spre stînga — fie în reprezentarea cu diagrame, fie în scrierea poziţională.

Alte exemple:

$$102_5 = 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 2 = 25 + 2 = 27,$$

$$102_5 = 27.$$

$$101\,111_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 =$$

$$= 32 + 0 + 8 + 4 + 2 + 1 = 47.$$

Deci, $101\,111_2 = 47$.

$$1\,232_7 = 1 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 2 = 343 + 98 + 21 + 2 =$$

$$= 464.$$

Notaţie

1) Dacă se cere să se scrie un număr de două cifre în sistemul zecimal, convenim ca cifrele lui să le notăm tot prin litere, dar numărul să fie scris astfel: $\overline{ab}$.

În această notaţie a este cifra zecilor, iar b este cifra unităţilor. Prin urmare:

$$\overline{ab} = a \cdot 10 + b = 10\,a + b.$$

Dacă se cere să scriem un număr de trei cifre în sistemul zecimal, vom scrie:

$$\overline{abc} = 100\,a + 10\,b + c.$$

2) Dacă se cere să scriem un număr de patru cifre, într-un sistem de numeraţie cu baza 4, convenim ca cifrele lui să le notăm tot prin litere şi numărul să fie scris în felul următor $\overline{abcd}_4$. Numărul poate fi scris ca o sumă de puteri ale numărului 4 astfel:

$$\overline{abcd}_4 = a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d.$$

2.4. TRANSFORMAREA BAZELOR

1. Transformarea unui număr, dat într-o bază oarecare, în sistemul de numerație cu baza 10.

Pentru a transforma un număr scris într-o bază oarecare într-un număr cu baza zece, se scrie numărul dat ca o sumă de produse dintre fiecare cifră a numărului dat și o putere a bazei date și se efectuează apoi operațiile de înmulțire și adunare în baza 10.

Exemplul 1

Să se scrie $3\,214_5$ în baza 10.

Soluție : $3\,214_5 = 3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 5^0 =$

$= (3 \times 125) + (2 \times 25) + (1 \times 5) + (4 \times 1) =$

$= 434.$

Exemplul 2

Alcătuiți o diagramă cu 18 obiecte. Scrieți numărul corespunzător în baza 5 și apoi în baza 8.

Soluție :

```
× × × × ×      × × × × × × × ×
× × × × ×      × × × × × × × ×
× × × × ×          × ×
  × × ×
   33₅               22₈
```

33_5 | 22_8

3 cinci + 3 unități | 2 opt + 2 unități

2. Scrierea unui număr cu baza de numerație zece ca un număr cu altă bază de numerație.

Să considerăm, de exemplu, numărul 339, pe care vrem să-l scriem în baza 5.

Dacă numărul va fi scris în baza 5, va trebui să cunoaștem diferitele puteri ale numărului 5 :

$$5^0 = 1 ;\ 5^1 = 5 ;\ 5^2 = 25 ;\ 5^3 = 125 ;\ 5^4 = 625 \ldots$$

Cea mai mare putere a numărului 5, care nu este mai mare decît numărul dat, este 5^3.

Această putere a lui 5, adică $5^3 = 125$, poate fi scăzută din numărul 339 de două ori şi rămîne rest 89, care este mai mic decît 125 :

$$\begin{array}{r} 339\ - \\ 125 \\ \hline 214\ - \\ 125 \\ \hline 89 \end{array} \qquad 2 \times 125 = 2 \cdot 5^3.$$

Prin urmare dintr-o mulţime de 339 obiecte putem forma două grupe a cîte $5^3 = 125$ obiecte.

Următoarea putere a lui 5 este $5^2 = 25$. Acest număr poate fi scăzut din 89 de trei ori şi rămîne 14 :

$$\begin{array}{r} 89\ - \\ 25 \\ \hline 64\ - \\ 25 \\ \hline 39\ - \\ 25 \\ \hline 14. \end{array} \qquad 3 \times 25 = 3 \cdot 5^2.$$

Prin urmare, din cele 89 de obiecte rămase, putem forma trei grupe de cîte $5^2 = 25$ obiecte.

Din cele 14 obiecte rămase putem forma două grupe a cîte 5 obiecte şi mai rămîn 4 obiecte :

$$\begin{array}{r} 14\ - \\ 5 \\ \hline 9\ - \\ 5 \\ \hline 4 \end{array} \qquad 2 \times 5 = 2 \cdot 5.$$

Numărul 339 se mai poate scrie :

$$\begin{aligned} 339 &= 2 \cdot 125 + 3 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 4 = \\ &= 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 5^0 = 2324_5. \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

Egalităţile (α) pot fi scrise astfel :

$$\begin{aligned} 339 &= 5 \cdot (2 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 2) + 4 \\ &= 5 \cdot 67 + \boxed{4} \\ 67 &= 2 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 2 \\ &= 5\,(2 \cdot 5 + 3) + 2 \\ &= 5 \cdot 13 + \boxed{2} \end{aligned}$$

$$13 = 2 \cdot 5 + \boxed{3}$$
$$2 = 0 \cdot 5 + \boxed{2}.$$

Procedeul schimbării bazei de numeraţie depinde deci de împărţirea succesivă la 5 a cîturilor parţiale, astfel :

$$\begin{aligned} 339 &= 67 \cdot 5 + 4 \quad &(c)\\ 67 &= 13 \cdot 5 + 2 \quad &(b)\\ 13 &= \ \ 2 \cdot 5 + 3 \quad &(a) \end{aligned}$$

Dacă substituim pe (a) în (b) şi apoi pe (b) în (c), obţinem :

$$\begin{aligned} 339 &= 67 \cdot 5 + 4\\ 67 &= (2 \cdot 5 + 3) \cdot 5 + 2 = 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2\\ 13 &= 2 \cdot 5 + 3\\ 339 &= (2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2) \cdot 5 + 4 =\\ &= 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 4 = 2324_5 \end{aligned}$$

Se observă că cifrele în care se scrie numărul căutat în baza 5 se obţin din împărţirile consecutive la 5 a resturilor parţiale după următorul algoritm :

$$\begin{array}{r|l} 339 & 5 \\ \underline{30} & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 67 & 5 \\ \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 339 & & & \\ \underline{30} & 67 & & \\ 39 & \underline{5} & 13 & \\ \underline{35} & 17 & \underline{10} & \textcircled{2} \\ \textcircled{4} & \underline{15} & \textcircled{3} & \\ & \textcircled{2} & & \end{array} \qquad 339 = 2324_5$$

Pentru a transforma un număr exprimat în sistemul de numeraţie cu baza zece într-un sistem cu baza a, se împarte la început numărul şi apoi cîturile consecutive la a ; resturile acestor împărţiri consecutive considerate în ordine inversă (primul rest fiind ultima cifră a numărului şi ultimul rest obţinut prima cifră) vor reprezenta cifrele numărului exprimat în baza a.

2.5. DIFERITE ALTE BAZE DE NUMERAŢIE

Din cele ce am arătat anterior, rezultă că pentru fiecare bază de numeraţie a, numerele folosite pentru scrierea numerelor naturale sînt $0, 1, 2, 3, 4 \ldots a - 1$.

Să considerăm numerele de la 0 la 10, în diverse baze de numerație. Avem :

Baza : *10*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	10_3	3	3	3	3
4	11_3	10_4	4	4	4
5	12_3	11_4	10_5	5	5
6	20_3	12_4	11_5	10_6	6
7	21_3	13_4	12_5	11_6	10_7
8	22_3	20_4	13_5	12_6	11_7
9	100_3	21_4	14_5	13_6	12_7
10	101_3	22_4	20_5	14_6	13_7

Legătura dintre numerele exprimate în diferite baze de numerație

$$10_3 = (1 \cdot 3) + (0 \cdot 1) = 3$$
$$10_4 = (1 \cdot 4) + (0 \cdot 1) = 4$$
$$10_5 = (1 \cdot 5) + (0 \cdot 1) = 5$$
$$10_6 = (1 \cdot 6) + (0 \cdot 1) = 6$$
$$10_7 = (1 \cdot 7) + (0 \cdot 1) = 7$$
$$10_8 = (1 \cdot 8) + (0 \cdot 1) = 8$$

2.6. OPERAȚII CU NUMERE ÎN DIFERITE BAZE

Regulile de calcul pentru adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea numerelor întregi scrise într-o bază *b*, oricare ar fi această bază, sînt asemănătoare cu regulile pentru baza 10. Ele se bazează pe tabelele de adunare și înmulțire ale numerelor în baza în care lucrăm. Alcătuirea acestor tabele se face în același mod ca și pentru baza 10.

Astfel în baza doi, în care cifrele sînt 0 și 1, tabelele de adunare și înmulțire sînt următoarele :

Tabela de adunare

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Tabela de înmulțire

×	0	1
0	0	0
1	0	1

În tabela de adunare rezultatul adunării a două cifre este trecut la intersecţia liniilor şi coloanelor în care se găsesc cele două cifre care se adună.

De exemplu pentru a afla rezultatul adunării elementului 1 din coloana 1 şi elementului 1 din linia 1, se construiesc, prin punctele care marchează aceste elemente, linii paralele cu linia verticală care trece prin prima cifră şi linia orizontală ce trece prin a doua cifră.

+	0	1
0		
1		10

În mod asemănător putem construi tabelele de adunare şi înmulţire a numerelor în altă bază de numeraţie ca de exemplu baza 3.

Tabela de adunare

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Tabela de înmulţire

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

O unitate de ordin superior se notează în sistemul cu baza trei, 10 şi se formează din 3 unităţi de ordin inferior.

Procedeele de calcul bazate pe proprietăţile operaţiilor cu numere scrise în sistemul zecimal se extind fără dificultate la operaţii cu numere scrise în alte baze de numeraţie.

Să calculăm suma : $9 + 8$.

Pentru a calcula această sumă, vom scrie :

$$9 + 8 = 9 + (1 + 7) = (9 + 1) + 7 = 10 + 7 = 17.$$

Am scris numărul 8 ca o sumă formată dintr-o unitate şi numărul 7 (şi vom folosi proprietatea de asociativitate pentru a afla în continuare rezultatul). În continuare am luat o unitate de la 8 şi am adăugat-o lui 9 în scopul de a forma o „zece" ; adică o unitate de ordin superior.

Putem proceda şi în alt mod, astfel:

$$9 + 8 = (7 + 2) + 8 = 7 + 10 = 17.$$

Prin urmare am luat de la numărul 9 două unităţi pe care le-am adăugat lui 8, pentru a obţine o unitate de ordin superior. În sistemul zecimal o unitate de ordin superior este formată din 10 unităţi de ordin inferior.

Pentru a aduna două numere scrise în baza 5, vom proceda în mod asemănător.

Exemplu:

Să se calculeze:

$$4_5 + 3_5 = 4_5 + (1_5 + 2_5) = (4_5 + 1_5) + 2_5.$$

Am luat de la numărul 3 o unitate pe care am adăugat-o lui 4 pentru a obţine o unitate de ordin superior, unitate pe care o notăm cu 10.

$$4_5 + 1_5 = 10_5.$$

Dacă la aceasta adăugăm 2_5 (două unităţi) vom obţine 12_5.

$$10_5 + 2_5 = 12_5.$$

Prin urmare, $4_5 + 3_5 = 12_5$. În mod asemănător avem:

$$4_5 + 4_5 = 4_5 + 1_5 + 3_5 = 13_5$$

Pentru adunarea numerelor în baza 5 vom alcătui o tabelă, astfel:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10_5
2	2	3	4	10_5	11_5
3	3	4	10_5	11_5	12_5
4	4	10_5	11_5	12_5	13_5

Acest tabel va fi utilizat mai departe, în operaţiile cu numere în baza 5.

Exemplu:

Să se calculeze suma numerelor 432_5 şi 243_5. Să se facă verificarea în baza 10.

Pentru a efectua această sumă vom scrie mai întîi cele două numere, ca o sumă de produse dintre cifrele semnificative ale celor două numere și puteri ale numărului 5.

$$432_5 = (4 \times 5^2) + (3 \times 5^1) + (2 \times 5^0).$$
$$243_5 = (2 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (3 \times 5^0).$$

Dacă adunăm cifrele de același ordin obținem:

$$(432_5 + 243_5) = ((4 \times 5^2) + (3 \times 5^1) + (2 \times 5^0)) +$$
$$+ ((2 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (3 \times 5^0)) =$$
$$= ((4 \times 5^2) + (2 \times 5^2)) + ((3 \times 5^1) + (4 \times 5^1)) +$$
$$+ ((2 \times 5^0) + (3 \times 5^0)) =$$
$$= (6 \times 5^2) + (7 \times 5^1) + (5 \times 5^0).$$

Ultimul termen al acestei sume 5×5^0 reprezintă cinci unități care în sistemul în bază 5 formează o unitate de ordin superior pe care o adăugăm termenului 7×5^1 și obținem: 8×5^1.

Prin urmare avem:

$$432_5 + 243_5 = (6 \times 5^2) + (8 \times 5^1) + (0 \times 5^0).$$

Termenul al doilea din suma obținută are opt unități de ordin superior. Din cele opt unități de ordin superior, luăm 5 unități care formează o unitate de ordin imediat următor și mai rămîn 3 unități. Unitatea de ordin imediat superior o adăugăm termenului 6×5^2 și obținem 7×5^2.

Prin urmare avem:

$$432_5 + 243_5 = (7 \times 5^2) + (3 \times 5^1) + (0 \times 5^0).$$

Din cele 7 unități de ordinul lui 5^2, luăm 5 și formăm o unitate de ordin imediat superior, adică 5^3, și mai rămîn două unități de ordinul 5^2.

$$432_5 + 243_5 = (1 \times 5^3) + (2 \times 5^2) + (3 \times 5^1) + (0 \times 5^0).$$

Este ușor de remarcat că suma din partea dreaptă a semnului egal reprezintă numărul 1230 scris în baza 5, sau:

$$432_5 + 243_5 = 1230_5.$$

Tehnica de calcul poate fi notată sintetic astfel:

$$\begin{array}{r} 432_5 \\ 243_5 \\ \hline 1230_5 \end{array}$$

Verificare : $432_5 = (4 \times 5^2) + (3 \times 5^1) + (2 \times 5^0) = 117$

$243_5 = (2 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (3 \times 5^0) = 73$

$1\,230_5 = (1 \times 5^3) + (2 \times 5^2) + (3 \times 5^1) + (0 \times 5^0) = 190$

Exemplu :

Să se afle diferenţa :

$$211_5 - 142_5.$$

Pentru a calcula această diferenţă vom proceda în mai multe etape, ca şi în cazul adunării a două numere.

Se scriu mai întîi descăzutul şi scăzătorul ca sumă de produse ale cifrelor semnificative cu care sînt scrise cele două numere şi puterile numărului 5.

$$211_5 = (2 \times 5^2) + (1 \times 5^1) + (1 \times 5^0),$$

$$142_5 = (1 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (2 \times 5^0).$$

Observăm că nu este posibilă scăderea în sistemul cu baza 5 a unităţilor de la scăzător din unităţile de acelaşi ordin de la descăzut.

Vom lua de la descăzut o unitate de ordinul 5^2 şi o vom aduna cu o unitate de ordin imediat inferior.

$$211_5 = (1 \times 5^2) + (11_5 \times 5^1) + (1 \times 5^0). \quad \text{(a)}$$

De la ordinul 5^1 vom lua o unitate, pe care o vom transforma în unitate de ordin inferior, şi vom obţine :

$$211_5 = (1 \times 5^2) + (10_5 \times 5^1) + (11_5 \times 5^0). \quad \text{(b)}$$

$$142_5 = (1 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (2 \times 5^0)$$

Operaţia de scădere se efectuează calculînd în baza 5 diferenţele termenilor de la descăzut şi scăzător de acelaşi ordin.

$$\begin{aligned} 211_5 - 142_5 &= ((1 \times 5^2) + (10_5 \times 5^1) + (11 \times 5^0)) - \\ &- ((1 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (2 \times 5^0)) = \\ &= (1 \times 5^2 - 1 \times 5^2) + (10_5 \times 5^1 - 4 \times 5^1) + \\ &+ (11_5 \times 5^0 - 2 \times 5^0) = \\ &= (1 \times 5^1) + (4 \times 5^0) = 14_5. \end{aligned}$$

2.7. ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR ÎN BAZA 5

Să se calculeze : $1133_5 : 4_5$.

Vom efectua mai întîi produsele :

$$1_5 \cdot 4_5 = 4_5$$
$$2_5 \cdot 4_5 = 13_5$$
$$3_5 \cdot 4_5 = 22_5$$
$$4_5 \cdot 4_5 = 31_5$$

Se observă că un multiplu al numărului 4_5 apropiat sau mai mic decît 11_5 este numărul 4_5.

Prin urmare, putem afla primul rest parțial :

$$\begin{array}{r|l} 1133_5 & 4_5 \\ \cline{2-2} \underline{4_5} & 132 \\ 23_5 & \\ \underline{22_5} & \\ 13_5 & \end{array}$$

Mai departe, observăm că cel mai mare multiplu al numărului 4_5 mai mic decît 23_5 este $4_5 \cdot 3_5 = 22_5$, care se scade din 23_5 și se obține 1, lîngă care se adaugă cifra următoare a deîmpărțitorului, adică numărul 3. Numărul 13_5 este multiplu al împărțitorului $13_5 : 4_5 = 2_5$.

Prin urmare,

$$1133_5 : 4_5 = 132_5$$

Verificare : $(1133)_5 = 1 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 3 = 125 + 25 +$

$$+ 15 + 3 = 168$$

$$168 : 4 = 42$$

$$(132)_5 = 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2 = 25 + 17 = 42$$

2.8. OPERAȚII BINARE

Operațiile aritmetice în sistemul binar au la bază următoarele reguli : $1 + 1 = 10$; $1 \cdot 1 = 1$.

Pentru a efectua operații cu numere scrise în baza de numerație 2, vom aplica aceleași principii de calcul ca și în cazul numerelor în baza 5.

Exemplu :

Să se efectueze produsul 11×101

Soluție :

$$\begin{array}{r} 11 \times \\ 101 \\ \hline 11 \\ 11 \\ \hline 1111 \end{array}$$

Verificare :

$$\begin{aligned} 11 &= 1 \cdot 2 + 1 = 2 + 1 = 3 \\ 101 &= 1 \cdot 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \\ 101 \times 11 &= 5 \times 3 = 15 \\ 1111 &= 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = \\ &= 8 + 4 + 2 + 1 = 15 \end{aligned}$$

Se scriu cifrele de același ordin, una sub alta și se efectuează înmulțirile, ținînd seama de tabela înmulțirii corespunzătoare ordinului respectiv.

Scrierea unui număr în baza 10 în sistemul cu baza 2

Exemplul 1.

Să se scrie în baza 2 numărul 147. Vom proceda astfel : $147 = X_2$. După algoritmul stabilit avem :

```
147 | 2
  1 | 73 | 2
       1 | 36 | 2
            0 | 18 | 2
                 0 |  9 | 2
                      1 |  4 | 2
                           0 |  2 | 2
                                0 | 1
```

$X = 1001\,00\,11$

Exemplul 2.

Printre hîrtiile unui matematician a fost găsită autobiografia lui. Ea începe cu următoarele rînduri :

„Eu am terminat universitatea la vîrsta de 44 ani. După un an, fiind un tînăr de 100 de ani, m-am însurat cu o fată de 34 ani. Diferența neînsemnată de vîrstă dintre noi — de numai 11 ani — a contribuit la comunitatea noastră de interese și idei.

Peste cîţiva ani aveam deja o mică familie cu 10 copii. Salariul meu era de 200 ruble, din care 1/10 îi dădeam surorii mele, aşa încît, cu copiii, am trăit cu 130 ruble pe lună".

Cum pot fi explicate contradicţiile curioase dintre numerele prezentate în acest fragment.

(I. I. Pelerman — „Aritmetica distractivă")

Secretul rezolvării este trădat de fraza: „după un an (peste 44 ani), fiind un tînăr de 100 ani..." de unde rezultă că datele problemei nu corespund unui sistem zecimal. Dacă, prin adăugarea unei unităţi, numărul 44 se transformă în 100, aceasta înseamnă că cifra 4 este cea mai mare în acest sistem şi prin urmare baza sistemului este 5. Transformînd numerele din sistemul cu baza 5 în cel zecimal, constatăm că biografia nu conţine nici un fel de contradicţii.

„Eu am terminat universitatea la vîrsta de 24 ani. După un an m-am însurat, fiind tînăr de 25 ani, cu o fată de 19 ani. Diferenţa mică de vîrstă dintre noi de numai 6 ani — a contribuit la comunitatea noastră de interese şi idei.

Peste cîţiva ani aveam deja o mică familie cu 5 copii. Salariul meu lunar era de 50 ruble din care 1/5 îi dădeam surorii aşa încît noi cu copiii am trăit cu 40 ruble pe lună."

Şi misterul s-a risipit...

2.9. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Să se scrie numerele corespunzătoare fiecărei mulţimi de obiecte într-o bază indicată de numărul de obiecte din fiecare grupă.

a)
× × × ×
× × × ×
× ×

b)
× × × × ×
× × × × ×
×

c)
× × ×
× × ×
× ×

2. Să se deseneze diagramele corespunzătoare numerelor scrise mai jos:

a) 22_3; *b*) 11_2; *c*) 14_5; *d*) 23_6.

3. Să se scrie în baza 10 numerele:

a) 1011_2; *b*) 473_8; *c*) 2201_3; *d*) 102_3; *e*) 1011_2
f) 1212_3; *g*) 1211_3; *h*) 1010_2; *i*) 403_6.

4. Să se scrie în baza de numeraţie 5 numerele (scrise în baza zece):

a) 382; *b*) 917; *c*) 1 000.

5. Să se scrie în baza 5 sumele:

$$1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^0,$$
$$4 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 5^0,$$
$$3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 5^0.$$

6. Să se transforme numerele: 324; 427; 576; 257; 2003 scrise în baza 10, în baze scrise în dreptul parantezelor:

$324 = (\quad)_4$ $\qquad$ $576 = (\quad)_8$
$427 = (\quad)_6$ $\qquad$ $257 = (\quad)_7$

7. Să se efectueze adunarea și apoi să se facă verificarea, transformînd numerele în baza 10.

a) $42_5 + 34_5$ $\qquad$ *b*) $44_5 + 23_5$ $\qquad$ *c*) $302_5 + 402_5$

8. Să se efectueze scăderile următoare și apoi să se verifice rezultatele în baza 10:

a) $143_5 - 31_5$ $\qquad$ *b*) $312_5 - 123_5$ $\qquad$ *c*) $1321_5 - 403_5$ $\qquad$ *d*) $3204_5 - 1342_5$

9. Să se efectueze produsele:
a) $342_5 \times 4_5$; *b*) $243_5 \times 3_5$; *c*) $32_5 \times 43_5$

10. Să se efectueze împărțirile:
a) $143_5 : 4_5$; *b*) $3\,042_5 : 4_5$; *c*) $43\,201_5 : 41_5$

11. Să se alcătuiască tabela adunării a două numere în baza 8:

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

12. Folosind rezultatele de la punctul precedent, să se efectueze adunările și scăderile următoare:

a) $147_8 + 324_8$ $\qquad$ *b*) $347_8 - 135_8$ $\qquad$ *c*) $256_8 + 103_8$

7—c. 1782

Să se verifice apoi rezultatele folosind scrierea numerelor corespunzătoare în baza 10.

13. Să se alcătuiască tabelele adunării și înmulțirii a două numere în baza 4:

a)

+	1	2	3
1			
2			
3			

b)

·	1	2	3
1			
2			
3			

14. Folosind rezultatele de la punctul precedent, să se calculeze:

a) $\begin{array}{r} 121_4 \\ +302_4 \\ \hline \end{array}$ *b)* $\begin{array}{r} 132_4 \\ -123_4 \\ \hline \end{array}$ *c)* $\begin{array}{r} 103_4 \\ \times\ 21_4 \\ \hline \end{array}$.

15. Să se efectueze în baza 2 operațiile:

a) $\begin{array}{r} 1111_2 \\ +1011_2 \\ \hline \end{array}$ *b)* $\begin{array}{r} 10011 \\ +10111 \\ \hline \end{array}$ *c)* $\begin{array}{r} 110101 \\ -\ 11011 \\ \hline \end{array}$

d) $\begin{array}{r} 1101_2 \\ \times 11_2 \\ \hline \end{array}$ *e)* $\begin{array}{r} 10110_2 \\ -\ 1101_2 \\ \hline \end{array}$

16. Să se demonstreze identitatea:

$$11001_2 \cdot 120_3 + 1011_2 \cdot 132_5 = 837_{10}.$$

17. Să se transforme în sistemul cu baza 2 numărul 487_{10}.

18. Să se determine x din egalitatea:

$$111_2 + 111_3 + 111_4 + 111_5 + 111_6 + 111_7 + 111_8 + 111_9 = \\ = x_{10} + 111_{11} + 111_{12}.$$

19. Se consideră în baza 10 numerele:

$$N_1 = \overline{xyz\ xyz\ xyz}$$

$$N_2 = \overline{xyz\ xyz}$$

Să se arate că $\frac{N_1}{N_2}$ este constant.

20. Să se rezolve ecuațiile:

$$X \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, x, 9\};$$
$$X \cap \{2, 3, 4\} = \emptyset; \ x \in N^*,$$

ştiind că x verifică relaţia :

$$\frac{\overline{12x} + \overline{13x} + \overline{15x}}{\overline{43x}} = 1.$$

21. Se dă produsul : $11 \cdot 121 = 1331$.
În ce bază de numeraţie are loc înmulţirea?

22. Să se afle bazele sistemului de numeraţie din următoarele ecuaţii :

$$11_x + 22_x = 111_{10}$$

$$11_x + 22_x = 21_{10}$$

23. Să se arate că oricare ar fi a, b, numere naturale $1 \leqslant a;\ b \leqslant 9$:

a) $\overline{abbab} - 2b$ se divide cu 7;

b) $\overline{abbab} - 2b$ se divide cu 11;

c) $\overline{abbab} - 9b$ se divide cu 13.

24. Să se afle numerele N de trei cifre care în baza 11 se scriu $\overline{xoy}$, iar în baza 10 se scriu $\overline{yoz}$.

25. Să se găsească numărul de patru cifre a, b, c, d, ştiind că $\frac{\overline{abcd}}{\overline{ad}} = \overline{abc}\,(b + c - a)^2$.

Capitolul 3

NUMERE ÎNTREGI

3.1. JOCUL PERECHILOR

Să considerăm un joc care constă din aruncarea a două zaruri, unul alb și altul negru.

Prin convenție vom admite că punctele zarului alb sînt cîștiguri, iar cele ale zarului negru sînt pierderi. Scorul unui jucător se stabilește după numărul de puncte pe care le are în plus zarul alb, față de zarul negru.

Dacă, de exemplu, jucătorul A a aruncat zarurile și a obținut patru puncte pe zarul alb și două puncte pe zarul negru, convenim să reprezentăm rezultatul acestei aruncări prin perechea (4, 2). Elementele acestei perechi, care sînt 4 și 2, se mai numesc și termenii perechii. Primul element al perechii, numărul 4, reprezintă numărul de puncte al zarului alb, cel de al doilea element al perechii numărul 2, numărul de puncte al zarului negru.

Scorul jucătorului la această aruncare este după convenția stabilită $4-2=2$ puncte cîștigate. Jucătorul A cîștigă două puncte. Vom însemna rezultatul acestei aruncări $+2$. Vom avea deci cîștiguri cînd primul element al perechii este mai mare decît al doilea.

Să presupunem că un alt jucător, B, aruncă zarurile și obține 2 puncte pe zarul alb și 4 puncte pe zarul negru, rezultat pe care-l reprezentăm prin perechea (2, 4).

După convenția stabilită jucătorul, B pierde $4-2=2$ puncte. Vom însemna rezultatul acestei aruncări -2.

Să presupunem că un al treilea jucător C aruncă zarurile și obține două puncte pe zarul alb și două puncte pe zarul negru, rezultat care este caracterizat de perechea (2,2). După convenția stabilită anterior, jucătorul C nici nu cîștigă și nici nu pierde puncte. Spunem că perechea (2,2) este neutră.

3.2. PERECHI ECHIVALENTE

Să presupunem că jucătorul A aruncă zarurile şi realizează un cîştig caracterizat de perechea (5, 3) şi că jucătorul B realizează şi el un cîştig reprezentat de perechea (3,1).

Cîştigul primului jucător este $5 - 3 = 2$ puncte, iar al celui de al doilea jucător $3 - 1 = 2$ puncte. Cei doi jucători realizează cîştiguri egale.

Vom scrie : $5 - 3 = 3 - 1$, sau : $5 + 1 = 3 + 3$.

Perechile (5,3) şi (3,1), care reprezintă acelaşi cîştig de două puncte, le numim echivalente.

Fie perechile (1,3) şi (2,4). Fiecare din aceste perechi reprezintă cîte o pierdere de două puncte. Perechile (1,3) şi (2,4), care reprezintă pierderile de două puncte, le vom numi echivalente.

Vom scrie :

$$4 - 2 = 3 - 1 = 2$$

Două perechi (a, b) şi (c, d) se numesc echivalente dacă :

$$a + d = b + c.$$

Se scrie $(a, b) \sim (c, d)$ şi se citeşte : „perechea (a, b) este echivalentă cu perechea (c, d)".

Exemple :

1. Să se arate că $(6,2) \sim (4,0)$.
Perechile (6,2) şi (4,0) sînt echivalente deoarece :

$$6 + 0 = 2 + 4$$

2. Să se determine x, astfel încît să avem :

$$(x,3) \sim (4,2).$$

Din relaţia de echivalenţă avem :

$$x + 2 = 4 + 3,$$

sau :

$$x = 7 - 2 = 5.$$

3.3. NOŢIUNEA DE NUMĂR ÎNTREG

Să considerăm trei aruncări ale celor două zaruri caracterizate de perechile :

$$(4,2),\ (5,3),\ (2,0).$$

Se verifică ușor că aceste perechi sînt echivalente și reprezintă un cîștig de două puncte:

$$(4,2) \sim (5,3) \sim (2,0).$$

Toate perechile echivalente cu perechea (2, 0) alcătuiesc o clasă pe care o notăm cu $\overline{(2,0)}$ sau numărul întreg +2.

Definiție Se numește număr întreg clasa tuturor perechilor de numere naturale echivalente cu o pereche dată (a, b). Se notează numărul întreg $\overline{(a, b)}$.

Se dă perechea (5,3). Dacă scădem din ambii termeni ai acestei perechi același număr 1, se obține perechea (4,2) care este echivalentă cu (5,3).

Se verifică ușor relația:

$$5 + 2 = 4 + 3.$$

Dacă scădem din ambii termeni numărul 3 se obține o pereche (2,0) echivalentă cu prima:

$$5 + 0 = 3 + 2.$$

Regulă Dacă scădem din ambii termeni ai unei perechi (a, b) același număr natural c ($c \leqslant a$ și $c \leqslant b$) se obține o pereche echivalentă cu prima:

$$(a, b) \sim (a - c, b - c).$$

Într-adevăr, se verifică relația:

$$a + b - c = a + b - c.$$

Aplicînd această proprietate putem afla totdeauna o pereche, echivalentă cu o pereche dată, care are unul din termenii săi numărul zero.

Exemplul 1

Fie perechea (5,4). Scădem din ambii termeni ai perechii (5,4) numărul 4 și obținem:

$$(5,4) \sim (5 - 4, 4 - 4) \text{ sau } (5,4) \sim (1,0).$$

Clasa tuturor perechilor echivalente cu perechea (1,0) este numărul întreg $\overline{(1,0)}$ sau +1.

Vom scrie: $\overline{(1,0)} = +1$.

Exemplul 2

Fie perechea (4,5). Să scădem din ambii termeni numărul 4 şi obţinem :

$$(4,5) \sim (4-4,\ 5-4)$$

sau :

$$(4,5) \sim (0,1).$$

Clasa tuturor perechilor echivalente cu perechea (0,1) este numărul întreg $\overline{(0,1)}$ sau -1.

Vom scrie :

$$\overline{(0,1)} = -1.$$

Exemplul 3

Fie perechea (8,8). Dacă scădem din ambii termeni ai perechii numărul 8, obţinem :

$$(8,8) \sim (8-8, 8-8)$$

sau :

$$(8,8) \sim (0,0).$$

Clasa tuturor perechilor echivalente cu perechea (0,0) se numeşte numărul întreg $\overline{(0,0)}$ sau 0.

Se scrie : $\overline{(0,0)} = 0$.

Perechea de elemente care are un termen egal cu zero se numeşte cel mai simplu reprezentant al numărului întreg.

Exemple :

a) Perechile (1,0), (2,0), (3,0), (4,0) reprezintă numerele întregi : $+1$; $+2$; $+3$; $+4$;. . . .

Vom scrie : $\overline{(1,0)} = +1$, $\overline{(2,0)} = +2$, $\overline{(+3,0)} = +3$ etc.

În general, dacă $a \in N$, atunci numerele $+a$, 0 şi $-a$ sînt reprezentate de perechile : $(a, 0)$, $(0,0)$ şi $(0, a)$, sau :

$$\overline{(a, 0)} = +a,\ \overline{(a, a)} = 0,\ \overline{(0, a)} = -a.$$

Exemplul 4.

a) Cel mai simplu reprezentant al numărului -3 este perechea (0,3).

Vom scrie : $\overline{(0,3)} = -3$.

b) Cel mai simplu reprezentant al numărului + 4 este perechea (4,0).

Vom scrie :

$$\overline{(4,0)} = +4.$$

c) Cel mai simplu reprezentant al numărului 0 este perechea (0,0).

Vom scrie : $\overline{(0,0)} = 0$.

Perechile . . . (0,3), (0,2), (0,1), (0,0), (1,0), (2,0), (3,0). . . reprezintă numerele întregi : − 3, − 2, − 1, 0, + 1, + 2, + 3, sau : . . .

$$\overline{(0,3)} = -3,\ \overline{(0,2)} = -2,\ \overline{(0,1)} = -1,\ \overline{(0,0)} = 0,\ \overline{(1,0)} = +1,$$

$$\overline{(2,0)} = +2,\ \overline{(3,0)} = +3.$$

Numerele : . . . − 3, −2, −1, 0, +1, +2, +3, . . . formează o nouă mulţime pe care o vom nota cu Z şi care se numeşte mulţimea numerelor întregi.

Vom scrie :

$$Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}.$$

Numărul întreg +4 face parte din mulţimea Z. Vom scrie : $+4 \in Z$. Numerele −3, −2, −1 se numesc întregi negative. Numerele : +1, +2, +3 . . . se numesc întregi pozitive. Numărul zero 0 nu este considerat nici pozitiv şi nici negativ.

Mulţimea numerelor întregi este nesfîrşită.

Orice număr natural poate fi considerat ca un număr întreg pozitiv.

Mulţimea numerelor naturale este prin urmare inclusă în mulţimea numerelor întregi.

Vom scrie : $N \subset Z$.

3.4. MODULUL UNUI NUMĂR ÎNTREG

Să considerăm de exemplu numerele întregi −5 şi −4.

Un număr întreg se scrie cu ajutorul unui număr natural prevăzut cu semnul + (plus) sau − (minus).

În exemplul dat mai sus, 5 este numărul natural cu care este scris numărul întreg − 5 şi 4 este numărul natural cu care este scris numărul −4.

Spunem că 5 este modulul (valoarea absolută) a numărului -5, iar 4 este modulul (valoarea absolută) a numărului -4.

Pentru notația modulului unui număr întreg se folosesc două bare verticale între care se scrie numărul întreg. De exemplu modulul numărului întreg -5 se scrie: $|-5| = 5$.

3.5. REPREZENTAREA MULȚIMII NUMERELOR ÎNTREGI PE O DREAPTĂ

Pe o dreaptă pe care s-a ales un punct origine și un sens de măsurat segmentele, unui număr natural dat îi corespunde un singur punct (fig. 3.1).

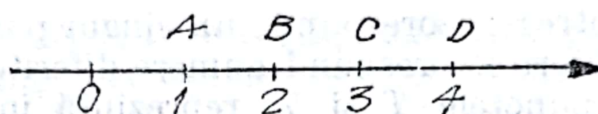


Fig. 3.1

Convenim să reprezentăm numerele întregi pozitive prin puncte așezate pe axa numerică la dreapta originii O.

Pentru a reprezenta pe dreapta numerică numărul pozitiv $+3$, se aplică următorul procedeu. Se alege ca unitate de măsură un segment $\overline{OA} = u$ și se măsoară începînd din punctul O pe dreapta numerică xy la dreapta lui O un segment OM a cărui lungime este egală cu 3 unități:

$$\overline{OM} = 3\overline{OA} = 3u \text{ (fig. 3.2).}$$

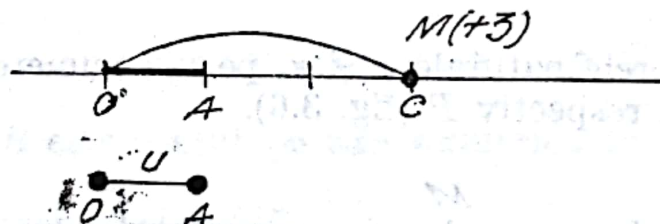


Fig. 3.2

Punctul M reprezintă pe dreapta numerică numărul întreg $+3$.

Convenim să reprezentăm numerele întregi negative prin puncte așezate la stînga originii O.

Aplicînd un procedeu analog cu cel stabilit pentru reprezentarea pe axa numerică a numerelor întregi pozitive, pentru a reprezenta pe dreapta numerică numărul -4, vom proceda astfel:

Se măsoară începînd din punctul O și la stînga lui O un segment ON egal cu $4u$ sau $\overline{ON} = 4\overline{OA} = 4u$ (fig. 3.3).

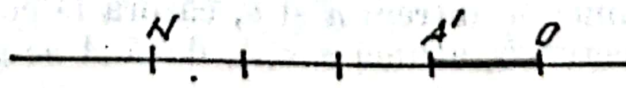


Fig. 3.3

Punctul N reprezintă pe axa numerică numărul -4.
Să reprezentăm pe axa numerică numerele:

$$-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4.$$

După convenţia stabilită vom obţine punctele: $Q, R, N, M; O, A, B, C, D$, reprezentate în figura 3.4.

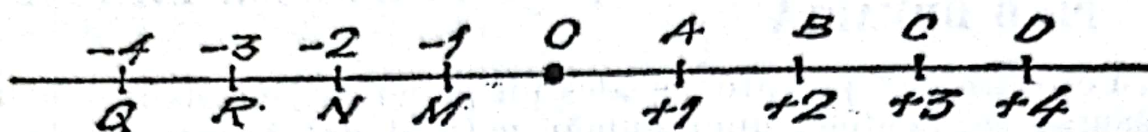


Fig. 3.4

Unui număr întreg îi corespunde un singur punct pe dreaptă. La două puncte diferite corespund numere diferite.

În figura 3.5 punctele T şi T' reprezintă imaginea pe axa numerică a numerelor a şi $-a$.

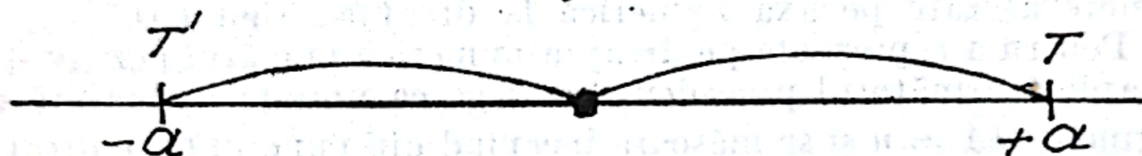


Fig. 3.5

3.6. COMPARAREA NUMERELOR ÎNTREGI PE AXA NUMERICĂ

Dîndu-se numerele naturale x şi y, pe axa numerelor le corespund punctele M, respectiv P (fig. 3.6).

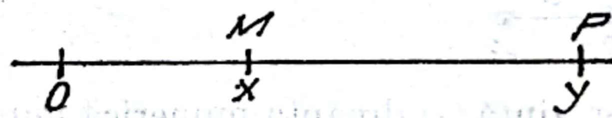


Fig. 3.6

Am văzut că dacă $x < y$, atunci punctul M se află pe axa numerică la stînga punctului P. Această convenţie o vom considera adevărată şi pentru numerele întregi.

Convenim să considerăm că dintre două numere întregi este mai mare acela căruia îi corespunde pe axa numerică un punct mai la dreapta şi mai mic, acela căruia îi corespunde un punct mai la stînga.

Fiind date numerele întregi a şi b, cărora le corespund pe axă punctele A, respectiv B, atunci $a < b$, dacă A se găseşte la stînga lui B.

Punctele care corespund pe axa numerică la numere negative sînt așezate pe axă mai la stînga decît punctul O (fig. 3.7).

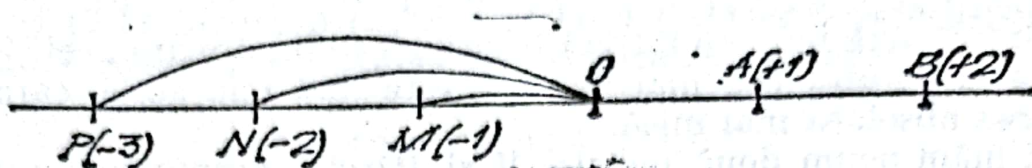


Fig. 3.7

Orice număr întreg negativ este mai mic decît numărul 0, sau :

$$-3 < 0,\ -2 < 0,\ -1 < 0.$$

Un punct oarecare care corespunde unui număr negativ este așezat mai la stînga decît orice punct care corespunde unui număr pozitiv.

Orice număr negativ este mai mic decît un număr pozitiv (fig. 3.8).

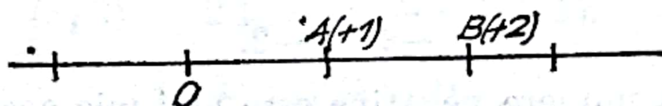


Fig. 3.8

Să considerăm pe axa numerică două puncte A și B care corespund numerelor întregi $+1$ și $+2$.

Avem :

$$OA = |+1| = 1;\ OB = |+2| = 2;\ \overline{OB} > \overline{OA}.$$

Punctul B este așezat pe axa numerică mai la dreapta decît punctul A.

După convenția stabilită :

$$+1 < +2 \text{ și } |+1| < |+2|.$$

În general dacă $+a$ și $+b$ sînt două numere pozitive cu $|+a| < |+b|$, atunci punctul care corespunde pe axa numerică numărului $+b$ se află mai la dreapta decît punctul care corespunde numărului $+a$ (fig. 3.9).

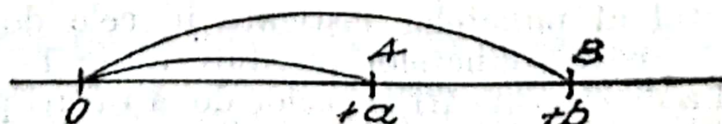


Fig. 3.9

$$|+a| = OA, \ |+b| = OB, \ |+b| > |+a|,$$
$$+a < +b.$$

Dintre două numere întregi pozitive este mai mare acela care are valoarea absolută mai mare și este mai mic acela care are valoarea absolută mai mică.

Să luăm acum două puncte M și P care corespund numerelor întregi -4 și -2 (fig. 3.10).

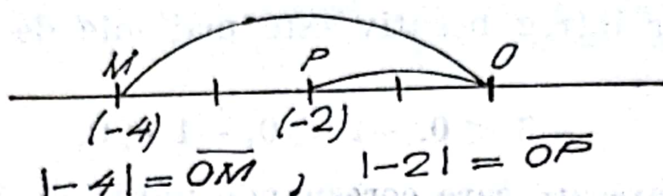


Fig. 3.10

Din relația $OM > OP$, deducem : $|-4| > |-2|$.

Punctul M care corespunde numărului întreg (-4) se află mai la stînga decît punctul P care corespunde numărului (-2).

După convenția stabilită :

$$-4 < -2.$$

Dintre două numere negative este mai mic acela care are valoarea absolută mai mare și este mai mare acela care are valoarea absolută mai mică.

Exemplu :

Să considerăm numerele întregi :

$$-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6.$$

După convenția stabilită putem scrie:

$$-6 < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < +3 <$$
$$< +4 < +5 < +6.$$

3.7. ADUNAREA NUMERELOR ÎNTREGI

Să considerăm două aruncări a zarurilor caracterizate de perechile : (4, 1) și (2, 1).

Numărul total al punctelor cîștigate în cele două aruncări este $4+2=6$. Numărul punctelor pierdute este : $1+1 = 2$. Vom nota rezultatul a două aruncări ale celor două zaruri prin perechea (6,2).

Convenim să reprezentăm operaţia de compunere a două aruncări consecutive prin operaţia de adunare a celor două perechi (4,1) şi (2,1). Suma perechilor (4,1) şi (2,1) este perechea (6,2), ce caracterizează rezultatul celor două aruncări a zarurilor.

Vom scrie:

$$(4,1) + (2,1) = (6,2).$$

Definiţie Suma a două perechi de numere naturale este o pereche de numere naturale care are primul termen egal cu suma primilor termeni ai perechilor date şi cel de al doilea termen egal cu suma celorlalţi doi termeni ai perechilor date.

Exemplu

Să se afle numărul natural x, astfel încît să avem satisfăcută egalitatea:

$$(x, 3) + (2,1) = (5,4).$$

Soluţie: Din definiţia sumei a două perechi de numere naturale avem

$$(x, 3) + (2,1) = (x + 2,3 + 1).$$

sau:

$$(x + 2,4) = (5,4).$$

Două perechi sînt egale dacă au termenii corespondenţi egali:

$$x + 2 = 5 \text{ şi, deci, } \quad x = 3.$$

Observaţie

Operaţia de adunare a perechilor (a, b) şi (c, d) este o operaţie între clasele de perechi echivalente cu perechile date.

Să considerăm perechile echivalente:

$$(2, 3) \sim (3,4) \text{ şi } (1,5) \sim (3,7).$$

Avem:

$$(2,3) + (1,5) = (3,8)$$

$$(3,4) + (3,7) = (6,11).$$

Din cele două egalităţi se verifică uşor că:

$$(3,8) \sim (6,11).$$

Dacă într-o operaţie de adunare a două perechi de numere naturale se înlocuiesc perechile date cu perechi echivalente, se obţin sume care sînt perechi echivalente. Operaţia de adunare a perechilor este deci o adunare între clase.

Putem scrie:

$$\overline{(2,3)} + \overline{(1,5)} = \overline{(3,8)}.$$

1. Să considerăm următoarele numere întregi pozitive:

$$\overline{(2,0)} = +2 \text{ și } \overline{(3,0)} = +3.$$

Avem:

$$\overline{(2,0)} + \overline{(3,0)} = \overline{(5,0)},$$

sau:

$$(+2) + (+3) = +5. \tag{1}$$

Din egalitatea (1), deducem:

$$|+5| = |+2| + |+3|.$$

Modulul sumei este egal cu suma modulelor.

2. Fie numerele întregi negative:

$$\overline{(0,3)} = -3, \overline{(0,4)} = -4.$$

După regula de adunare a perechilor avem:

$$\overline{(0,3)} + \overline{(0,4)} = \overline{(0,7)},$$

sau:

$$(-3) + (-4) = -7. \tag{2}$$

Din egalitatea (2), deducem:

$$|-7| = |-4| + |-3|.$$

Modulul sumei este egal cu suma modulelor celor doi termeni.

Definiție Suma a două numere întregi, care au același semn, este un număr întreg care are semnul comun celor două numere întregi și modulul (valoarea absolută) egal cu suma modulelor numerelor.

3.8. SUMA A DOUĂ NUMERE ÎNTREGI DE SEMNE CONTRARE

1. Se dau numerele întregi:

$$\overline{(4,0)} = +4 \text{ și } \overline{(0,3)} = -3$$

Din definiția adunării claselor avem:

$$\overline{(4,0)} + \overline{(0,3)} = \overline{(4,3)}.$$

Dacă scădem din ambii termeni ai perechii (4,3) numărul 3, se obţine o pereche echivalentă :

$$(4,3) \sim (1,0).$$

Prin urmare avem :

$$\overline{(4,0)} + \overline{(0,3)} = \overline{(1,0)}$$

sau :

$$(+4) + (-3) = +1. \qquad (3)$$

Din egalitatea (3), deducem :

$$|+1| = |+4| - |-3|.$$

2. Fie numerele întregi :

$$\overline{(0,6)} = -6\,;\ \overline{(3,0)} = +3.$$

Avem :

$$\overline{(0,6)} + \overline{(3,0)} = \overline{(3,6)},$$

sau : $\overline{(3,6)} \sim \overline{(0,3)}$.

Prin urmare :

$$\overline{(0,6)} + \overline{(3,0)} = \overline{(0,3)},$$

sau :

$$(-6) + (+3) = -3. \qquad (4)$$

Din egalitatea (4) rezultă că :

$$|-3| = |-6| - |+3|.$$

Definiţie Suma a două numere întregi care au semne opuse este un număr întreg care are semnul numărului cu valoarea absolută cea mai mare, iar valoarea absolută egală cu diferenţa valorilor absolute ale celor două numere.

3. Două numere întregi se numesc opuse dacă au aceeaşi valoare absolută şi semne contrare.

Exemple

$$-5 \text{ şi } 5\,;\ -4 \text{ şi } +4\,;\ -1 \text{ şi } +1.$$

Dacă a este un număr natural oarecare, numerele $-a$ şi $+a$ se numesc opuse.

Să considerăm două numere întregi opuse :

$$\overline{(3,0)} = +3 \text{ şi } \overline{(0,3)} = -3$$

Din operaţia de adunare a perechilor avem :

$$\overline{(3,0)} + \overline{(0,3)} = \overline{(3,3)},$$

sau :

$$\overline{(3,0)} + \overline{(0,3)} = \overline{(0,0)},$$

sau :

$$(+3) + (-3) = 0.$$

Suma a două numere întregi opuse este numărul întreg zero. Suma unui număr întreg cu numărul zero este numărul însuşi :

$$\overline{(3,0)} + \overline{(0,0)} = (3,0),$$

sau :

$$(+3) + 0 = +3.$$

Vom folosi în toate exerciţiile cu numere întregi regulile şi definiţiile stabilite în acest paragraf fără a mai recurge la reprezentarea numerelor întregi prin perechi.

3.9. PROPRIETĂŢILE OPERAŢIEI DE ADUNARE A NUMERELOR ÎNTREGI

1. Adunarea este comutativă :

$$(+3) + (-5) = -2 \,;\; (-5) + (+3) = -2$$

$$(+3) + (-5) = (-5) + (+3)$$

$$\boxed{a + b = b + a.}$$

2. Adunarea este asociativă.

$$(+3) + ((-5) + (+2)) = (+3) + (-3) = 0$$

$$((+3) + (-5)) + (+2) = (-2) + (+2) = 0,$$



Prin urmare:

$$(+3)+((-5)+(+2))=((+3)+(-5))+(+2)$$

$$\boxed{(a+b)+c=a+(b+c).}$$

3. Zero este element neutru pentru adunare

$$(+3)+0=(+3)=+3$$

$$\boxed{a+0=0+a=a.}$$

4. Orice număr întreg admite un număr opus.

$$(+3)+(-3)=0$$

sau:

$$\boxed{(+a)+(-a)=0.}$$

3.10. SCĂDEREA NUMERELOR ÎNTREGI

Diferența a două numere întregi a și b se scrie $x=a-b$ și înțelegem că prin această operație trebuie să găsim un număr întreg x care, adunat cu numărul întreg b, să dea numărul întreg a.

$$x+b=a.$$

Să se calculeze diferența numerelor întregi -6 și -4
Vom scrie:

$$(-6)-(-4)=x$$

Trebuie să găsim numărul întreg x, care adunat cu -4 să ne dea -6, adică:

$$x+(-4)=-6.$$

Adunăm în ambele părți ale acestei egalități numărul $+4$ și obținem:

$$(x+(-4))+(+4)=(-6)+(+4).$$

8—c. 1782

Suma din membrul stîng al acestei egalităţi o mai putem scrie şi astfel:

$$x + ((-4) + (+4)) = (-6) + (+4),$$

sau:

$$\boxed{x = (-6) + (+4)}$$

Deci: $(-6) - (-4) = (-6) + (+4) = -2$

Într-adevăr, $(-2) + (-4) = -6$

Pentru a scădea două numere întregi, adunăm primul număr întreg cu opusul celui de al doilea număr întreg.

Exemple: a) $(-2) - (-3) = (-2) + (+3) = +1$

b) $(+7) - (-2) = (+7) + (+2) = +9$

3.11. REPREZENTAREA OPERAŢIILOR PE AXA NUMERICĂ

a) Adunarea numerelor întregi.

Să presupunem că un mobil oarecare se deplasează din punctul O, mai întîi spre dreapta 3 unităţi pînă în punctul A. Din punctul A se deplasează în continuare încă două unităţi spre dreapta pînă în punctul B.

Urmărind fig. 3.11, observăm că punctului B îi corespunde pe

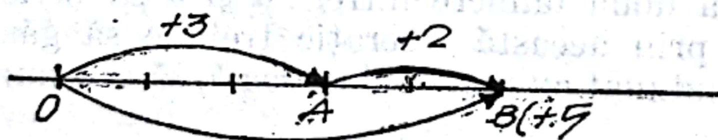


Fig. 3.11

axa numerică numărul întreg $+5$.

Vom scrie: $(+3) + (+2) = +5$.

Să presupunem că un mobil s-a deplasat din punctul O spre stînga 3 unităţi pînă în punctul C şi apoi din C iarăşi spre stînga 2 unităţi pînă în punctul D (fig. 3.12).

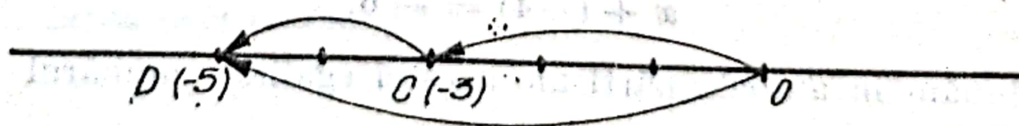


Fig. 3.12

Punctului D îi corespunde numărul întreg -5.

Vom scrie: $$(-3) + (-2) = -5.$$

Mobilul se deplasează acum din O spre dreapta 5 unități pînă în punctul A și din acest punct spre stînga 2 unități, pînă în punctul B (fig. 3.13).

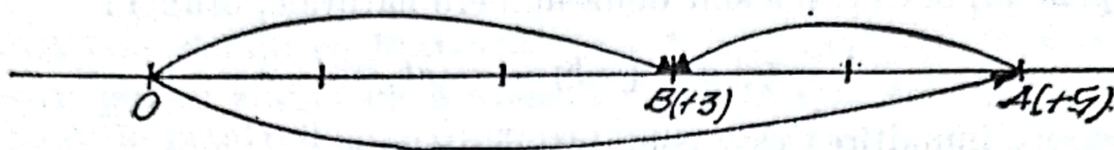


Fig. 3.13

Punctului B îi corespunde numărul întreg $+3$.
Vom scrie: $(+5) + (-2) = +3$.

b) Opusul sumei a două numere întregi

Să arătăm pe axa numerică suma numerelor întregi $(+4)$ și (-7).

Din punctul O mobilul se deplasează spre dreapta 4 unități pînă în punctul A și apoi din punctul A spre stînga 7 unități pînă în punctul B. Punctului B îi corespunde numărul întreg -3.
Vom scrie:

$$(+4) + (-7) = -3 \text{ (fig. 3.14).}$$

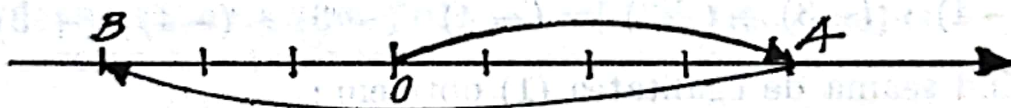


Fig. 3.14

3.12. ÎNMULȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI

Noi cunoaștem sensul înmulțirii numerelor întregi pozitive (naturale).

Exemple:

$$4 \cdot 7 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28;$$

$$3 \cdot 6 = 6 + 6 + 6 = 18.$$

Același sens îl vom atribui și înmulțirii numerelor pozitive cu cele negative.

Exemplu :

$$4\cdot(-6) = -6 -6 -6 -6 = -(6+6+6+6) = 6\cdot(-4) = -24.$$

Prin urmare :

$$4\cdot(-6) = -(4\times 6) = -24.$$

În general, dacă a și b sînt două numere naturale, atunci :

$$(+a)\cdot(-b) = -ab.$$

Deoarece înmulțirea este comutativă avem și :

$$(-a)\cdot(+b) = -ab \qquad (a\in N,\ b\in N).$$

Pentru a înmulți două numere întregi de semne contrare, se efectuează mai întîi produsul numerelor naturale cu care sînt scrise cele două numere întregi și rezultatul primește semnul minus.

Să efectueze acum produsul numărului întreg -4 cu suma numerelor -3 și $+3$. Avem :

$$(-4)\cdot[(-3)+(+3)] = (-4)\cdot 0 = 0. \qquad (1)$$

Înmulțirea numerelor naturale este distributivă față de adunare. Această proprietate este adevărată și pentru numere întregi și avem :

$$(-4)\cdot[(-3)+(+3)] = (-4)\cdot(-3) + (-4)\cdot(+3).$$

Ținînd seama de egalitatea (1) obținem :

$$(-4)\cdot(-3) + (-4)\cdot(+3) = 0. \qquad (2)$$

După cum am văzut în exemplul anterior produsul a două numere întregi de semne contrare este un număr negativ.

Prin urmare : $(-4)\cdot(+3) = -12$.

Înlocuim produsul $(-4)\cdot(+3)$ cu -12, în egalitatea (2) se obține :

$$(-4)\cdot(-3) + (-12) = 0. \qquad (3)$$

Dacă suma a două numere întregi $(-4)\cdot(-3)$ și (-12) este numărul zero, cele două numere sînt opuse și prin urmare putem scrie :

$$(-4)(-3) = +12 \qquad (4)$$

Produsul a două numere întregi, care au acelaşi semn, este un număr întreg pozitiv care are valoarea absolută egală cu produsul valorilor absolute :

$$(-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b) = + ab.$$

3.13. ECUAŢII

Să considerăm egalitatea $3 \cdot x + 1 = 7$, unde $x \in \{0, 1, 2, 3\}$. Nu putem stabili dacă această egalitate este adevărată decît după ce în prealabil cunoaştem ce număr este x.

Dacă $x = 0$, atunci : $3 \cdot 0 + 1 = 1 \neq 7$ — egalitatea nu este adevărată ;

Dacă $x = 1$, atunci : $3 \cdot 1 + 1 = 4 \neq 7$ — egalitatea nu este adevărată ;

Dacă $x = 2$, atunci : $3 \quad 2 + 1 = 7 = 7$ — egalitatea este adevărată.

O egalitate de forma $ax + b = c$, unde am notat prin litera x un număr necunoscut oarecare, aparţinînd unei mulţimi, şi care este adevărată numai pentru anumite valori ale numărului x, se numeşte ecuaţie.

Litera x prin care am însemnat numărul necunoscut se numeşte necunoscută.

Elementele mulţimii $M = \{0, 1, 2, 3\}$ pentru care egalitatea este adevărată se numesc rădăcinile sau soluţiile ecuaţiei.

A rezolva ecuaţia înseamnă a găsi soluţiile ei.

Ecuaţii echivalente

Exemplu: Se dau ecuaţiile:

$$3x + 5 = 2x + 9, \qquad x \in M$$

$$4x - 1 = x + 11, \qquad x \in M,$$

unde $M = \{1, 2, 4\}$.

Înlocuind pe rînd elementele mulţimii M în cele două ecuaţii constatăm că ele admit aceeaşi rădăcină : $x = 4$.

Definiţie : Două ecuaţii în care necunoscuta aparţine aceleiaşi mulţimi şi cu aceleaşi rădăcini se numesc ecuaţii echivalente.

Ecuaţiile : $3x + 5 = 2x + 9$

$4x - 1 = x + 11,$

cu $x \in \{1, 2, 4\}$, sînt echivalente.

Proprietăţile ecuaţiilor

Proprietatea I

Dacă adunăm sau scădem la ambii membri ai unei ecuaţii acelaşi număr atunci obţinem o ecuaţie echivalentă cu cea dată.

Exemple:

1. Fie ecuaţia : $5x + 3 = 2x + 9$, cu $x \in \{0, 2, 5, 6\} = A$. Această ecuaţie are rădăcina $x = 2$. (A fost găsită verificînd pe rînd elementele mulţimii).

a) Adunăm la ambii membri ai ecuaţiei $5x + 3 = 2x + 9$, $x \in A$, numărul 6.

Obţinem : $5x + 3 + 6 = 2x + 9 + 6$.

Sau : $5x + 9 = 2x + 15$.

Se verifică că ecuaţia obţinută, $5x + 9 = 2x + 15$ $(x \in A)$, are rădăcina $x = 2$.

Ea este echivalentă cu cea dată :

$$5x + 3 = 2x + 9,\ x \in A.$$

b) Scădem din ambii membri ai ecuaţiei : $5x + 3 = 2x + 9$, $(x \in A)$ numărul 3.

Obţinem : $5x + 3 - 3 = 2x + 9 - 3,\ x \in A,$

sau : $5x = 2x + 6,\ x \in A.$

Se verifică că ecuaţia obţinută are rădăcina $x = 2$ şi în acest caz ea este echivalentă cu cea dată.

2. Fie ecuaţia : $4x - 5 = x + 10$, $x \in \{2, 5, 6\} = A$, cu rădăcina $x = 5$. (1)

a) Adunăm la ambii membri ai ecuaţiei numărul 5.
Obţinem :

$$4x + 5 - 5 = x + 10 + 5, \quad (x \in A)$$

$$4x + 0 = x + 10 + 5, \quad (x \in A)$$

$$4x = x + 15.$$

Ecuaţia obţinută este echivalentă cu prima, pentru că are rădăcina $x = 5$.

b) Scădem la ambii membri ai ecuaţiei obţinute: $4x = x + 10 + 5$ $(x \in A)$ numărul x. Obţinem:

$$4x - x = x + 10 + 5 - x, \qquad (x \in A)$$

$$4x - x = x - x + 10 + 5, \qquad (x \in A)$$

$$4x - x = 10 + 5. \ (x \in A) \qquad (2)$$

Comparînd ecuaţiile (1) şi (2), observăm:

— ecuaţia (2) are în membrul întîi, termeni ce conţin necunoscuta iar în membrul doi, termeni ce nu conţin necunoscuta.

— termenul -5 din membrul întîi al ecuaţiei (1) nu se găseşte în ecuaţia (2). În schimb, în membrul doi al ecuaţiei (2) se găseşte termenul $+5$ (opusul lui -5);

— termenul x din membrul doi al ecuaţiei (1) nu se găseşte în ecuaţia (2). În schimb, în membrul întîi al ecuaţiei (2) se găseşte termenul $-x$ (opusul lui x).

Aceste observaţii conduc la următoarea afirmaţie:

Într-o ecuaţie putem trece un termen dintr-un membru în altul cu semnul schimbat şi obţinem o ecuaţie echivalentă cu prima.

Proprietatea II

Dacă înmulţim sau împărţim ambii membri ai unei ecuaţii cu acelaşi număr diferit de zero, atunci obţinem o ecuaţie echivalentă cu cea dată.

Exemple:

1) Fie ecuaţia $2x + 1 = x + 5$ cu $x \in \{0, 3, 4, 8\} = A$. Rădăcina ei este $x = 4$. Înmulţim ambii membri ai ecuaţiei cu 3. Obţinem ecuaţia:

$$3(2x + 1) = 3(x + 5), \qquad x \in A,$$

sau:

$$6x + 3 = 3x + 15, \qquad x \in A.$$

Ecuaţia obţinută are rădăcina $x = 4$, deci este echivalentă cu cea dată.

2) Fie ecuaţia $6x = 30$ cu $x \in \{1, 5, 7, 10\} = B$. Rădăcina ei este $x = 5$.

Împărţim ambii membri ai ecuaţiei cu 2. Obţinem :

$$(6x) : 2 = 30 : 2, \qquad x \in B.$$

sau :

$3x = 15$, $x \in B$. Această ecuaţie are rădăcina $x = 5$, deci este echivalentă cu ecuaţia dată.

Rezolvarea ecuaţiilor

1) Dacă mulţimea în care se caută rădăcinile ecuaţiei are puţine elemente, atunci acestea se găsesc verificînd pe rînd toate elementele.

2) Dacă mulţimea are prea multe elemente, procedeul prin verificare durează prea mult.

În acest caz se folosesc proprietăţile ecuaţiilor, transformînd ecuaţia dată într-o ecuaţie echivalentă cu ea care se rezolvă mai uşor.

3.14. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Să se arate că următoarele perechi de numere naturale sînt echivalente : (5, 4) şi (3, 2) ; (1, 0) şi (2,1).

2. Să se scrie o pereche echivalentă cu perechea (4, 3) care are unul din termeni zero.

3. Să se determine numărul natural a, astfel încît perechile $(a, 0)$ şi (11, 7) să fie echivalente.

4. Să se determine numărul natural x, astfel încît perechile :

a) $(4, x)$ şi (0, 1);

b) (13, 0) şi $(x, 4)$;

c) (0, 413) şi $(14, x)$ să fie echivalente.

5. O echipă de fotbal a marcat într-un joc 2 goluri şi a primit 1 gol. O altă echipă a marcat 3 goluri şi a primit 2. a) Scrieţi aceste rezultate cu ajutorul perechilor; b) Sînt echipele la egalitate? Arătaţi aceasta prin echivalenţa perechilor; c) Dacă rezultatele celor două echipe sînt respectiv (4,1) şi (1,3), să se spună cîte goluri trebuie să mai dea echipa a doua ca să aibă rezultatul echivalent cu prima; d) Rezultatele celor două echipe sînt (0,2) şi (1,4); care este numărul minim de goluri necesare echipei a doua pentru a întrece prima echipă?

6. Se consideră mulţimea :

$$A = \{0, 2, 3, 4, 5\}.$$

a) Să se determine $x \in A$, astfel încît să avem :

$$(2x + 3, 5) \sim (5, 3).$$

b) Să se determine $x \in A$, din condiţia : $(2x - 4,2) \sim (x + 1,3)$.

7. Să se arate că dacă scădem din termenii perechii (10, 9) numărul 9, se obţine o pereche echivalentă cu ea.

8. Să se arate că dacă adunăm la termenii perechii (10,8), un acelaşi număr natural, de exemplu 4, se obţine o pereche echivalentă cu ea.

9. Să se scrie perechile echivalente cu perechea (5,6) care au cel de al doilea termen un divizor al numărului 6.

10. Să se scrie toate perechile echivalente cu perechea (2,3) care au primul termen un număr mai mic decît 20 şi multiplul lui 3.

11. Se dau perechile : (4, 5), (15, 20), (18, 18), (285, 304), (3500, 3500).

Să se sublinieze perechile echivalente cu perechea (0,0).

12. Să se calculeze sumele : $(3,5) + (1,2)$, $(4,5) + (4,4)$, $(118, 210) + (2,20)$.

13. Se dă mulţimea $A = \{1, 2, 3\}$. Să se scrie o pereche (a, b), $a \in A$, $b \in A$, echivalentă cu (1, 2).

14. Se dă mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Dacă $a \in A$ şi $b \in A$ să se scrie toate perechile (a, b) care au proprietatea $b = 2a$.

15. Să se determine x astfel încît să avem satisfăcute egalităţile :

$$(x, 3) + (2,0) = (5, 3) ;$$

$$(x + 3, 4) + (2, 2) = (5,6) ;$$

$$(3x + 1, 2) + (4, 5) = (11, 7).$$

16. Să se arate că nu există nici un număr natural x astfe încît să avem egalitatea : $(x + 1, 5) + (3, x + 2) = (4,10)$.

17. Să se determine numărul natural x, care satisface egalitatea :

$$(2x, 3) + (4, 5) + (2, 2) = (x + 7, 10).$$

18. Se consideră mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Să se scrie perechile (x, y) cu $x \in A$ şi $y \in A$ care sînt echivalente cu perechea (2,4).

b) Să se determine $x \in A$ astfel încît să avem egalitatea:

$$(x, 1) + (3, 3) = (4,4).$$

19. În tabelul alăturat sînt indicate valorile variabilelor *a*, *b*, *c*, *d*, *e* şi *f*.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1	2	4	5	3	1
6	7	2	3	1	4
0	4	2	2	1	2

Să se calculeze, în toate cele trei cazuri:

$$[(a, b) + (c, d)] + (e, f);$$

$$(a, b) + [(c, d) + (e, f)].$$

20. Să se scrie numerele întregi reprezentate de perechile:

$$(0,3),\ (4,0),\ (1, 3),\ (3, 1).$$

21. Să se scrie cîte o pereche de numere naturale care reprezintă numărul întreg -5 şi cîte o pereche de numere naturale care reprezintă numărul întreg $+5$, care au cîte un element egal cu 0.

22. Să se scrie ce numere întregi definesc următoarele clase de perechi de numere naturale:

$\{(4, 3), (508, 507), (75, 74), (191, 190), (301, 300)\}$,

$\{(2,3), (17, 18), (4954, 4955)\}$.

23. Să se scrie numerele întregi date de următoarele clase:

a) $\overline{(19, 410)}$; *b*) $\overline{(41,17)}$; *c*) $\overline{(0,19)}$; *d*) $\overline{(0, 0)}$;

e) $\overline{(413, 1279)}$; *f*) $\overline{(1415, 13)}$.

24. Scrieţi clasele care au un termen zero şi care definesc numerele întregi;
a) $+4$ respectiv -4; *b*) -20 şi $+20$; *c*) $-a$ şi $+a$, $a \in N$.

25. Scrieţi cinci reprezentanţi ai clasei care defineşte numărul întreg (-6).

26. Fie mulţimea $M = \{x \in N \mid x \leqslant 12\}$ şi $\overline{(x, 3)}$. Să se găsească mulţimea $A = \{x \in M \mid \overline{(x, 3)}$ să fie un număr întreg pozitiv$\}$.

27. Fie numărul întreg $x = (a, 7)$ unde $a \in N$. a) Să se afle cea mai mică valoare a lui a, astfel ca x să fie un număr întreg pozitiv; b) Să se afle cea mai mare valoare a lui a, astfel ca x să fie un număr întreg negativ; c) Să se determine a astfel ca x să fie numărul întreg zero.

28. Se dau perechile: $(x, 4)$, $(5, x)$, $(6, x)$.
Să se determine pentru fiecare pereche în parte cel mai mic număr natural x, astfel încît numerele întregi $\overline{(x, 4)}$, $\overline{(5, x)}$, $\overline{(6, x)}$ să fie pozitive.

29. Se dă perechea $(2x + 1, 3)$. Să se afle cel mai mic număr natural x astfel încît perechea $(2x + 1,3)$ să reprezinte un număr pozitiv. Ce număr natural este x astfel încît perechea $(2x + 1,3)$ să reprezinte un număr negativ?

30. Să se scrie 4 perechi de numere care reprezintă numărul $+5$ şi 4 perechi care reprezintă numărul -1.

31. Să se aleagă perechile de numere naturale care reprezintă numerele întregi $+7$ şi -3. Să se verifice relaţia: $(+7) + (-3) = (+4)$.

32. Să se scrie modulele numerelor care sînt elementele mulţimii: $A = \{8, -7, -3, 18, +1001, -400, 200\}$.

33. Se dau următoarele numere întregi: $\overline{(4,0)}$, $\overline{(3,8)}$, $\overline{(2,1)}$, $\overline{(1001, 101)}$. Să se scrie modulele lor.

34. Dacă două numere întregi sînt egale, modulele lor sînt egale. Exemple.

35. Dacă modulele a două numere întregi sînt egale, numerele întregi respective sînt egale? Exemple.

36. Să se calculeze:

a) $|8| + |-3| + |-8|$;

b) $|+100| + |0| + |-50| + |+1000|$;

c) $(|-5| \cdot 3+4 \cdot |-101|) \cdot 5 + |100| \cdot |-1| : 50$

d) $|70| + |+5| - (|70| : |10|) + 700 : |-100|$.

37. Să se scrie modulele următoarelor numere întregi:

-102, $+40$, -311, 0, -512.

38. Se consideră mulţimea : $A = \{x \in N \mid x$ este divizor al nnmărului $16\}$.

Să se determine submulţimea $B \subset A$ ale cărei elemente verifică inecuaţia : $x + 2 < 10$.

39. Să se arate că inegalitatea $|x| < 4$ este adevărată pentru orice element al mulţimii $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

40. Temperatura la Ploieşti a fost de $-13°$ iar la Predeal de $-19°$. Unde a fost temperatura mai scăzută? Să se exprime acest rezultat folosind semnul „mai mare'' sau „mai mic''.

41. Temperatura la Bucureşti a fost de $+2°$, iar la Săvineşti de $-1°$. Unde a fost mai ridicată? Să se exprime aceasta cu ajutorul relaţiei „mai mic".

42. Să se găsească valoarea de adevăr a propoziţiei : $x < y$

dacă : a) $x = 15, y = +20$; b) $x = 8, y = -30$;

c) $x = 0, x = 19$; d) $x = -30, y = -101$;

e) $x = -14, y = 80$.

43. Se dă mulţimea $A = \{x \in Z / -5 \leqslant x \leqslant 0\}$. a) Să se scrie mulţimea enumerînd elementele ; b) Să se scrie mulţimea

$M = \{y \mid y = x^2, x \in A\}$; c) Să se scrie $A \cap M$.

Ordinea numerelor întregi

44. Să se pună semnele „<" şi „>", după cum este cazul între numerele : a) -3 şi $+1$; b) -1 şi -9 ; c) -25 şi $+3$;

d) -50 şi -2 ; e) -100 şi -1 ; f) -27 şi 0.

45. Să se scrie în ordine crescătoare elementele mulţimii :

$M = \{-8, +20, -17, +200, 0, -5, +18, +1\}$.

46. Să se scrie în ordine descrescătoare elementele mulţimii :

$P = \{-3, -5, -4, -1, -2\}$.

47. Să se scrie în ordine crescătoare următoarele numere întregi :

$$\overline{(4, 0)}, \overline{(1,2)}, \overline{(3,1)}, \overline{(4,1)}, \overline{(5,0)}, \overline{(1,1)}.$$

48. Să se găsească cel mai mic număr natural a în aşa fel ca $\overline{(3, a)} < \overline{(4\ 2)}$.

49. Fie mulţimea $A = \{x \in N | x < 8\}$. *a*) Să se găsească mulţimea $M = \{a \in A / \overline{(2,0)} < \overline{(7,a)}\}$; *b*) Să se scrie numerele întregi de forma $(7, a)$ care îndeplinesc condiţia de la punctul *a*.

50. *a*) Să se scrie mulţimea $A = \{x \in Z \mid -2 < x < 1\}$.
b) Să se calculeze card A; *c*) Să se scrie mulţimea :

$$B = \{x \in A \mid x \in N\}.$$

51. Alegeţi unul din semnele „ $<$", „$\leqslant$" sau „ $=$ " şi scrieţi-l în pătrate astfel încît să avem satisfăcute relaţiile :

$\overline{(3, 4)} \square \overline{(2, 3)}, \overline{(5, 8)} \square \overline{(4,7)}.$

52. Să se scrie, enumerînd toate elementele din care este alcătuită, mulţimea :

$$A = \{x \in Z \mid -4 \leqslant x \leqslant 4\}.$$

53. Să se scrie mulţimea $M = \{-1, 0, +1, +2, +3\}$ indicînd o proprietate caracteristică a elementelor sale.

54. Se dau mulţimile :

$A = \{x \in Z \mid -3 \leqslant x < +4\}$,

$B = \{x \in Z \mid -4 \leqslant x \leqslant 2\}$.

Să se scrie mulţimea $A \cap B$.

55. În mulţimea numerelor întregi Z se consideră submulţimea :

$A = \{x \in Z \mid -4 < x < 4\}$.

Să se găsească toate numerele $x \in A$ care verifică inecuaţia : $|x^2| + 2 < 10$.

56. Se consideră mulţimea : $A = \{x \in Z / -1 \leqslant x \leqslant 1\}$.

Să se afle toate numerele întregi $x \in A$ care verifică egalitatea $|x| + 1 = 2$.

57. Se dau numerele :

$a = 3^2 - 5^2$; $b = 2^2 \cdot 3^2 - 5$

şi propoziţiile :

$a < b, a = b, a > b$.

Să se stabilească valoarea de adevăr a acestor propoziţii.

58. Se dă mulţimea:

$$A = \{-2,1,0\}$$

şi propoziţia $4x^2 - 3 = 2x + 1$.

Să se găsească numerele $x \in A$ pentru care această propoziţie este adevărată.

59. Să se rezolve ecuaţia: $4x - 1 = 3x + 4$, $x \in \{1, 6, 5\}$.

60. Să se rezolve ecuaţia: $4x^2 - 5x = 2x + 2$, $x \in \{1, 2\}$.

61. Să se cerceteze dacă ecuaţiile:

$3x + 5 = 6x + 2$;

$4x + 9 = 5x + 8$. $\qquad x \in \{1, 2, 3\}$

sînt echivalente.

62. Să se afle soluţiile ecuaţiilor, aplicînd proprietăţile:

$x + 5 = 2x - 9$, $\qquad x \in Z$;

$6x + 1 = 5x + 2$, $\qquad x \in Z$;

$x + 2x = 13 + 5$, $\qquad x \in Z$.

63. Se dau numerele:

$x = 2^2 \cdot 5 - 14$,

$y = 27 - 2 \cdot 3^2$

şi propoziţiile: $x = y$, $x < y$, $x > y$.
Care din aceste propoziţii sînt adevărate şi care false?

64. Dacă mărim de 5 ori un număr şi adăugăm la rezultat 24 obţinem 44. Să se afle numărul.

65. Un număr se măreşte de 8 ori iar din rezultat scădem 5 şi obţinem astfel 19. Să se afle numărul.

66. Un număr este de 7 ori mai mare decît altul. Diferenţa lor este 30. Să se afle numerele.

67. Una din laturile egale ale unui triunghi isoscel este de 3 ori mai mare ca baza lui. Să se afle laturile lui ştiind că perimetrul triunghiului este 105 cm.

68. Perimetrul unui triunghi isoscel este de 70 cm, baza lui este cu 2 cm mai mică decît una din laturile egale. Să se afle laturile triunghiului.

69. Perimetrul unui triunghi este de 280 cm. Se știe că a doua latură este mai mică decît prima cu 20 cm iar a treia este mai mare ca prima cu 30 cm. Să se afle laturile triunghiului.

70. Se dă mulțimea $A = \{-1, -2, 1, 0\}$.
Să se scrie elementele mulțimii A în ordine crescătoare și apoi să se scrie elementele mulțimii A în ordine descrescătoare.

71. Se dă mulțimea $B = \{-7, -8, +7, +5\}$. Să se scrie elementele mulțimii B în ordine crescătoare și apoi în ordine descrescătoare.

72. Să se compare numerele întregi x și y dacă:

a) $x = -4, y = -2$;   *c*) $x = -1, y = -4$;

b) $x = -6, y = 0$;   *d*) $x = 0, y = +1$.

74. Să se reprezinte pe axa numerică elementele mulțimii:

$A = \{x \in Z \mid -3 < x < +4\}$.

74. Să se scrie numerele $-10, -8, +7, +3, -2, 0, -1, +1$ în ordine descrescătoare, folosind semnul corespunzător inegalităților dintre ele.

75. Să se afle numerele întregi care verifică inegalitățile:

a) $-4 < x < 2$;   *c*) $-1 < x < 1$;

b) $+1 < x < +2$;   *d*) $-4 < x < 0$.

76. Să se afle numerele întregi y care verifică inegalitățile:

$-14 < y < -10$, $-85 < g < -83$, $-101 < y < -90$.

77. Să se scrie toate elementele mulțimilor:

$A = \{x \in Z \mid -3 < x < 2\}$, $B = \{x \in Z \mid -1 < x < 8\}$.

78. Se știe că a, b, c sînt numere întregi. Să se compare a și c, dacă se știe că:

a) $a < b$ și $b < c$;   *c*) $c > b$ și $a < b$;

b) $a > b$ și $b > c$;   *d*) $c < b$ și $a > b$.

79. Se dau mulțimile $A = \{x \in Z \mid -2 < x \leq 6\}$ și

$B = \{x \in Z \mid -2 < x \leq 4\}$.

Să se scrie mulțimile $A \cup B$ și $A \cap B$.

80. Se dau mulţimile: $A = \{x \in Z \mid -5 \leqslant x \leqslant -1\}$,

$$B = \{y \mid y = x^2,\ x \in A\}.$$

Să se calculeze c.m.m.c al elementelor mulţimii B.

81. Pe axa numerică, să se arate unde se va afla punctul M, dacă el se mută din origine spre dreapta 5 unităţi şi apoi spre stînga 2 unităţi.

82. Pe axa numerică, să se arate unde se va afla un punct care se mută din origine spre stînga 6 unităţi şi apoi spre dreapta 4 unităţi.

83. Să se găsească unde se va afla pe axa numerică un punct dacă el se va muta din originea O astfel:

a) la început $+8$ şi apoi $+2$;

b) la început -6 şi apoi $+4$;

c) la început -6 şi apoi $+8$;

d) la început $+8$ şi apoi -6.

84. Să se arate pe axa numerică adunarea următoarelor numere:

$$(+3) + (-5),\ (-6) + (-4),\ (-6) + (+7).$$

85. Să se verifice dacă sînt adevărate inegalităţile:

$(-5) + (+4) < (-6) + (-4)$;

$(-15) + (-6) < (-9) + (-13)$;

$(-11) + (-9) > (-12) + -8)$.

86. Să se completeze tabelele următoare:

x	y	$x+y$
-18	7	
-29	$+19$	
30	-6	

a	b	$a+b$
9	-50	
7	-30	
50	10	

87. Folosind axa numerică, să se afle sumele:

$(+8) + (+2)$; $(-7) + (+5)$; $(-10) + (+10)$;

$(+6) + (-5)$; $(-6) + (-2)$; $(+9) + (-12)$.

88. Să se verifice inegalitățile :

$(+11)+(-9)>(-10)+(+9)$;

$(+4)+(-24)<(-3)+(+24)$;

$(+18)+(+5)>(+18)+(-4)$;

$(-11)+(+6)<(-2)+(+3)$.

89. Să se aplice proprietatea de asociativitate și apoi să se calculeze sumele :

a) $(-3)+(+5)+(-3)$;

b) $(-7)+(+8)+(+7)$;

c) $(-9)+(+5)+(+9)+(-10)+$ $+(+9)+(+10)$;

d) $(-4)+(+5)+(+4)+(-5)+$ $+(+9)+(-14)$.

90. Să se calculeze sumele :

a) $(+7)+(-3)+(-4)$;

b) $(-7)+(-6)+(-5)$;

c) $(-7)+(-3)+(-2)$;

d) $(-3)+(-3)+(+6)$.

91. Să se schimbe ordinea termenilor și apoi să se calculeze sumele :

a) $(-3)+(+5)+(+3)$;

b) $(-7)+(+8)+(+7)$;

c) $(-8)+(+9)+(+8)$;

d) $(-3)+(+4)+(+3)+(-4)$.

92. Scrieți fiecare din numerele : $+10$, -14 $+9$ ca sumă a două numere întregi de același semn.

93. După ce se vor calcula sumele, să se scrie opusele lor

a) $(+5)+(-3)$;

b) $(-5)+(+20)$;

c) $(-12)+(-30)$;

d) $(+14)+(-30)$.

e) $(-30)+(+16)$.

94. Să se scrie opusul numărului x, dacă :

$$x \in \{-3, -2, +1, -6, +4\}.$$

95. Să se scrie elementele mulțimii $A=\{x \mid -12<x<-8\}$ ca sume de cîte trei numere întregi de același semn.

96. Să se rezolve ecuațiile :

a) $x-(+3)=+5$;

b) $(-3)-x=-15$;

c) $x+(+3)=-4$;

d) $(+5)+x=-9$.

97. Să se calculeze sumele:

a) $(3 - 7 + 12) + (-20 + 8) + (5 - 3 - 11)$;

b) $(-30 + 25 - 15) - (+20 - 15 + 3)$;

c) $(-15 + 20 + 10) - (10 + 13 - 5)$;

d) $(-3 + 5 - 4) - (-3 - 2 + 1)$.

98. Să se găsească elementele mulţimii:

$A = \{(x; y) \mid x - y = 7;\ x, y \in Z,\ -1 < x < 5\}$.

99. Să se verifice inegalităţile:

$|(-3) - (+8)| > |-3| - |+8|$;

$|(+18) - (+5)| \geq |+18| - |+5|$.

100. Să se calculeze opusele sumelor:

a) $(-5) + (-3)$; *b*) $(-5) + (-20)$; *c*) $(-12) + (-30)$.

101. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $x + (-4) = -5$; *c*) $(-4) - x + (-6) = -8$;

b) $(+5) - x + (-6) = -11$; *d*) $(-8) - (-6) + x = -1$.

102. Să se calculeze: $x = a - (b + c)$, dacă:

a) $a = -3$, $b = -1$, $c = +3$;

b) $a = -6$, $b = -8$, $c = -1$;

c) $a = +4$, $b = +1$, $c = -1$.

103. Să se calculeze:

a) $-8 - [(-3) + (+7)] - (-3 - 8 + 11)$;

b) $12 - [10 - 3 - (+9) + (-2) - 9] + 8$.

104. În exerciţiile care urmează, alegeţi şi scrieţi în pătrăţel unul din semnele: $<, >$ sau $=$, astfel încît propoziţiile obţinute să fie adevărate

$(-7) - (-4) \square (-3) - (-2)$;

$(-8) - (-6) \square (-6) - (-6)$.

105. Dimineaţa termometrul arată 5°. La amiază temperatura a urcat la 6°, iar spre seară a scăzut cu 2°, dimineaţa următoare

scăzînd din nou cu 8°. Ce temperatură arată termometrul în dimineaţa următoare?

106. Într-o clasă erau 46 elevi. Într-o zi au venit în clasă 4 elevi, iar în altă zi au plecat 6 elevi. Cîţi elevi sînt acum în clasă?

107. Într-un pachet erau 50 caiete, iar în al doilea erau cu m caiete mai mult decît în primul. Să se afle m dacă al doilea pachet are 80 caiete.

108. Să se verifice egalitatea : $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, dacă

a) $a = -1, b = -1, \ c = +7$; *b*) $a = -5, b = -8, c = +2$.

109. Să se efectueze înmulţirile :

a) $(-8) \cdot (+14) \cdot (+25)$;

b) $(-16) \cdot (-8) \cdot (-625)$;

c) $(-5) \cdot (-13) \cdot (+2)$.

110. Să se verifice egalitatea : $(-3)a = -(3a)$, cînd a este unul din numerele :

a) $a = -4$; *b*) $a = -3$; *c*) $a = 6$.

111. Să se verifice egalitatea : $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$, cînd :

1) $a = -2$, $b = -13$; 2) $a = -6$, $b = -4$.

112. Să se verifice egalitatea $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$, a şi b fiind următoarele numere întregi :

1) $a = 5$, $b = 6$. 2) $a = -3$, $b = -2$. 3) $a = -1$, $b = -2$.

113. Să se verifice egalitatea :

$$-m\,(a + b + c) = -ma - mb - mc, \text{ dacă :}$$

a) $m = 3$, $a = 4$, $b = -5$, $c = 6$.

b) $m = -4$, $a = -3$, $b = 2$, $c = 1$.

114. Folosiţi distributivitatea înmulţirii faţă de diferenţă şi

explicaţi următoarele egalităţi :

$$(+4) \cdot 0 = 0; \quad (-5) \cdot 0 = 0; \quad (-6) \cdot 0 = 0.$$

Indicaţie : Se va scrie numărul zero ca diferenţă a două numere.

115. Verificaţi dacă sînt adevărate inegalităţile :

$$(-8) \cdot (-2) < (-3) \cdot (-7); \quad (-9) \cdot (+2) < (-4) \cdot (+4).$$

116. Calculaţi produsul $a \cdot b$ cînd a şi b sînt numere cuprinse în tabelele de mai jos :

a	b	ab
−1	4	
−5	+6	
−8	−4	
−6	+3	

a	b	ab
−3	−2	
−5	−4	
+3	−9	
+6	−5	

117. Să se verifice egalităţile : $(-4a) : a = -4$, dacă :

a) $a = -8$; b) $a = -4$; c) $a = -6$.

118. Să se calculeze :

$$-3 \cdot (-4) + (-5) + 3(+24);$$
$$-16 : (-3 + 4)\,2 - 2(-6 - 5);$$
$$-16 : (+4) + 20 : (-4);$$
$$(-18) : (-3) + (-15) : (-5);$$
$$(-18) : (3 - 5) + (-4) : (-4);$$
$$(-4) \cdot (-15) : (-5) + (-18) : (-9).$$

119. Să se scrie ca un produs următoarele sume :

$$-5a + 8a - 9a; \quad -ma + mb - mc.$$

120. Să se scrie ca un produs suma :

$$-2x + 6x - 3x,$$

şi apoi să se scrie sub formă mai simplă.

121. Să se calculeze :

$(-625) : (+25)$; $\qquad (-180) : (+20)$;

$(-64):(+16)$; $(-6\cdot 615):(-63)$;

$(-26\,460):(-105)$; $(+10\cdot 605):(-101)$;

$(+19\,695):(-101)$; $(+43\cdot 290):(-222)$;

$(-120):(+12)$;

$(+9\,975):(-105)$;

$(-31\,815):(-105)$.

122. Să se rezolve ecuaţiile:

$x\cdot(-4)=+16$; $x:(-7)=-56$; $x:(-3)=63$. $(x\in Z)$.

123. Să se determine numerele întregi x care verifică dubla inegalitate: $(-4)\cdot(+5)<x<1$.

Capitolul 4

NUMERE RAȚIONALE

4.1. FRACȚII ECHIVALENTE

Să luăm pe axa numerelor segmentul $\overline{OA}$ cu originea în punctul O și extremitatea în punctul A, astfel încît $\overline{OA} = 1$ (fig. 4.1).



Fig. 4.1

Punctele B și C împart segmentul $\overline{OA}$ în trei părți egale: $\overline{OB} = \overline{BC} = \overline{CA}$. Punctelor B și C le corespund fracțiile $\frac{1}{3}$ și $\frac{2}{3}$. Numitorul fiecărei fracții arată în cîte părți egale a fost împărțit segmentul unitate. Numărătorul arată cîte puncte de diviziune s-au numărat de la O spre dreapta (fig. 4.2).

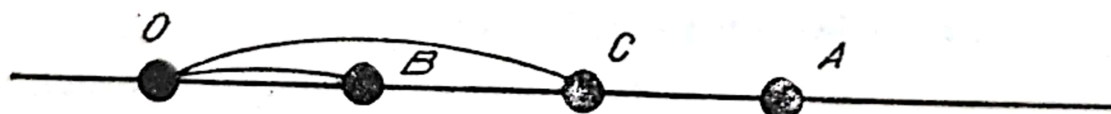


Fig. 4.2

Să împărțim acum segmentul OA în 6 părți egale. Punctelor B și C le corespund fracțiile $\frac{2}{6}$ și $\frac{4}{6}$(fig. 4.3).

Fracţiile care indică acelaşi punct pe axă şi care caracterizează

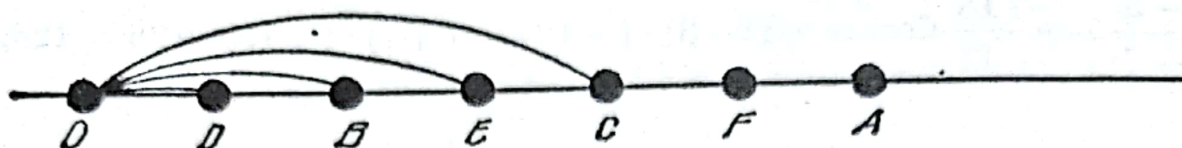


Fig. 4.3

o aceeaşi mărime se numesc echivalente.

Se scrie $\frac{1}{3} \sim \frac{2}{6}$ şi se citeşte : fracţia $\frac{1}{3}$ este echivalentă cu fracţia $\frac{2}{6}$. În mod asemănător $\frac{2}{3} \sim \frac{4}{6}$.

Observaţie Pentru a simplifica tehnica de calcul cu numere raţionale, se foloseşte în locul semnului $\sim$ (echivalenţa) semnul „=".

În acelaşi mod se stabilesc echivalenţele (fig. 4.4) :

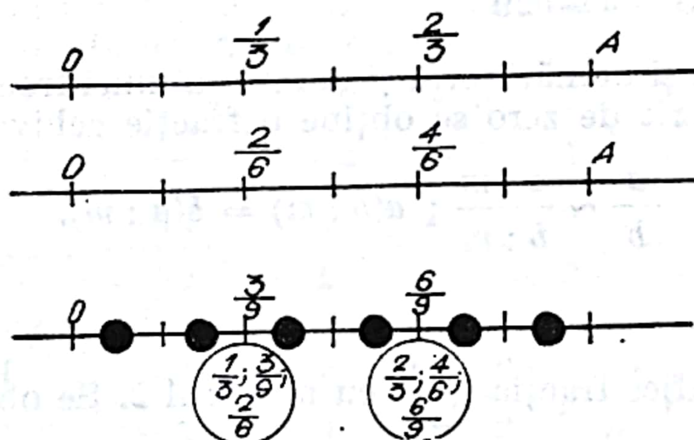


Fig. 4.4

$$\frac{1}{3} \sim \frac{2}{6} \sim \frac{3}{9}$$

$$\frac{2}{3} \sim \frac{4}{6} \sim \frac{6}{9}.$$

Procedeul de a stabili dacă două fracţii sînt echivalente prin reprezentarea lor pe o axă devine incomod în cazul cînd numitorul şi numărătorul fracţiilor sînt numere foarte mari. În general două fracţii $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ sînt echivalente dacă $ad = bc$.

Exemplu :

$$\frac{-3}{+7} \sim \frac{+18}{-42} \text{ deoarece} : (-3) \cdot (-42) = (+7) \cdot (+18) ; 126 = 126.$$

4.2. AMPLIFICAREA ŞI SIMPLIFICAREA FRACŢIILOR

Dacă înmulţim numărătorul şi numitorul unei fracţii cu acelaşi număr diferit de zero se obţine o fracţie echivalentă cu prima :

$$\frac{a}{b} \sim \frac{am}{bm} \text{ deoarece } a(bm) = b(am) ; \; abm = abm.$$

Exemplu :

Să amplificăm fracţia $\frac{-4}{+5}$ cu numărul -4 şi obţinem $\frac{16}{-20}$.

Avem : $\frac{-4}{5} \sim \frac{16}{-20}$ deoarece : $(-4)(-20) = 5 \cdot 16$.

Dacă împărţim şi numărătorul şi numitorul unei fracţii cu un acelaşi număr diferit de zero se obţine o fracţie echivalentă cu ea :

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a:m}{b:m} ; \; a(b:m) = b(a:m).$$

Exemplu :

Să se simplifice fracţia $\frac{6}{-4}$ cu numărul 2. Se obţine :

$\frac{6:2}{-4:2} = \frac{3}{-2}$. Avem : $\frac{6}{-4} \sim \frac{3}{-2}$; $6(-2) = (-4)(3)$.

4.3. NUMERE RAŢIONALE

Toate fracţiile echivalente cu o fracţie dată $\frac{a}{b}$ alcătuiesc o mulţime, numită clasa fracţiilor echivalente cu $\frac{a}{b}$.

O clasă de fracții echivalente cu fracția $\frac{a}{b}$ se numește număr rațional.

Numărul rațional se notează cu oricare din fracțiile care aparțin clasei.

Numărul rațional : $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{-1}{-2}, \frac{3}{6}, \frac{-3}{-6} \dots\right\}$ se poate nota cu $\frac{1}{2}$ sau $\frac{2}{4}$ sau $\frac{-1}{-2}$ ș.a.m.d.

Un număr rațional este pozitiv dacă numărătorul și numitorul fracției cu care este scris numărul rațional sînt de același semn. Un număr rațional este negativ dacă numărătorul și numitorul fracției cu care este scris numărul sînt de semne diferite.

Două numere raționale $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ sînt egale, dacă fracțiile cu care sînt scrise numerele sînt echivalente, adică dacă $a \cdot d = b \cdot c$. Numerele raționale formează o mulțime numită mulțimea numerelor raționale. Această mulțime se notează cu litera Q.
Orice număr întreg poate fi scris ca un număr rațional care se notează cu o fracție cu numitorul 1.

$$+3 \cong \left\{\dots, \frac{-9}{-3}, \frac{-6}{-2}, \frac{-3}{-1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \dots\right\}.$$

$$-6 \cong \left\{\dots, \frac{-12}{2}, \frac{-6}{1}, \frac{6}{-1}, \frac{12}{-2}, \frac{18}{-3}, \dots\right\}.$$

Numărul întreg a este :

$$a \cong \left\{\dots, \frac{-2a}{-2}, \frac{-a}{-1}, \frac{a}{1}, \frac{2a}{2}, \frac{3a}{3}, \dots\right\}.$$

4.4. REPREZENTAREA PE O DREAPTĂ A NUMERELOR RAȚIONALE

Să se reprezinte pe axă numărul $\frac{5}{3}$. Pentru aceasta fixăm originea și alegem segmentul unitate (fig. 4.5).

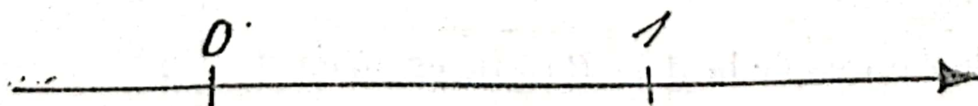


Fig. 4.5

Luăm un segment egal cu $\frac{1}{3}$ din segmentul unitate și îl purtăm spre dreapta, începînd din origine, de 5 ori; extremitatea din dreapta a ultimului segment ne dă punctul corespunzător numărului $\frac{5}{3}$ (fig. 4.6).

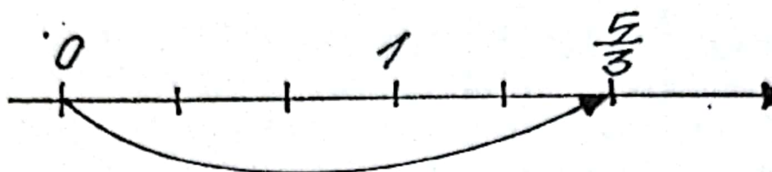


Fig. 4.6

Să se reprezinte pe axă $-\frac{5}{3}$. Pentru a găsi punctul care corespunde lui $-\frac{5}{3}$ purtăm, de 5 ori, spre stînga, începînd din origine, segmentul egal cu $\frac{1}{3}$ din segmentul unitate; extremitatea din stînga ultimului segment reprezintă punctul ce corespunde numărului $-\frac{5}{3}$ (fig. 4.7).

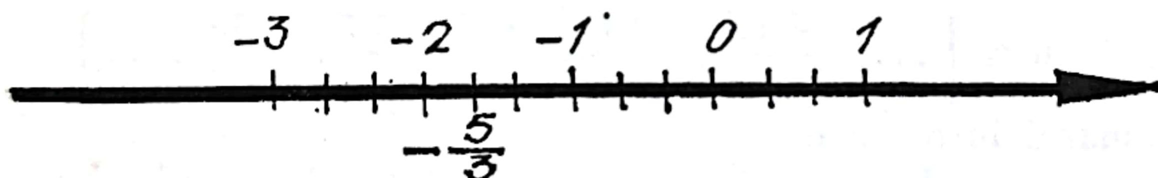


Fig. 4.7

4.5. ADUNAREA NUMERELOR RAȚIONALE

Exemplul 1

Să se reprezinte pe axă punctele A și B în următoarele condiții:

1) deplasarea de la O la A să fie egală cu $+\frac{3}{5}$;

2) deplasarea de la A la B să fie egală cu $+\frac{4}{5}$.

3) Atunci, deplasarea de la O la B este egală cu $+\frac{7}{5}$ (fig. 4.8).

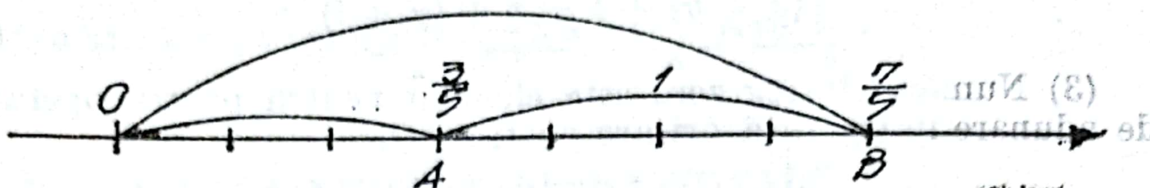


Fig. 4.8

Deci, putem scrie:

$$\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(+\frac{4}{5}\right)=\frac{(+3)+(+4)}{5}=+\frac{7}{5}.$$

Exemplul 2

Să se reprezinte pe axă punctele M şi P în următoarele condiţii:

1) deplasarea de la O la M să fie egală cu $-\frac{4}{7}$;

2) deplasarea de la M la P să fie egală cu $-\frac{6}{7}$;

3) Atunci, deplasarea de la O la P este egală cu $-\frac{10}{7}$ (fig. 4.9).

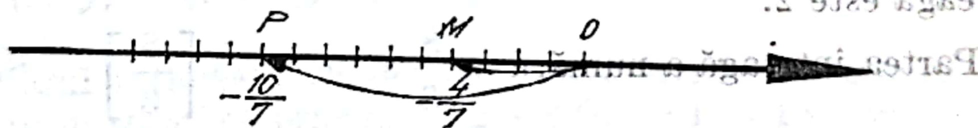


Fig. 4.9

Dacă două numere raţionale sînt scrise cu fracţii care nu au numitori egali, atunci înlocuim aceste fracţii cu fracţii echivalente, dar care au numitori egali (le aducem la acelaşi numitor).

4.6. PROPRIETĂŢILE OPERAŢIEI DE ADUNARE ÎN Q

(1) Operaţia de adunare în Q este comutativă. Oricare ar fi $x \in Q$ şi $y \in Q$, avem:

$$x+y=y+x.$$

(2) Operaţia de adunare în Q este asociativă. Oricare ar fi $x \in Q$, $y \in Q$, $t \in Q$, avem :

$$(x + y) + t = x + (y + t) .$$

(3) Numărul întreg zero este element neutru pentru operaţia de adunare în Q, adică oricare ar fi $x \in Q$,

$$x + 0 = x .$$

Propoziţia „numărul raţional y este un număr negativ" se scrie : $y < 0$.
Propoziţia „numărul raţional x este un număr pozitiv" se scrie : $x > 0$.
Orice număr negativ este mai mic decît orice număr pozitiv.

4.7. PARTEA ÎNTREAGĂ A UNUI NUMĂR RAŢIONAL

Partea întreagă a unui număr raţional este cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu numărul raţional dat.

Partea întreagă a numărului $\frac{8}{3}$ o stabilim astfel : punctul corespunzător numărului $\frac{8}{3}$ se găseşte reprezentat între punctele corespunzătoare numerelor întregi consecutive 2 şi 3. Partea lui întreagă este 2.

Partea întreagă a numărului $\frac{8}{3}$ se notează $\left[\frac{8}{3}\right]$. Se citeşte „partea întreagă a numărului $\frac{8}{3}$".

4.8. PARTEA FRACŢIONARĂ A UNUI NUMĂR RAŢIONAL

Diferenţa dintre un număr raţional x şi partea sa întreagă se numeşte *partea fracţionară* a numărului.

Prin urmare $x - [x]$ este partea fracţionară a numărului x.
Exemplu :

$$\left[\frac{7}{3}\right] = 2$$

$$\frac{7}{3} - \left[\frac{7}{3}\right] = \frac{7}{3} - 2 = \frac{7-6}{3} = \frac{1}{3}$$

Prin urmare partea fracţionară a lui $\frac{7}{3}$ este $\frac{1}{3}$.

4.9. ÎNMULŢIREA NUMERELOR RAŢIONALE

Produsul a două numere raţionale $x = \frac{a}{b}$ şi $y = \frac{c}{d}$ $(b \neq 0, d \neq 0)$ este numărul raţional $xy = \frac{ac}{bd}$.

4.10. PROPRIETĂŢILE ÎNMULŢIRII

1) Înmulţirea numerelor naturale este comutativă, oricare ar fi numerele raţionale x şi y, avem : $x \cdot y = y \cdot x$.

2) Înmulţirea în Q este asociativă, oricare ar fi numerele raţionale x, y, t, avem :

$$(x \cdot y) \cdot t = x \cdot (y \cdot t)$$

Datorită proprietăţilor de asociativitate şi comutativitate produsele $(x \cdot y) \cdot t$ şi $x \cdot (y \cdot t)$ se pot scrie $x \cdot y \cdot t$, adică fără paranteze.

3) Numărul raţional unu este element neutru pentru operaţia de înmulţire în Q, adică oricare ar fi $x \in Q$, $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

4) Oricare ar fi numărul raţional $\frac{a}{b} \neq 0$ $(b \neq 0)$ există un număr raţional $\frac{b}{a}$ numit inversul lui $\frac{a}{b}$ astfel că $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Inversul numărului raţional $x \neq 0$ se notează $\frac{1}{x}$.

Observaţie : Dintre mulţimile N, Z, Q numai mulţimea Q posedă element invers pentru oricare element diferit de zero în raport cu operaţia de înmulţire.

5) Înmulţirea este distributivă faţă de adunare, respectiv scădere, adică oricare ar fi $x, y, z \in Q$, avem :

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

respectiv :

$$x \cdot (y - z) = (x \cdot y) - (x \cdot z).$$

4.11. ECUAŢII ÎN Q

1) Să se rezolve ecuaţia : $ax = b$, unde a şi $b \in Q$ şi $a \neq 0$. Înmulţim ambii membri cu $\frac{1}{a}$ (inversul lui a) :

$$\frac{1}{a} \cdot ax = \frac{1}{a} \cdot b; \ 1 \cdot x = \frac{b}{a}; \quad x = \frac{b}{a}.$$

Verificare : $a \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{a} = b.$

Deci soluţia ecuaţiei este : $x = \frac{b}{a}$.

În cazul ecuaţiei $ax = b$ ($a \in Q, b \in Q, a \neq 0$), în loc să înmulţim ambii membri cu inversul lui a, putem spune că împărţim ambii membri cu a.

Concluzie :

1) Dacă $a \neq 0$, ecuaţia $ax = b$ are ca soluţie $x = \frac{b}{a}$. Ea este o ecuaţie *determinată*.

2) Dacă $a = 0$ şi $b = 0$ atunci ecuaţia $0 \cdot x = 0$ admite ca soluţie orice $x \in Q$. Ea este o ecuaţie *nedeterminată*.

3) Dacă $a = 0$ şi $b \neq 0$ ecuaţia $0 \cdot x = b$ nu are nici o soluţie. Ea este o ecuaţie *imposibilă*.

4.12. FRACŢII ZECIMALE

Fracţiile care au numitori o putere oarecare a lui 10, ca de exemplu : $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{273}{1000}$, $\frac{13}{10^8}$, se numesc *fracţii zecimale*.

Pentru scrierea fracţiilor s-au folosit două numere întregi. Pentru fracţiile zecimale se foloseşte şi o scriere poziţională, ca de exemplu:

$$\frac{7}{10} \text{ se mai scrie } 0{,}7 \text{ sau } \frac{7}{10} = 0{,}7;$$

$$\frac{3}{100} = 0{,}03; \quad \frac{273}{1000} = 0{,}273; \quad \frac{563}{10} = 56{,}3; \quad \frac{28546}{1000} = 28{,}546.$$

Reţinem că orice fracţie zecimală poate fi scrisă în două moduri:

a) cu ajutorul liniei de fracţie;

b) poziţional, folosind virgula.

Pentru a scrie poziţional o fracţie zecimală, procedăm astfel: scriem numărătorul fracţiei şi despărţim, începînd din dreapta spre stînga, atîtea cifre cîte zerouri are numitorul; dacă numărătorul nu are suficiente cifre, atunci adăugăm zerouri spre stînga, pînă cînd obţinem numărul de cifre necesar, după care punem virgula, iar în stînga virgulei scriem încă un zero.

Exemplu

$$\frac{78}{10} = 7{,}8; \quad \frac{543}{10} = 54{,}3; \quad \frac{543}{100} = 5{,}43; \quad \frac{74}{100} = 0{,}74;$$

$$\frac{74}{1000} = 0{,}074; \quad \frac{74}{10000} = 0{,}0074.$$

Scriem aceste fracţii zecimale şi cu ajutorul liniei de fracţie:

$$7{,}8 = \frac{78}{10}; \quad 54{,}3 = \frac{543}{10}; \quad 5{,}43 = \frac{543}{100}.$$

Puterea unui număr raţional

Prin scrierea prescurtată x^n; $x \in Q$, $n \in N$, se înţelege produsul în care factorul x se repetă de cîte ori arată numărul natural n:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \ldots x}_{n \text{ ori.}}$$

Proprietăţi

Fie $x \in Q$; $m, n \in N$

a) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$;

b) $x^m : x^n = x^{m-n}$;

c) $(x^m)^n = x^{mn}$;

d) $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

Exemplu :

$$\left(-\frac{4}{1}\right)^{-3} = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{4^3}$$

4.13. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Să se stabilească dacă următoarele propoziţii sînt adevărate sau false :

$$a) -\frac{3}{2} \sim -\frac{6}{4};\ b) -\frac{3}{2} \sim \frac{6}{-4};\ c) \frac{-5}{-4} \sim \frac{-10}{-8}.$$

2. Să se stabilească dacă următoarele propoziţii sînt adevărate sau false :

$$a) \frac{-6}{+2} \sim \frac{-16}{8};\quad b) \frac{-3\,250}{16} \sim \frac{-4\,800}{24}.$$

3. Folosind amplificarea să se scrie şase fracţii echivalente respectiv cu fracţiile : $\frac{-1}{-3}$, $\frac{-4}{5}$, $\frac{-4}{-3}$.

4. Să se scrie fracţiile echivalente cu fracţia $\frac{-7}{6}$ astfel ca să aibă numitorii : *a*) 12 ; *b*) -18 ; *c*) 30.

5. Să se scrie fracţiile echivalente cu fracţia $\frac{5}{-3}$ care să aibă numitorii :

a) 6 ; *b*) -15 ; *c*) 27.

6. Se dau fracţiile : $\frac{2}{3}$, $\frac{-3}{4}$, $\frac{1}{6}$. Scrieţi fracţiile echivalente cu acestea, astfel ca ele să aibă numitorii :

a) 12 ; *b*) −60 ; *c*) $12x$, ($x \in Z$, $x \neq 0$).

7. Se dau fracţiile zecimale 0,2 ; −2,56 ; 31,23 ; −0,42. Să se înmulţească cu 10, 10^2, 10^3, 10^4.

8. Să se găsească $x \in Z$ astfel ca : $\frac{8}{6} \sim \frac{4}{x}$.

9. Să se găsească $x \in Z$ astfel ca : $\frac{x}{-4} \sim \frac{1}{2}$.

Simplificarea

10. Să se verifice dacă următoarele propoziţii sînt adevărate :

a) $\frac{-256}{-192} \sim \frac{4}{3}$; *b*) $\frac{52}{28} \sim \frac{13}{7}$; *c*) $\frac{-24}{-18} \sim \frac{4}{3}$;

d) $\frac{6\,000}{8\,000} \sim \frac{3}{4}$; *e*) $\frac{-10\,500}{8\,400} \sim \frac{-5}{4}$; *f*) $\frac{-3\,564}{2\,592} \sim \frac{11}{8}$.

Scrieţi cu ce numere au fost simplificate primele fracţii ca să obţinem fracţiile din membrul doi.

11. Să se scrie mulţimea tuturor fracţiilor echivalente cu fracţia $\frac{-24}{18}$, folosind simplificarea.

12. Să se scrie fracţiile ireductibile echivalente cu următoarele fracţii :

$$\frac{6}{9}, \quad \frac{-5}{15}, \quad \frac{25}{-20}, \quad \frac{360}{480}, \quad \frac{87}{116}.$$

13. Se dau fracţiile $\frac{-24}{16}$ şi $\frac{27}{24}$. Să se scrie fracţiile echivalente cu acestea care să aibă numitori egali, folosind simplificarea.

10 — c. 1782

14. Să se simplifice fracţiile:

$$\frac{528}{256}, \quad \frac{-840}{-540}, \quad \frac{-555}{135}, \quad \frac{5\ 145}{888}, \quad \frac{7 \cdot 3 \cdot 9}{1 \cdot 7 \cdot 2}, \quad \frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{2},$$

$$\frac{19 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 11}{22 \cdot 4 \cdot 20}, \quad \frac{-15 \cdot 6 \cdot 13}{26 \cdot 18 \cdot 25}, \quad \frac{-22 \cdot (-56) \cdot 24}{18 \cdot 28 \cdot 18},$$

$$\frac{52 \cdot 15 \cdot 29}{26 \cdot (-58)}, \quad \frac{14 \cdot (-25) \cdot (-21) \cdot 42}{56 \cdot (-75) \cdot (42) \cdot 49}.$$

15. Să se scrie o fracţie care are ca numitor c.m.m.d.c. al numerelor 28, —49, 98.

16. Determinaţi de fiecare dată numărul $a \in Z$ astfel ca următoarele propoziţii să fie adevărate:

a) $\frac{a+1}{5} = -\frac{3}{1}$; *b*) $\frac{a+1}{11} = +\frac{7}{1}$; *c*) $\frac{a-4}{3} = -\frac{6}{1}$;

d) $\frac{8+3}{4} = \frac{a+2}{5}$; *e*) $\frac{2a+4}{4} = \frac{3a+6}{6}$;

f) $\frac{3a+5}{2} = \frac{7a+4}{5}$.

17. Se dau mulţimile $A = \{-1, 2, -3\}$, $B = \{+3, -4\}$. Să se scrie mulţimea:

$$C = \left\{ x = \frac{a}{b} \mid a \in A \text{ şi } b \in B \right\}.$$

18. Se dă mulţimea $C = \{+2;\ 4;\ 3{,}24;\ +0{,}25;\ -0{,}125;\ 0{,}8;\ -0{,}56;\ -0{,}375;\ -4{,}25;\ +0{,}75\}$. Să se scrie elementele mulţimii C cu reprezentanţi fracţii ireductibile.

19. Se dă numărul $\frac{4}{a}$ cu $a \in Z$ şi $a \neq 0$. Să se determine a astfel ca numărul să fie întreg.

20. Se dă numărul $\frac{5}{a+3}$ cu $a \in N$. Să se determine a, astfel ca numărul să fie întreg.

21. Să se calculeze:

a) $+\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$; $\quad -\frac{2}{8} + \left(-\frac{1}{8}\right)$;

$-\frac{12}{20} + \frac{10}{20}$; $\quad -\frac{15}{17} + \left(+\frac{11}{17}\right)$.

22. *a)* $$\frac{\frac{7}{9} + \frac{7}{12}}{\frac{7}{9} - \frac{7}{12}} - \frac{\frac{7}{9} - \frac{7}{12}}{\frac{7}{9} + \frac{7}{12}};$$

b) $$\left(\frac{5}{18} \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{57}{256} \cdot \frac{64}{171} \cdot 2\frac{2}{15} \cdot 2\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8}\right);$$

c) $$\left(18\frac{1}{5} : 15 + 8\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{2}\right) : \left[\left(12\frac{1}{3} + 8\frac{6}{7}\right) \cdot \frac{7}{18}\right];$$

d) $$\frac{\frac{27}{8} : \frac{3}{2}}{\frac{35}{12} : \frac{7}{8}} : 1\frac{2}{3};$$

e) $$\frac{8 : 2\frac{2}{5}}{5\frac{1}{4} : 7} : \frac{2\frac{1}{7} : \frac{5}{7}}{4 : \frac{8}{9}}.$$

23. *a)* $15\frac{7}{13} + 4\frac{8}{15} + 6\frac{6}{13}$; *b)* $3\frac{4}{15} + \left(11\frac{11}{15} + 6\frac{6}{9}\right)$;

c) $4\frac{11}{12} + \left(7\frac{23}{64} - 2\frac{5}{12}\right)$;

d) $\left(10\frac{5}{7} + 15\frac{10}{21} + 20\frac{5}{28}\right) : 5;$

e) $\left(2\frac{1}{4} + 1\frac{1}{12} + \frac{3}{8}\right) \times 24;$

f) $20\frac{13}{25} - \left(11\frac{3}{25} + 5\frac{1}{10}\right);$

g) $33\frac{31}{32} - \left(14\frac{15}{32} - 8\frac{1}{2}\right);$ *h*) $\left(3\frac{1}{3} - 2\frac{6}{7}\right) : 10;$

i) $\left(4\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{5}{9}\right) : 1\frac{1}{2};$

j) $14\frac{2}{5} : \left(\frac{3}{10} \cdot 2\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9}\right).$

Să se rezolve ecuaţiile:

24. *a*) $12\frac{1}{3} : \left\{\left[2\frac{3}{4} : \left(3\frac{1}{3} - 1\frac{7}{8} \cdot x\right)\right] \cdot \frac{8}{11} + 1\frac{2}{3}\right\} = 5;$

b) $\left\{\left[10\frac{17}{40} - \left(12\frac{1}{2} - x\right)\right] + 6\frac{47}{60}\right\} : 22\frac{11}{36} = \frac{15}{22};$

c) $\left\{\frac{5\frac{5}{8} : \left[\left(2\frac{11}{15} - x\right) \cdot 2\frac{1}{2} - \frac{7}{12}\right]}{5\frac{2}{5}}\right\} : 9\frac{7}{27} = \frac{1}{5}.$

Să se calculeze:

25. *a*) $3\frac{7}{24} + \left(5\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{8} + 5\frac{1}{4} : 2\frac{1}{3}\right) : 3;$

b) $10\frac{2}{21} + \left(7\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{3} - 12\frac{1}{4} : \frac{7}{9}\right) : 6.$

26. *a*) $48 : 6\frac{2}{5} - \left(18 : 5\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2}{3}$;

b) $1\frac{1}{22} \cdot 3\frac{2}{3} - \left(3\frac{5}{6} : 3\frac{2}{7} + 2\frac{5}{6}\right) : 1\frac{2}{3}$;

c) $\left(13\frac{2}{7} : 6\frac{1}{5} - \frac{5}{6} : \frac{3}{4}\right) : \left(41\frac{4}{21} - 32\frac{1}{2} \times 1\frac{113}{455}\right)$.

27. *a*) $100\frac{17}{36} + \left[22\frac{1}{72} + \left(15\frac{3}{4} - 8\frac{1}{8} - 7\frac{1}{2}\right)\right]$;

b) $\frac{5}{26} \cdot 24 - \frac{3}{8} - 12 + \frac{7}{9} \cdot 15$;

c) $\dfrac{1}{\left(1 : \frac{2}{3} - 1 : 2\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{13}{29}}$.

28. *a*) $\left[\dfrac{\left(3\frac{2}{3} + 1\frac{4}{7}\right) \cdot \left(13\frac{1}{3} - 3\frac{1}{13}\right)}{\left(3\frac{2}{3} - 1\frac{4}{7}\right) \cdot \left(13\frac{1}{3} + 3\frac{1}{13}\right)}\right] :$

$: \dfrac{5\frac{1}{2} + 1\frac{3}{8}}{\left(5\frac{1}{2} - 1\frac{2}{8}\right) : \frac{2}{3}}$;

b) $\left[83 - \left(2\frac{1}{2} \cdot 7 + 12 : 5\right)\right] :$

$: \left[\left(6\frac{7}{12} + 9\frac{3}{8}\right) \cdot 4\frac{4}{5} - 55\frac{17}{30}\right]$;

c) $56\frac{23}{40} : \left[\left(3\frac{2}{3}\cdot 4 + 8\frac{1}{4}\cdot 5\frac{2}{5}\right) - \right.$

$\left. - \left(7 : \frac{14}{23} + 12\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}\right)\right].$

29. a) $\left[\left(\frac{40}{63} - \frac{8}{21}\right) : 20 + \left(5\frac{5}{9} - \frac{7}{18}\right) : \right.$

$\left. : 35 - \left(\frac{83}{90} - \frac{41}{50}\right) : 2\right] \cdot 21;$

b) $\left[\left(7 - 4\frac{13}{16}\right) : 4\frac{1}{4} + \left(13\frac{1}{3} - 7\frac{5}{6}\right) : \right.$

$\left. : 2\frac{1}{5} - 6\frac{5}{6} : 2\frac{19}{33}\right] \cdot 5\frac{2}{3}.$

30. a) $\left[\left(1 - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{21}\right) + \left(\frac{1}{21} - \frac{1}{31}\right) + \right.$

$\left. + \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{41}\right) + \left(\frac{1}{41} - \frac{1}{51}\right)\right] : \frac{15}{17};$

b) $\left[\left(3\frac{2}{5} - \frac{10 - \frac{1}{4}}{3}\right) \cdot 1\frac{3}{5} - \frac{\frac{1}{7} + \frac{1}{2}}{11\frac{65}{77} + \frac{2}{33}}\right] \cdot$

$\cdot 1\frac{2}{3} : 15\frac{1}{2};$

c) $\left[\frac{\left(37\frac{2}{5} - 18\frac{6}{7}\right) \cdot 11\frac{2}{3}}{13\frac{4}{9} - 11\frac{11}{18}} - \right.$

$$- \frac{\left(2\frac{3}{20} - \frac{11}{30}\right) \cdot \frac{6}{7}}{\left(1\frac{3}{100} - \frac{17}{20}\right) : 6\frac{3}{10}}\Bigg] : 21\frac{1}{2}.$$

31. Să se afle x:

a) $12 - \left[30 - 19\frac{1}{2} : \left(2\frac{3}{4} - \frac{3}{5}x\right)\right] \cdot \frac{23}{55} + 10 = 13;$

b) $\left\{\left(\frac{\frac{3}{10}x + 2\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{4}{7}} + 5\frac{5}{8}\right) : \frac{219}{12}\right\} : \frac{5}{2} = \frac{1}{5};$

c) $1\frac{7}{10} : \frac{\left(1\frac{2}{3}x + 3\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{8}{135}}{\frac{5}{9}} = 1\frac{5}{12}.$

32. a) $\left[2\frac{7}{36} - \left(\frac{\frac{47}{72}}{3\frac{1}{3} - x} + \frac{20}{27}\right) + 1\frac{19}{72}\right] :$

$$\cdot \frac{44}{75} - 1\frac{3}{10} = \frac{1}{6};$$

b) $\left[6\frac{1}{5} + \frac{57}{16} : \left(\frac{2\frac{3}{4}}{3\frac{1}{3}x - 45} - \frac{7}{24}\right)\right] \cdot$

$$\cdot \frac{3}{38} = 1\frac{1}{5}.$$

33. Să se calculeze :

$$a)\ \left\{\left(-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)^2:\left(\frac{5}{5}-\frac{1}{2}\right)^2\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\left(-\frac{3}{2}-\frac{5}{3}\right):\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right\}.$$

34. $$\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(-2+\frac{5}{4}\right)\right\}:\left\{\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right):\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\right\}+$$

$$+\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{3}-1\right)\right\}.$$

35. $$\left(\frac{\frac{5}{4}3-\frac{4}{3}}{-4+\frac{2}{5}-\frac{3}{2}}\right)\cdot\frac{\left(\frac{2}{7}-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{11}+3\right)}{\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{5}-2\right)}.$$

36. $$\left(\frac{\frac{8}{3}-2+\frac{1}{2}}{-4+\frac{3}{4}+\frac{5}{2}}-\frac{\frac{3}{7}-\frac{2}{5}+1}{\frac{3}{2}-\frac{4}{7}-1}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{-\frac{8}{3}}{\frac{5}{7}-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{4}{9}-2}{\frac{7}{6}}\right).$$

37. $$\left(\frac{-\frac{7}{10}+\frac{1}{3}}{\frac{11}{5}}-\frac{\frac{3}{4}+1}{\frac{1}{6}-\frac{5}{2}}\right).$$

38. $$\left(\frac{-\frac{12}{17}+\frac{3}{4}}{-\frac{3}{2}+\frac{12}{7}}+\frac{-\frac{12}{17}+\frac{2}{3}}{-\frac{4}{3}+\frac{6}{5}}\right):$$

$$:\frac{\left(-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{4}-\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)}{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2+4-4\left(-\frac{2}{5}\right)^2}.$$

39. $$\frac{\left[-\frac{2}{3}-(-2)\right]^3:\left(1+\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^2}{\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^4-1}{\frac{4}{9}-\frac{2}{3}+1}-\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^3-1}{\frac{13}{9}}\cdot\left(\frac{9}{25}-\frac{3}{5}+1\right)\cdot\frac{1}{-\frac{8}{27}+1}}.$$

40. $$\left[1-3\cdot\frac{1}{(-2)^3+\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(-\frac{3}{2}\right)^3}+1\right]+$$

$$+\frac{(-2)^3+\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}}{(-2)^3-\left(-\frac{3}{2}\right)^3}-\frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{1}{2}}\cdot\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}\left(-\frac{6}{91}\right)^2\right].$$

41. $$\frac{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}-2\right)\left[\frac{3}{5}(-3)^{-2}+\left(-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{6}\right)\right]:\left[\frac{1}{6}+\left(-\frac{9}{4}\right)^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-2}}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\frac{5}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}\right]:\left[\frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}+\frac{8}{5}\right]}.$$

42. $\frac{1}{(3^2)^{-2}} + \frac{1}{(-5)^{-3}} - \left(10 : \frac{1}{(-5)^{-1}}\right)^2 + [(-2)^3]^2.$

43. $\frac{1}{(-2)^{-3}} \cdot (-9) \cdot \frac{1}{(-3^2)^{-3}} : \left[-2)^3 \cdot \frac{1}{3^{-2}}\right]^2.$

44. $$\left[\frac{1}{6^{-1}} : \left(2 - 3^{-1} \cdot 5^{-1} + 3^{-2} + \frac{1}{5^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{(-2)^2}{9 \cdot 25}\right)\right]\left(5^{-1} - \frac{-2}{15} + 3^{-1}\right).$$

45. $$\left[\frac{-\frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}} - \frac{-\frac{3}{4}}{\left(-\frac{3}{4}\right)^{1}}\right]\left[\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}} + \frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}}\right] -$$
$$-\left\{\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} + \left(-\frac{3}{4}\right)\left[\frac{3}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}} - \frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}}\right]\right\}.$$

46. $$\left[\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}} - \frac{-\frac{3}{4}}{\left(-\frac{4}{3}\right)^{-1}}\right].$$

47. $$\left\{\left[\frac{2}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}} + \frac{3}{\left(-\frac{4}{3}\right)^{-3}}\right] \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \left[2\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4} - 3\left(-\frac{5}{4}\right)^{-3}\right]\right\} :$$
$$: \left\{4\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}\right]^{-2} - 9\left[\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2}\right]^{-3}\right\}.$$

48. $$\frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - 2^{-2}\right]\left(-\frac{7}{12}+\frac{3}{8}\right)}{\left(-\frac{7}{2}\right)\left(\frac{8}{5}\right)^{-1}\frac{5}{49}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}+4^{-2}}.$$

49. $$\left(\frac{-\frac{12}{17}+\frac{3}{4}}{-\frac{3}{2}+\frac{12}{7}}+\frac{-\frac{12}{17}+\frac{2}{3}}{-\frac{4}{3}+\frac{6}{5}}\right):$$

$$:\frac{\left(-\frac{3}{4}-\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{4}-\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)}{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2+4-4\left(-\frac{2}{5}\right)^2}.$$

50. $$\frac{-\frac{5}{4}-\frac{12}{19}}{-\frac{5}{4}+\frac{12}{19}}\left(1-\frac{-\frac{9}{16}-\frac{25}{36}+\frac{16}{25}}{\frac{5}{4}}\right):$$

$$:\left(\frac{\frac{16}{25}}{-\frac{1}{600}}-\frac{\frac{9}{16}}{-\frac{1}{240}}-\frac{\frac{25}{36}}{-\frac{1}{360}}\right).$$

51. $$\frac{\dfrac{-\frac{3}{4}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^3}-\dfrac{\left(-\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{17}}{-\frac{8}{27}\left(-\frac{1}{12}\right)}+\dfrac{\frac{1}{34}}{\left(\frac{17}{144}\right)^2}}{\dfrac{\left(-\frac{9}{16}\right)\left(-\frac{1}{17}\right)}{\left(\frac{17}{144}\right)^2}-\dfrac{\left(-\frac{3}{4}\right)\frac{1}{17}}{\frac{17}{144}\left(-\frac{1}{12}\right)}-\dfrac{-\frac{3}{68}}{\frac{4}{9}\left(-\frac{1}{12}\right)}}.$$

52.

$$\frac{\dfrac{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3+1}{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3-1}\cdot\left(1+\dfrac{-\dfrac{2}{3}}{\dfrac{13}{9}}\right):\left(1-\dfrac{-\dfrac{2}{3}}{\dfrac{13}{9}}\right)-\left(-\dfrac{1}{5}\right)}{\left(3:\dfrac{2}{5}\right)^2\left[\dfrac{13}{9}\left(-\dfrac{3}{2}\right)+2\right]:\left(-\dfrac{13}{6}-2\right)}.$$

53.

$$\frac{\dfrac{-\dfrac{3}{2}-17}{-\dfrac{17}{144}}+\dfrac{-\dfrac{1}{12}}{-\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{17}{12}\right)}+\dfrac{3}{2}}{\dfrac{\dfrac{1}{17}}{-\dfrac{3}{4}}+17\cdot\dfrac{\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2}{\left(-\dfrac{2}{3}\right)\left(-\dfrac{17}{144}\right)}}.$$

54.

$$\frac{\dfrac{1}{6}}{\dfrac{8}{15}+0{,}7}+\left(\frac{0{,}7}{-\dfrac{1}{6}+\dfrac{8}{15}}-\frac{\dfrac{8}{15}}{0{,}7+\dfrac{1}{6}}\right)\left(-\frac{\dfrac{1}{6}+0{,}7}{\dfrac{8}{15}}+\frac{\dfrac{8}{15}-\dfrac{1}{6}}{0{,}7}+\frac{0{,}7+\dfrac{8}{15}}{\dfrac{1}{6}}\right).$$

55.

$$\frac{\dfrac{1}{3}-0{,}4-\dfrac{2}{9}-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\right)}{-\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{15}{18}-2\right)(5-0{,}75)}:$$

$$:\frac{-\left(-\dfrac{7}{9}+1\right)-\dfrac{7}{4}-\left(-\dfrac{2}{3}+0{,}2\right)}{(0{,}375-5)(-1{,}2+1)+\left(\dfrac{1}{3}-3\right)^2}.$$

56. $$\frac{\left(0{,}72-0{,}9+\frac{5}{24}\right)-\left(0{,}75+\frac{11}{15}\right)}{\left(-2{,}5+\frac{7}{20}+0{,}8\right):\left(-\frac{5}{9}+\frac{2}{3}-\frac{7}{18}\right)}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{-2-\frac{5}{4}}{1+\frac{1}{2}}-\frac{-3+\frac{1}{4}}{2-\frac{3}{4}}\right\}^2:\left\{6-\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{8}\right\}^2.$$

57. $$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3-(-2)^3}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-(-5)}-\frac{1:\left(-\frac{2}{3}\right)^2-1:\left(-\frac{3}{2}\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)^3}+$$

$$+\left(2-\frac{1}{3}\right).$$

58. $$\frac{\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^2-\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)^2}{\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}}-$$

$$-\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)}{\frac{3}{2}}.$$

59. $$\left(\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}-3}-\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+3}-\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}-9}\right):$$

$$:\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}-9}:\frac{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}-1\right):\left(\frac{2}{3}-2\right)^2}.$$

60. $$\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{15}}:\frac{\frac{1}{10}-\frac{1}{8}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{5}{7}}{\frac{5}{7}\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)}:\frac{-\frac{3}{2}}{\left(\frac{1}{4}-9\right)}.$$

61. $$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}}{0{,}25-\left(-\frac{2}{3}\right)(1-0{,}4)}.$$

62. $$\left[\frac{\left(-3+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right)^{-1}+1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-2}-1}-\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}\right]:$$

$$:\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}.$$

Capitolul 5

RELAŢII — FUNCŢII

5.1. PERECHI DE ELEMENTE

Să considerăm un joc ce constă din aruncarea simultană a două zaruri. Dacă primul zar arată faţa 4, iar cel de-al doilea arată faţa 5, convenim să notăm rezultatul acestei experienţe prin perechea (4, 5). Dacă reprezentăm numerele 4 şi 5 prin două puncte distincte, atunci perechea (4, 5) o putem reprezenta printr-o săgeată avînd originea în punctul 4 şi extremitatea în punctul 5 (fig. 5.1). În general prin notaţia (a, b) înţelegem o pereche

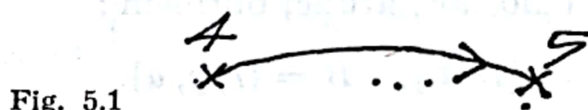


Fig. 5.1

ordonată de elemente care are originea (primul element) obiectul a şi extremitatea (cel de al doilea element) obiectul b. Două perechi sînt egale dacă au aceeaşi origine şi aceiaşi extremitate. Prin urmare dacă $(a, b) = (c, d)$, atunci $a = c$ şi $b = d$. Perechea (a, a) se reprezintă grafic printr-o buclă în care originea coincide cu extremitatea (fig. 5.2). •

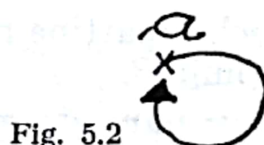


Fig. 5.2

Observaţie

1) Trebuie să facem o distincţie clară între perechea (a, b) şi mulţimea formată din două elemente a şi b, adică mulţimea $\{a, b\}$. Avem $\{a, b\} = \{b, a\}$, în timp ce $(a, b) \neq (b, a)$.

2) Noţiunea de pereche mai poate fi definită ca o mulţime de mulţimi : $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Se poate verifica că este îndeplinită condiţia de egalitate a perechilor.

Dacă: $(a, b) = (c, d)$, atunci $\{\{a\}, \{b, a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, şi deci: $\{a\} = \{c\}$ şi $\{a, b\} = \{c, d\}$. Din aceste relaţii deducem $a = c$ şi $b = d$.

5.2. PRODUSUL CARTEZIAN AL MULŢIMILOR

Noţiunea de produs cartezian a două mulţimi

Să presupunem că un muncitor doreşte să-şi cumpere o maşină. I se oferă două mărci: Dacia şi Skoda. Fiecare din maşinile care au una din aceste mărci poate avea culoarea: albastru, roşu sau galben. Cîte combinaţii posibile între marcă şi culoare se pot forma? Să notăm cu A mulţimea mărcilor: $A = \{\text{Dacia, Skoda}\}$ şi cu B mulţimea culorilor: $B = \{\text{roşu, galben, albastru}\}$.

Se obţin următoarele perechi:

{Dacia, roşu}, {Dacia, galben}, {Dacia, albastru}
{Skoda, roşu}, {Skoda, galben}, {Skoda, albastru}.

Dacă folosim pentru scrierea elementelor mulţimilor A şi B iniţialele mărcilor şi ale culorilor, atunci obţinem:

$$A = \{D, S\}, \quad B = \{r, g, a\}.$$

Perechile de elemente, obţinute din combinarea mărcilor şi a culorilor, pot fi scrise astfel:

$$\begin{pmatrix} (D, r); & (D, g); & (D, a) \\ (S, r); & (S, g); & (S, a) \end{pmatrix}$$

Primul element al fiecărei perechi aparţine mulţimii A, iar cel de-al doilea element aparţine mulţimii B.

Mulţimea acestor perechi se numeşte produsul cartezian al mulţimii A prin mulţimea B şi se notează $A \times B$. Produsul cartezian al mulţimilor A şi B se notează cu $A \times B$ şi este format din mulţimea tuturor perechilor care au originea elemente din A şi extremitatea elemente din B.

Reprezentarea grafică a produsului cartezian

Se poate reprezenta produsul cartezian a două mulţimi A şi B printr-o mulţime de săgeţi. Fiecare săgeată are originea un element

din mulţimea A şi extremitatea un element din B (fig. 5.3).

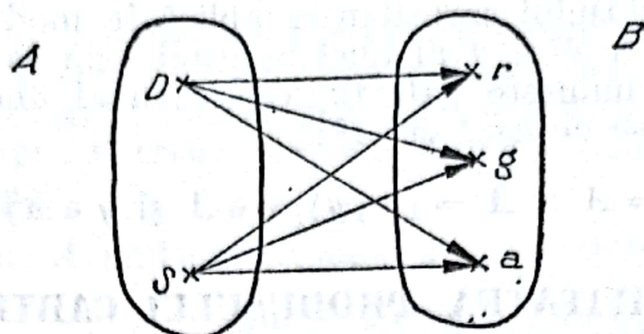


Fig. 5.3

Reprezentarea sub formă de tablou

Este comod să reprezentăm mulţimea perechilor printr-un tablou dreptunghiular astfel încît în fiecare căsuţă să figureze o pereche (fig. 5.4).

B \ A	D	S
r	(D; r)	(S; r)
g	(D; g)	(S; r)
a	(D; a)	(S; a)

Fig. 5.4

Reprezentarea carteziană

Dacă reprezentăm mulţimile A şi B cu ajutorul diagramelor Venn, elementele lor fiind reprezentate prin puncte, atunci fiecare pereche poate fi reprezentată printr-un punct (nod) situat la intersecţia a două semidrepte care au extremităţile elementele celor două mulţimi (fig. 5.5).

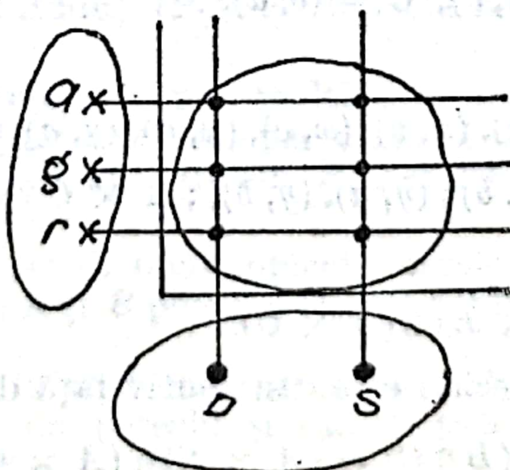


Fig. 5.5

Pătrat cartezian

Definiţia produsului cartezian se aplică în mod natural şi la produsul cartezian $A \times A$ al unei mulţimi prin ea însăşi. Astfel acest produs se numeşte pătratul cartezian al unei mulţimi A prin ea însăşi şi se notează cu A^2:

$$A^2 = A \times A = \{(x, y) \mid x \in A \text{ şi } y \in A\}.$$

5.3. DISTRIBUTIVITATEA PRODUSULUI CARTEZIAN FAŢĂ DE REUNIUNE ŞI INTERSECŢIE

a) Distributivitatea faţă de reuniune

Fie mulţimile A, B, C. Pentru a exprima că produsul cartezian este distributiv faţă de reuniune vom scrie:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

Pentru a ilustra această proprietate să considerăm mulţimile (fig. 5.6):

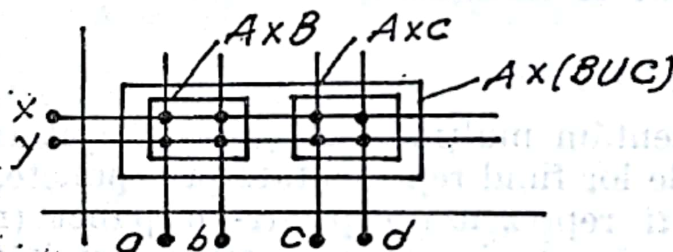


Fig. 5.6

$A = \{x, y\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{c, d\}$.

$B \cup C = \{a, b, c, d\}$

$A \times (B \cup C) = \{(x, a), (x, b), (x, c), (x, d), (y, a), (y, b), (y, c), (y, d)\}$

$A \times B = \{(x, a), (x, b); (y, a), (y, b)\}$; $A \times C = \{(x, d), (x, c), (y, c), (y, d)\}$.

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

b) Produsul cartezian este distributiv faţă de intersecţie:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

5.4. RELAŢII

Să considerăm o mulţime formată din pionierii : Ionel, Petrică, şi Dorel. În vacanţa de vară ei au vizitat muzeele Simu şi Antipa, după cum urmează : Ionel *a vizitat* muzeul Simu ; Petrică *a vizitat* muzeul Antipa ; Petrică *a vizitat* muzeul Simu ; Dorel *a vizitat* muzeul Antipa.

Să notăm cu A mulţimea pionierilor şi cu B mulţimea muzeelor.

$$A = \{\text{Ionel, Petrică, Dorel}\}.$$
$$B = \{\text{Simu, Antipa}\}.$$

Cuvîntul *a vizitat* indică o legătură care se stabileşte între elementele a două mulţimi. Dacă utilizăm diagramele Venn, legătura dintre elementele celor două mulţimi poate fi arătată prin săgeţi care au originile elemente din A şi extremităţile elemente din B. A se numeşte mulţime de plecare iar B mulţime de sosire.

Această corespondenţă (fig. 5.7) ne arată că se pot forma pe-

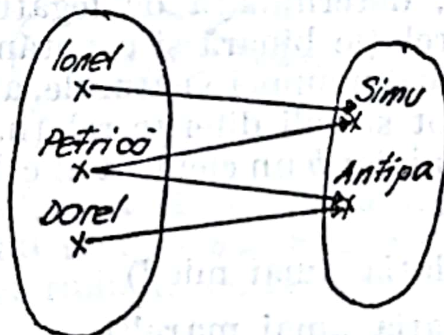


Fig. 5.7

rechi de elemente, cu proprietatea că primul element aparţine mulţimii A, iar cel de-al doilea element aparţine mulţimii B, pentru care relaţia dată este adevărată : (Ionel, muzeul Simu), (Petrică, muzeul Simu), (Petrică, muzeul Antipa), (Dorel, muzeul Antipa).

Definiţie. O relaţie a unei mulţimi A către o mulţime B este formată din mulţimea tuturor perechilor (x, y), x element al mulţimii A şi y element al mulţimii B, pentru care relaţia este verificată.

Relaţia care leagă două obiecte oarecare se numeşte *relaţie binară*. Mulţimile A şi B pot fi egale. În acest caz se spune că avem o relaţie în A.

O relaţie de la mulţimea A către mulţimea B este formată dintr-o mulţime de perechi şi este o submulţime a produsului cartezian $A \times B$.

5.5. DIAGRAMA UNEI RELAȚII

Pentru a reprezenta grafic relația dintre elementele a două mulțimi se alcătuiește un tablou dreptunghiular scriind pe linie elementele mulțimii A iar pe coloană elementele mulțimii B. Se însemnă apoi printr-un punct în interiorul unui pătrățel elementele ce corespund în relația dată.

A / B	Ionel	Petrică	Dorel
muzeul Simu	*	*	
muzeul Antipa		*	*

Mulțimea tuturor perechilor de elemente care au proprietatea că primul element aparține mulțimii A, iar cel de-al doilea element aparține mulțimii B, determinată de legătura dintre cele două mulțimi se numește relație binară și o notăm cu $\mathfrak{R}$. Dacă se dau două mulțimi alcătuite din numere naturale, atunci între elementele acestor mulțimi se pot stabili diferite relații. Dacă a este un element al primei mulțimi, iar b un element al celei de a doua mulțimi, putem cerceta dacă :

$a < b$ (relația „mai mic")

$a > b$ (relația „mai mare")

$a = b$ (relația „egal cu")

$a \leqslant b$ (relația „mai mic sau cel mult egal")

$a \geqslant b$ (relația „mai mare sau cel mult egal")

Notație

Să notăm $\mathfrak{R}$ relația de la mulțimea A către mulțimea B. Dacă două elemente x și y aparținînd mulțimilor A și B verifică relația dată, vom scrie $x \mathfrak{R} y$.

Graful unei relații binare

Să notăm cu $\mathfrak{R}$ relația de la mulțimea A către mulțimea B. Se numește graful relației $\mathfrak{R}$ și se notează cu G mulțimea tuturor perechilor de elemente (x, y) determinate de relația $\mathfrak{R}$ care au

proprietatea că primul element al perechii aparţine mulţimii A şi cel de-al doilea element aparţine mulţimii B:

$$G = \{(x, y) | x \in A, \ x \in B, \ x \mathcal{R} y\}.$$

Definiţie. Două relaţii $\mathcal{R}$ şi $\mathcal{R}'$ sînt egale dacă au aceeaşi mulţime de plecare, aceeaşi mulţime de sosire şi acelaşi graf.

5.6. INVERSA UNEI RELAŢII

Se dă mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ şi relaţia dată prin condiţia $x < y$ unde $x, y \in A$.

Graful relaţiei $x < y$ este o mulţime a perechilor de elemente $x, y \in A$ determinate de relaţia dată:

$$G = \{(1, 2), (1,3), (1,4), (2,3) \ (2,4), (3,4)\}.$$

Reprezentarea prin săgeţi a mulţimii G este arătată în fig. 5.8.

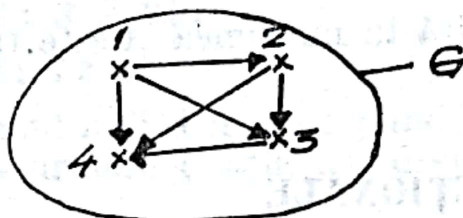


Fig. 5.8

Se consideră în mulţimea A relaţia dată prin condiţia $y \geq x$, unde $y, x \in A$. Graful relaţiei $y \geq x$ este mulţimea perechilor de elemente $y, x \in A$ determinată de relaţia:

$$G^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}.$$

Perechile lui G^{-1} sînt inversele perechilor mulţimilor G. Reprezentarea prin săgeţi a mulţimii G^{-1} este arătată în fig. 5.9. Relaţia

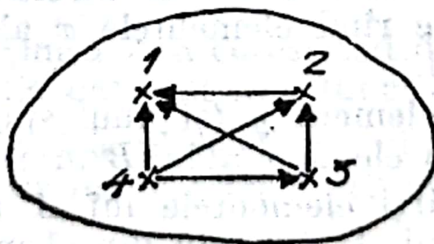


Fig. 5.9

dată prin condiţia $y \geq x$ este inversa relaţiei dată prin condiţia $x < y$. Inversa sau reciproca unei relaţii $\mathcal{R}$ este relaţia notată $\mathcal{R}^{-1}$ al cărui graf este alcătuit din inversele perechilor lui $\mathcal{R}$.

Două relaţii $\mathcal{R}$ şi $\mathcal{R}^{-1}$ definite în aceeaşi mulţime sînt egale dacă grafurile celor două relaţii G şi G^{-1} sînt egale.

5.7. RELAŢII SIMETRICE

O relaţie se numeşte simetrică dacă este egală cu inversa sa. Prin urmare o relaţie $\mathcal{R}$ definită în mulţimea A este simetrică dacă şi numai dacă atunci cînd $x \mathcal{R} y$, adică atunci cînd perechea (x, y) aparţine grafului şi perechea (y, x) aparţine grafului adică $y \mathcal{R} x$. Prin urmare relaţia $\mathcal{R}$ este simetrică dacă şi numai dacă atunci cînd $x \mathcal{R} y$ avem şi $y \mathcal{R} x$.

5.8. RELAŢII TRANZITIVE

Să considerăm mulţimea N a numerelor naturale şi relaţia „mai mic" definită în această mulţime.

Din relaţiile $a < b$ şi $b < c$ deducem relaţia $a < c$.

Prin urmare dacă : $a \mathcal{R} b$ şi $b \mathcal{R} c$ atunci $a \mathcal{R} c$.

O relaţie $\mathcal{R}$ definită în mulţimea A este tranzitivă dacă $x \mathcal{R} y$ şi $y \mathcal{R} z$ implică $x \mathcal{R} z$.

5.9. RELAŢII FUNCŢIONALE

Vom studia un tip particular de relaţie : relaţia funcţională sau funcţia.

Definiţie. O relaţie $\mathcal{R}$ de la mulţimea A către mulţimea B se numeşte relaţie funcţională sau funcţie, dacă şi numai dacă pentru fiecare element $x \in A$ există cel mult un element $y \in B$, astfel încît $x \mathcal{R} y$.

Într-o relaţie funcţională sau funcţie un element x al mulţimii A se poate afla în relaţia dată cu cel mult un element y al mulţimii B. Dacă analizăm pe rînd elementele x ale mulţimii A, există deci două posibilităţi.

Există în B un element y (şi unul singur) astfel încît $x \mathcal{R} y$ sau nu există nici un element al lui B în relaţie cu elementul x.

Putem deci împărţi elementele lui A în două submulţimi Submulţimea A^* a lui A, formată din elementele x pentru care există în B un element y cu proprietatea $x \mathcal{R} y$ şi prin urmare perechea (x, y) verifică relaţia dată, se numeşte mulţimea de definiţie a funcţiei.

Submulţimea $\complement_A A^*$ este formată din elementele lui A pentru care nu există elemente y aparţinînd lui B cu proprietatea $x \mathcal{R} y$,

prin urmare formată din acele elemente ale lui A care nu se află în relaţie cu nici un element y al lui B.

Se spune că funcţia este definită în A şi are valori în B. Într-o relaţie funcţională avem trei mulţimi:

1) A — numită mulţimea de definiţie;

2) A^* — domeniul de definiţie al funcţiei;

3) B — mulţimea în care funcţia ia valori, numită şi codomeniul funcţiei.

Exemple:

Se consideră mulţimile $A = \{2, 3, 5, 7, 9\}$ şi $B = \{4, 9, 19, 21\}$ şi relaţia „x divide y" de la mulţimea A către mulţimea B.

Avem: 2 divide 4; $2 \mathfrak{R} 4$;
3 divide 9; $3 \mathfrak{R} 9$;
3 divide 21; $3 \mathfrak{R} 21$;
7 divide 21; $7 \mathfrak{R} 21$.

Unui element al mulţimii A îi corespunde cel mult un element al mulţimii B. Prin urmare relaţia „x divide y" este o relaţie funcţională.

Contraexemplu:

Se dau mulţimile: $A = \{4, 6, 8\}$, $B = \{6, 8\}$ şi relaţia $x < y$ de la mulţimea A către mulţimea B.

Avem: $4 < 6$; $4 \mathfrak{R} 6$
$4 < 8$; $4 \mathfrak{R} 8$
$6 < 8$; $6 \mathfrak{R} 8$

Numărului 4 din mulţimea A îi corespund două elemente, 6 şi 8, în mulţimea B. Relaţia dată nu este funcţională.

Dacă domeniul de definiţie al unei funcţii şi mulţimea valorilor ei sînt două mulţimi de numere reale, atunci funcţia se numeşte *numerică*.

O funcţie se notează: $f : A \to B$, unde A este domeniul de definiţie al funcţiei şi B este mulţimea în care funcţia ia valori. O funcţie se mai notează $y = f(x)$, $x \in A$ şi $y \in B$, sau: $x \xrightarrow{f} y$; $A \xrightarrow{f} B$, y este imaginea lui x prin f sau valoarea funcţiei pentru valoarea x aleasă a lui A.

Exemplu :

$$f : [-1, 0] \to [0, 1], \quad f(x) = x^2;$$

$$f : [3, 4] \to [4, 5], \quad f(x) = x + 1.$$

Există diverse moduri de a reprezenta o funcţie numerică :

a) Funcţia numerică la care legea de corespondenţă este indicată printr-o diagramă ca în fig. 5.10.

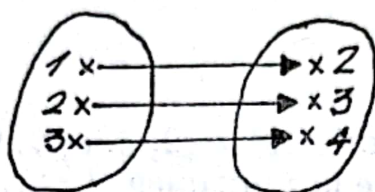


Fig. 5.10

b) Funcţia dată printr-un tablou de variaţie.

x	1	2	3	4
y	3	5	7	9

c) Funcţia definită printr-o formulă :

$$y : R \to R, \ y = 3x.$$

Graficul unei funcţii numerice

Să considerăm o funcţie $f : A \to B; y = f(x)$.
Fiecărei perechi $[x, f(x)]$ îi corespunde în plan cîte un punct. Dacă unim toate punctele care se obţin, cînd x parcurge mulţimea A, se obţine o curbă. Mulţimea punctelor de coordonate $M(x; f(x))$ se numeşte graficul funcţiei. Pentru a obţine un punct al graficului dăm lui x valoarea a şi aflăm imaginea corespunzătoare lui a prin această funcţie.

5.10. MĂRIMI DIRECT ŞI INVERS PROPORŢIONALE

Două mărimi numerice x şi y sînt direct proporţionale dacă $y = k \cdot x$ pentru $k \in N$. Din această relaţie rezultă că : $\frac{y}{x} = k$.
Dacă x este un element al mulţimii A iar y un element unic al unei mulţimi B, determinat prin relaţia $y = kx$, atunci relaţia $y = kx$ este o funcţie.

Egalitatea $y = kx$ se mai poate scrie $\frac{y}{x} = k$.

Numărul constant k se numește constantă de proporționalitate. Dacă (x, y) este o pereche care verifică relația $y = kx$ și numerele reale x și y sînt două mărimi variabile care se măsoară cu aceeași unitate de măsură, atunci numărul $\frac{y}{x} = k$ se numește raport.

5.10.1. PROPORȚII

Să considerăm două perechi de valori (a, b) și (c, d) care reprezintă mărimi ce se măsoară cu aceeași unitate de măsură și care aparțin graficului $y = kx$. Avem $\frac{a}{b} = k$; $\frac{c}{d} = k$ și prin urmare $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Egalitatea $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se numește proporție. Numerele a și d se numesc extremi, iar b și c mezi. În general, egalitatea a două rapoarte se numește proporție.

5.10.2. PROPRIETĂȚILE PROPORȚIEI

1. Într-o proporție produsul mezilor este egal cu produsul extremilor:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (b \neq 0, d \neq 0).$$

Din $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ deducem:

$$a = bk$$

$$c = dk$$

$$ad = kbd, \; cb = bkd$$

$$\text{sau} \quad ad = cb.$$

2. Într-o proporție putem aduna numitorii la numărători și obținem tot o proporție.

Din relaţiile $a = bk$, $c = dk$ deducem :

$$\frac{a+b}{b} = \frac{bk+b}{b} = \frac{b(k+1)}{b} = k+1$$

$$\frac{c+d}{d} = \frac{dk+d}{d} = \frac{d(k+1)}{d} = k+1$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

3. În mod asemănător se pot stabili proporţiile :

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}; \quad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d};$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}; \quad \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d};$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}; \quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d};$$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

5.11. EXERCIŢII REZOLVATE

Exemplul 1

Se consideră mulţimile (fig. 5.11).

A = {Tîrgovişte, Piteşti, Ploieşti, Slatina}

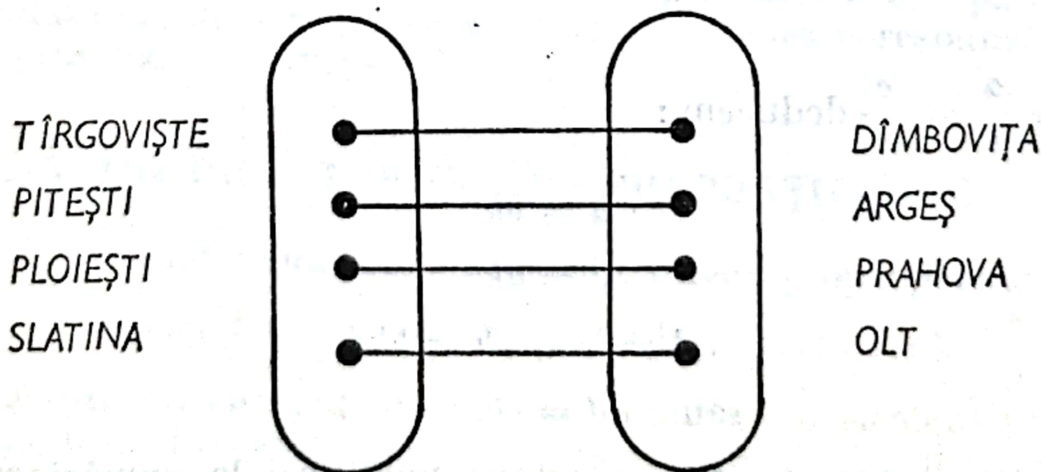


Fig. 5.11

$B = \{$Dîmbovița, Argeș, Prahova, Olt$\}$

Proprietatea „este reședința județului" stabilește o relație de la A spre mulțimea B. Să se construiască diagrama acestei relații.

Soluția este indicată în fig. 5.11.

Exemplul 2

Se consideră următoarea diagramă (fig. 5.12):

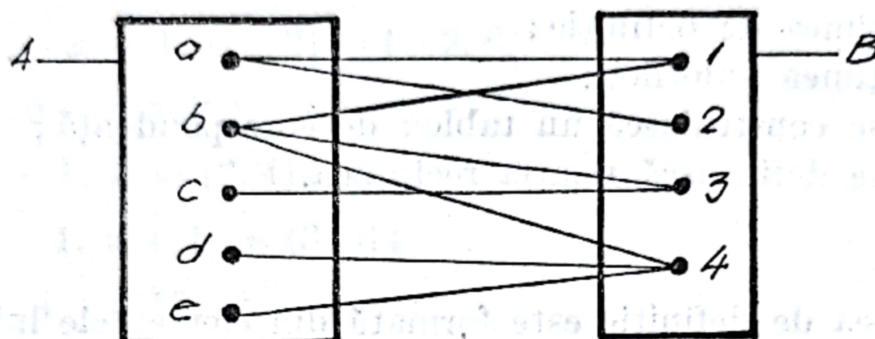


Fig. 5.12

Să se afle care este mulțimea de definiție.
Care este mulțimea valorilor?
Să se construiască un tablou de corespondență.

Soluție

Mulțimea de definiție, pe care noi o însemnăm prin A, este mulțimea elementelor lui A care sînt în corespondență cu cel puțin un element din B.

Deci $A = \{a, b, c, d, e\}$.

Mulțimea valorilor este formată din unele elemente ale lui B care sînt imaginea cel puțin a unui element din mulțimea A.

Deci: $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Tabela de corespondență este:

B \ A	a	b	c	d	e
1	*	*			
2	*				
3		*	*		
4		*		*	*

Exemplul 3

Se consideră mulțimile:

$$A = \{4, 6, 8, 10, 12, 19\},$$
$$B = \{2, 3, 4, 7, 5\},$$

și relația $x \mathfrak{R} y : x$ este multiplul lui y, de la mulțimea A către mulțimea B.

Să se afle:

1. Mulțimea de definiție;
2. Mulțimea valorilor;
3. Să se construiască un tablou de corespondență;
4. Să se definească relația reciprocă.

Soluție

Mulțimea de definiție este formată din elementele lui A care se află în relația dată cu cel puțin un element al mulțimii B.

Avem:

$4 \mathfrak{R} 2$ — 4 este multiplul lui 2; $10 \mathfrak{R} 2$—10 este multiplului 2

$12 \mathfrak{R} 2$ —12 este multiplul lui 2; $6 \mathfrak{R} 3$ —6 este multiplul lui 3

$12 \mathfrak{R} 3$ —12 este multiplul lui 3; $8 \mathfrak{R} 4$ — 8 este multiplul lui 4

$10 \mathfrak{R} 5$ —10 este multiplul lui 5; $12 \mathfrak{R} 4$—12 este multiplul lui 4.

Din mulțimea de definiție trebuie să excludem elementul 19 deoarece el nu este multiplul nici unuia din elementele mulțimii B.

Deci mulțimea de definiție este: $A' = \{4, 6, 8, 10, 12\}$.
Mulțimea valorilor funcției este mulțimea formată din elemente care sînt imaginile a cel puțin unui element din mulțimea A'.
Prin urmare avem: $B' = \{2 ,4, 3, 5\}$.
Tabela de corespondență este:

B \ A	4	6	8	10	12	19
2	×	×	×	×	×	
3		×			×	
4	×		×		×	
7						
5				×		

Relația reciprocă este $y \mathfrak{R} x : y$ este divizor lui x, de la mulțimea B către mulțimea A.

5.12. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

Perechi de elemente. Produs cartezian

1. Se dă mulţimea $A = \{1, 2, 3\}$. Cu ajutorul elementelor acestei mulţimi să se scrie 6 perechi distincte.

2. Să se determine numerele întregi x, y care verifică simultan egalităţile :

$$(x + 1, y - 2) = (2, 0)$$
$$(-x - 1, y - 2) = (-2, 0)$$

3. Să se determine x din egalităţile :

a) $(x + 1, 4) = (3, 4)$;

b) $(x - 1, x + 1) = (3, 5)$;

c) $(3x, 4) = (12, x)$.

4. Să se găsească elementele a şi b ($a, b \in R$) din relaţiile :

a) $(a, b) = (2, 1)$, b) $(a, 3) = (3, b)$;

c) $(a + 1, b) = (2, b)$; d) $(a, b) = (1,5)$.

5. Se dau mulţimile :

$A = \{4, 5\}$, $B = \{a, b\}$.

Să se determine : $A \times B$, $B \times A$, A^2, B^2.

6. Dacă $a \neq b \neq c$, cîte perechi de elemente putem forma cu ajutorul elementelor mulţimii $\{a, b, c\}$.

7. Se dau mulţimile :

$$A = \{x \in N \mid 3 < x \leqslant 5\},$$
$$B = \{x \in N \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}.$$

Să se afle mulţimea $A \times B$ şi să se scrie mulţimea enumerînd toate elementele din care este alcătuită.

8. Se dau mulţimile :

$$A = \{x \in N \mid 2 < x < 5\},$$
$$B = \{x \in N \mid x \leqslant 5\},$$
$$C = \{x \in N \mid x \leqslant 7\},$$
$$D = \{x \in N \mid 1 \leqslant x \leqslant 8\}.$$

Să se verifice că dacă $B \subset C$ şi $A \subset D$ atunci $A \times B \subset D \times C$.

9. Se dau mulţimile:

$A = \{x, y\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{3\}$.

Să se verifice egalitatea: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

10. Se dau mulţimile:

$A = \{x\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{3, 4\}$.

Să se verifice relaţia:

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

11. Se consideră mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Să se scrie mulţimea formată din elementele care aparţin lui A^2.

12. Se dau mulţimile: $E = \{1\}$, $F = \{2\}$.

Să se scrie mulţimile : $E \times F$ şi $F \times E$.

Să se arate că: $E \times F \neq F \times E$.

13. Se dau mulţimile: $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$.

Să se arate că $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$ (produsul cartezian nu este asociativ).

14. Se dau mulţimile: $A = \{1, 2, 3\}$,

$B = \{x \in N / x < 6$ şi x par$\}$,

$C = \{3, 5\}$.

Să se scrie mulţimile:

$(A \cup B) \times C$, $(A \cap B) \times C$, $(B \cup C) \times (A \cap B)$.

Relaţii

15. În carnetul unui pionier se găsesc înscrise zilele săptămînii şi oraşele care trebuie vizitate:
Luni — Sinaia; Marţi — Predeal; Miercuri — Braşov; Joi — Braşov; Vineri — Sibiu; Sîmbătă — Sibiu.
Să notăm cu E mulţimea zilelor săptămînii şi cu F mulţimea oraşelor vizitate. Să se alcătuiască o diagramă carteziană a relaţiei „a vizitat” de la mulţimea E către mulţimea F.

16. Se dau mulţimile $A=\{1, 5, 7\}$ şi $B=\{2, 4, 5\}$. Să se scrie graful relaţiei $x \mathcal{R} y$, definit prin $x = y$, $x \in A$ şi $y \in B$, de la mulţimea A către mulţimea B.

17. Se dau mulţimile : $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 3, 4\}$. Să se scrie graful relaţiei dată prin condiţia „x este jumătatea lui y" $x \in A$ şi $y \in B$.

18. Se dau mulţimile :
A = {Eminescu, Caragiale, Creangă}.
B = {Humuleşti, Haimanale, Ipoteşti}.
Să se scrie graful relaţiei „X este născut în...", de la mulţimea A către mulţimea B.

19. Se consideră relaţia $y = x^2$ unde $x \in \{2, -1, 0, 1, 2\}$.
Să se alcătuiască :
a) Graful relaţiei ;
b) Schema săgeată şi carteziană.

20. Se dau mulţimile :

$A = \{1, 2, 4, 9\}$ şi $B = \{1, 2, 3\}$.

Să se scrie toate perechile de elemente $(x, y) \in A \times B$ care verifică relaţie $x^2 = y$. Să se alcătuiască o schemă carteziană a acestei relaţii.

21. Se dau mulţimile :

A = {Europa, Asia, America, Australia},

B = {Paris, Londra, Pekin, Chicago, Cambera}.

Să se scrie toate perechile de elemente $(x, y) \subset A \times B$ care verifică relaţia „x se află în y".

22. Se dau mulţimile :

A = {Paris, Bruxelles, Londra, Moscova},

B = {Franţa, Belgia, Anglia, U.R.S.S.}.

Să se scrie toate perechile de elemente $(x, y) \in A \times B$ care verifică relaţia „x este capitala lui y". Să se alcătuiască schema carteziană a acestei relaţii.

23. Se dă mulţimea :

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Să se determine toate perechile de elemente $(x, y) \in E \times E$ care verifică relaţia : $x = y + 1$. Să se alcătuiască graful acestei relaţii.

24. Se dau mulţimile :

$A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$.

Să se determine perechile de elemente $(x, y) \in A \times B$ care verifică relaţia $x \mathcal{R} y : x < y$.

25. Se dau mulţimile :

A = {croitor, strungar, tapiţer},

B = {ac, strung foarfecă}.

Să se stabilească o relaţie între elementele acestor mulţimi, exprimată cu ajutorul cuvîntului „foloseşte" — care are mulţimea A ca mulţime de plecare şi mulţimea B ca mulţime de sosire.

26. În figura 5.13 se arată corespondenţa a două mulţimi. Ce elemente corespund elementului a, elementului b, elementului c?

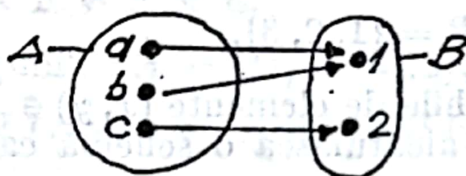


Fig. 5.13

Cîte elemente corespund elementului a? Dar elementului b?

27. Să se întocmească o diagramă carteziană a relaţiei „x este multiplu lui y", $x \in A$, $y \in B$, unde :

$A = \{12; 8; 25\}$, iar $B = \{2, 3, 5\}$.

28. În figura 5.14 este desenat un pătrat şi diagonalele sale.

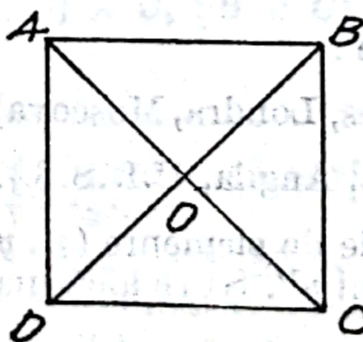


Fig. 5.14

Să notăm cu A mulţimea tuturor segmentelor de dreaptă formate, inclusiv laturile pătratului. Să se scrie toate perechile de segmente care verifică relaţia „este egal" în mulţimea A.

29. În mulţimea $C=\{1, 2, 3, 4, 6\}$ desenaţi graful relaţiei determinate prin condiţia :

a) — x este jumătatea lui y ;

b) — x este dublul lui y.

Comparaţi aceste grafuri.

30. Se dau relaţiile :

$R = \{(1, 2), (2, 3), (5, 4)\}$,

$S = \{(1, a), (2, b), (3, b), (4, c)\}$.

Să se reprezinte grafic aceste relaţii.

31. În figura 5.15 se indică o relaţie între elementele a două mulţimi A şi B. Să se indice o lege de corespondenţă între elementele celor două mulţimi.

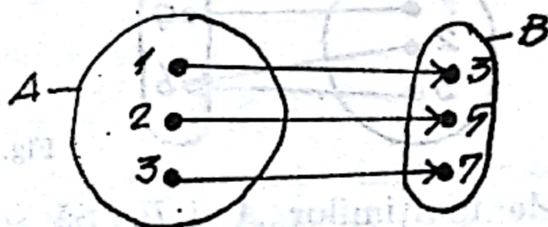


Fig. 5.15

32. Se dau mulţimile : $A = \{-2, 0, 1, 4, 5\}$,

$$B = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$$

şi relaţia $\mathcal{R}$ de la mulţimea A către mulţimea B, definită astfel : dacă $x \in A$ şi $y \in B$, atunci x este pătratul lui y. Să se scrie graful acestei relaţii şi pe urmă să se dea o reprezentare prin săgeţi şi una carteziană.

33. În mulţimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se dă relaţia $\mathcal{R}$ definită prin condiţia : $1 < x + y \leqslant 5$, $x, y \in A$.
Să se alcătuiască graful acestei relaţii şi apoi să se întocmească o diagramă carteziană.

34. Se dau mulţimile :

A = {Bucureşti, Sofia, Budapesta, Varşovia, Paris, Roma},

B = {România, Bulgaria, Ungaria, Polonia, Franţa, Italia}.

Se consideră relaţia „se găseşte în" definită de la mulţimea A către mulţimea B. Să se alcătuiască graful acestei relaţii.

Să se arate apoi că este o relaţie funcţională.

35. Se consideră relaţia „se găseşte în" definităpe mulţimea

A = {U.R.S.S., Franţa, Belgia, China, Egipt, Canada} în

mulţimea B a celor cinci continente,

B = {Europa, Asia, Oceania, Africa, America}.

Să se reprezinte grafic această relaţie. Este această relaţie funcţională? Motivaţi răspunsul la această întrebare!

36. În figura 5.16 se arată grafic, cu ajutorul săgeţilor, corespondenţa dintre elementele mulţimilor A şi B. Să se scrie o mulţime formată din toate perechile de elemente care satisfac această corespondenţă astfel încît primul element al fiecărei perechi să aparţină mulţimii A, iar cel de-al doilea element să aparţină mulţimii B.

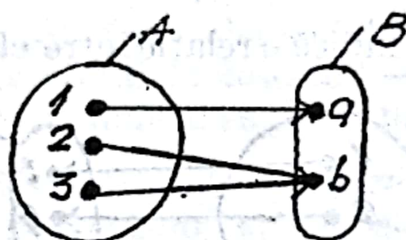


Fig. 5.16

37. Se dau A şi B două mulţimi:

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$.

În figura 5.17 se arată grafic o corespondenţă între elementele mulţimilor A şi B astfel încît unui număr din A îi corespunde numărul natural următor acestuia, din mulţimea B.

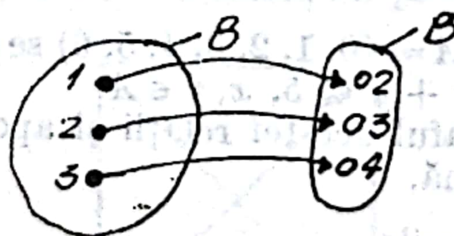


Fig. 5.17

Să se scrie toate perechile de elemente care satisfac această corespondenţă, astfel încît primul element al fiecărei perechi să aparţină mulţimii A, iar cel de-al doilea mulţimii B.

38. Se dau mulţimile :

$A = \{1, 2, 3, 5\}$ şi $B = \{2, 4, 9, 25\}$

şi toate perechile de elemente care satisfac corespondenţa de la mulţimea A la mulţimea B, stabilită astfel : un număr al mulţimii A corespunde unui număr din mulţimea B, care este pătratul acestuia : (1, 2), (2, 4),(3, 9), (5, 25). Să se reprezinte grafic mulţimile A şi B şi să se arate corespondenţa cu ajutorul săgeţilor.

39. Se dau mulţimile :

$A = \{431, 332, 235, 437\}$ şi $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Să se stabilească o corespondenţă între elementele mulţimilor A şi B astfel ca fiecărui element al mulţimii A să-i corespundă un element al mulţimii B, care indică cifra cu care începe acest număr. Să se arate grafic această corespondenţă.

40. Se dau mulţimile :

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ şi $B = \{1, 2, 4\}$.

Să se stabilească o corespondenţă între elementele celor două mulţimi, astfel încît fiecărui număr din mulţimea A să-i corespundă un număr în mulţimea B, care este mai mare decît el. Să se arate şi grafic.

41. Se dau mulţimile $A = \{1, 2\}$ şi $B = \{2, 4, 5\}$.

Să se stabilească o corespondenţă între elementele celor două mulţimi, astfel încît unui număr al mulţimii A să-i corespundă un număr al mulţimii B, care este multiplu al acestui număr. Să se facă schema acestei corespondenţe.

42. Se dau mulţimile $A = \{0, 1, 2\}$ şi $B = \{0, 3, 4, 6\}$. Să se stabilească o corespondenţă între elementele celor două mulţimi astfel încît unui număr din mulţimea A să-i corespundă un număr din mulţimea B, care să fie de trei ori mai mare decît el. Ce element corespunde numărului 0? Dar numărului 2?

43. Se dau mulţimile $A = \{a, b, c\}$ şi $B = \{b, c, d, e\}$. Să se stabilească o corespondenţă între elementele celor două mulţimi, astfel încît fiecărei litere din mulţimea A să-i corespundă litera imediat următoare, în ordine alfabetică, din mulţimea B.

44. Se dau mulţimile $A = \{0, 1, 2\}$ şi $B = \{0, 1, 4, 5\}$. Să se stabilească o corespondenţă între elementele acestor mulţimi, astfel încît unui număr din mulţimea A să-i corespundă un număr care este egal cu pătratul lui, în mulţimea B.

45. Se dă mulţimea $A = \{-1, -2, 0, 1, 2\}$.

Să se scrie mulţimea B formată din modulele elementelor din A. Să se stabilească apoi o corespondenţă între elementele mulţimilor A şi B, astfel încît fiecărui număr din mulţimea A să-i corespundă un număr egal cu modulul său în mulţimea B.

46. Se dau perechile:

(1,6), (1,4), (2,5), (3,4).

Primul element al fiecărei perechi aparţine unei mulţimi A, iar cel de-al doilea element aparţine mulţimii B. Să se scrie mulţimile A şi B enumerînd toate elementele din care ele sînt alcătuite. Să se reprezinte grafic mulţimile A şi B şi apoi să se arate cu ajutorul săgeţilor corespondenţa dintre mulţimi stabilită cu ajutorul acestor perechi.

47. Se dă mulţimea:

$A = \{1, 2, -1, -2\}$ şi mulţimea B — formată din toate numerele care se obţin, calculînd suma a două numere oarecare din A. Să se stabilească apoi o corespondenţă între elementele mulţimilor A şi B, astfel ca unui număr din mulţimea A să-i corespundă un număr egal cu succesorul acestuia, în şirul crescător al numerelor întregi, din mulţimea B. Să se reprezinte grafic aceste mulţimi şi apoi să se arate corespondenţa cu ajutorul săgeţilor.

48. Se dau mulţimile:

$A = \{2, 3\}$ şi $B = \{4, 6, 7\}$

şi următoarele perechi de elemente: (2, 4), (2, 6), (3, 6); în aceste perechi primul element aparţine mulţimii A iar cel de-al doilea element aparţine mulţimii B. Arătaţi ce corespondenţă se poate stabili între mulţimile A şi B cu ajutorul acestor perechi. Enunţaţi o regulă cu ajutorul căreia se stabileşte această corespondenţă. Să se reprezinte grafic mulţimile A şi B, apoi să se arate corespondenţa cu ajutorul săgeţilor.

49. Se dau mulţimile: $A = \{1, 2, 3\}$ şi $B = \{2, 4, 6\}$.

Să se afle toate perechile de elemente care satisfac relaţia x divide y, unde x este un element al mulţimii A, iar y un element al mulţimii B.
Să se alcătuiască o schemă cu săgeţi.

50. Se dau mulţimile :
$A = \{-1, 0, -2\}$ şi $B = \{0, 1, 2\}$.

Să se afle toate perechile de elemente (x, y), unde $x \in A$ şi $y \in B$, care au suma egală cu 0 $(x+y = 0)$. Să se alcătuiască o schemă cu săgeţi pentru această corespondenţă.

51. Se dă mulţimea : $C = \{2, 4, 6, 8, 12\}$.

Să se determine perechile de elemente $(x, y) \in C \times C$ care verifică relaţia :

a) x este jumătatea lui y ;

b) x este dublul numărului y.

52. Să notăm cu A o mulţime de oraşe şi cu B o mulţime de intreprinderi.

$A = \{$Bucureşti, Ploieşti, Braşov$\}$,

$B = \{$23 August, 1 Mai, Tractorul$\}$.

Să se determine mulţimea perechilor de elemente $(x, y) \in B \times A$ care verifică relaţia : „uzina x este în oraşul y".

53. Se consideră patrulaterul $ABCD$. Să notăm cu E mulţimea unghiurilor acestui patrulater, iar cu F mulţimea laturilor. Să se alcătuiască graful relaţiei $x \mathcal{R} y$ „unghiul x este adiacent laturii y", de la mulţimea E către mulţimea F.

54. Se consideră mulţimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

În mulţimea A se dă relaţia $\mathcal{R} : x \mathcal{R} y ; 1 \leqslant x + y \leqslant 5$.
Să se facă schema cartiziană a acestei relaţii.

55. În mulţimea A, a copiilor unei familii, se consideră relaţia $x \mathcal{R} y$: „x are aceiaşi părinţi ca şi y". Este această relaţie simetrică ?

56. În mulţimea B a dreptelor din plan se consideră relaţia : „x este perpendiculară pe y". Este această relaţie simetrică ?

57. În mulţimea numerelor naturale N se consideră relaţia : $x \mathcal{R} y$: „x este prim cu y". Să se arate că această relaţie este simetrică şi tranzitivă.

58. În mulţimea numerelor întregi se consideră relaţia $x \mathcal{R} y$: $x^2 + x = y^2 + y$. Să se studieze proprietăţile acestei relaţii.

59. Se dă relaţia : $G = \{(1, 2), (2, a), (1, 3), (3, a)\}$. Să se determine numărul a astfel încît relaţia G să fie simetrică.

Se dă relația :

$$G = \{(1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, a), (3, 2)\}.$$

Să se determine a astfel încît relația dată să fie tranzitivă.

60. Se dă relația :

$$G = \{(a, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}.$$

Să se determine a astfel încît relația dată să fie reflexivă.

61. Printre relațiile următoare să se recunoască relațiile care sînt simetrice :

$G = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (2, 1)\}$;

$G' = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (2, 2)\}$;

$G'' = \{(a, 3), (b, c), (a, a)\}$;

$G''' = \{(a, a), (b, b)\}$.

62. În figura 5.18 (a, b și c) sînt desennate grafele unor relații. Să se stabilească care din aceste relații sînt simetrice.

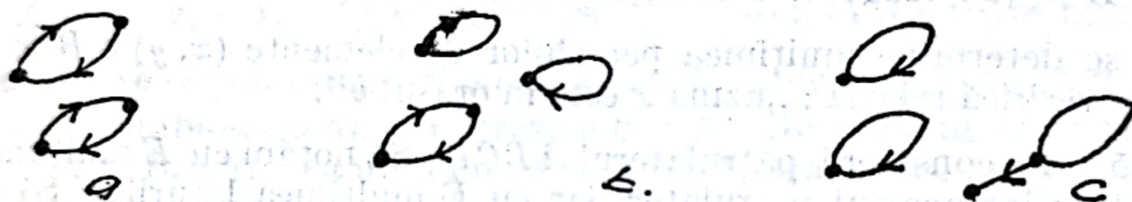


Fig. 5.18

63. Se consideră mulțimea $E = \{1, 2, 3\}$ și relațiile :

$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$,

$B = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 2)\}$;

$C = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (2, 1), (2, 2)\}$.

Să se spună care relații sînt simetrice și care sînt tranzitive.

64. În mulțimea N se consideră relațiile :

$f : N \to N$; $\quad x \to 4x$

$g : N \to N$; $\quad x \to 2x + 1$.

Să se stabilească dacă aceste relații sînt funcții.
Să se determine imaginile numerelor 0 ; 4 ; 8 ; 12 prin funcțiile f și g.

65. Se dau mulțimile $A=\{3, 4, 5\}$, $B=\{7, 6, 8, 9, 10\}$ și relația :

$f : A \times A \to B$, $f(a, b) = a + b$.

Să se arate că f este o funcţie cu domeniul $A \times A$ şi codomeniul B

66. Se consideră funcţia: $N \xrightarrow{f} Q : f(x) = \frac{x}{2}$.

Să se calculeze $f(3), f(4), f(18)$.

67. Printre relaţiile următoare să se stabilească relaţiile care sînt funcţii:

$R = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$,

$S = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$,

$T = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$.

68. Se dau mulţimile:

$A = \{1, 2, 3\}$ şi $B = \{2, 3, 4\}$.

Să se găsească toate perechile de elemente care au suma egală cu 5.

69. Să se alcătuiască schema cu săgeţi a acestei corespondenţe. Dacă se notează cu f corespondenţa stabilită prin această operaţie să se afle $f(1), f(2), f(3)$.

70. În figura 5.19 sînt date schemele săgeată ale unei relaţii.

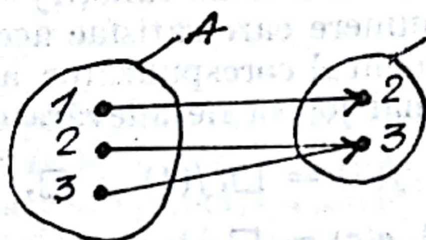


Fig. 5.19

Să notăm cu f relaţia stabilită de la mulţimea A la mulţimea B. Să se afle $f(1), f(2), f(3)$.

71. În fiecare din figurile 5.20 se indică prin săgeţi corespondenţa

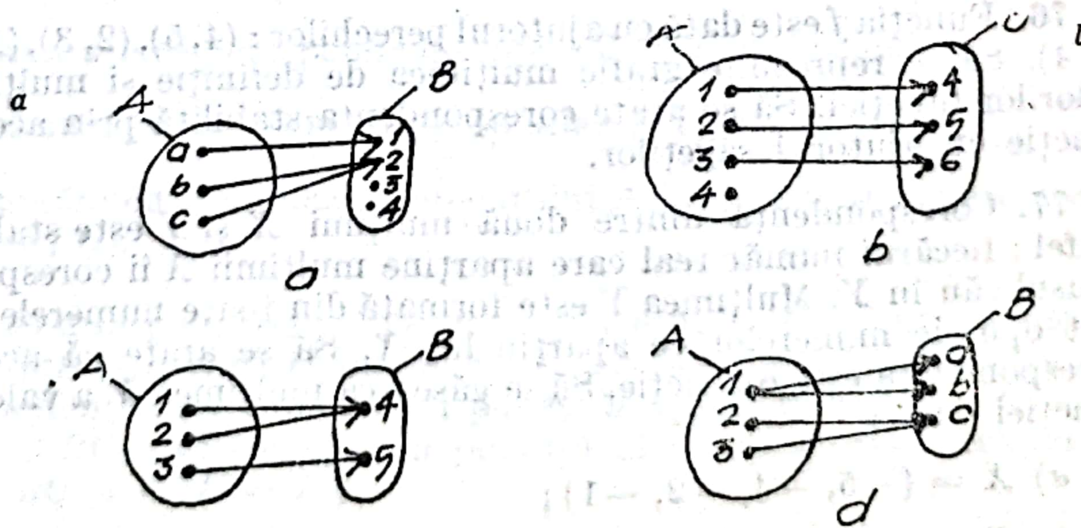


Fig. 5.20

a două mulţimi A şi B. Să se stabilească care din aceste corespondenţe sînt funcţii. Să se explice rezultatul.

72. Se consideră funcţia $f(x) = ax$. Să se determine a ştiind că $f(1) = 2$.

73. Se dau mulţimile : $A = \{1, 2\}$ şi $B = \{a, b\}$.
Să se arate în cîte moduri putem stabili o corespondenţă de la mulţimea A către mulţimea B, astfel încît să avem o funcţie.

74. În figura 5.21 este indicată corespondenţa dintre mulţimile

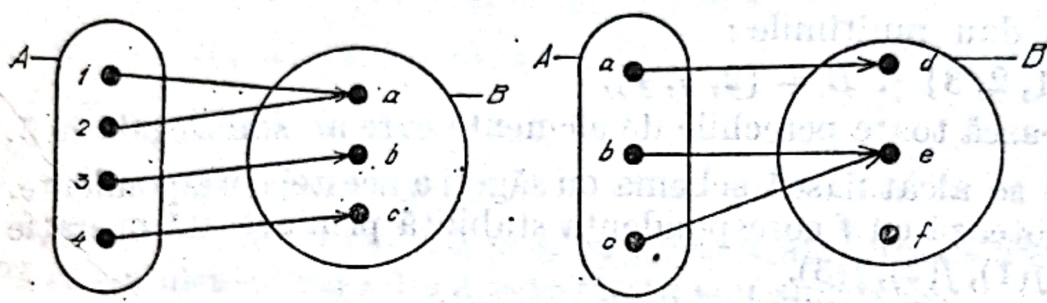


Fig. 5.21

A şi B, stabilită cu ajutorul a două funcţii f şi g. Scrieţi mulţimea tuturor perechilor de numere care satisfac această corespondenţă. Scrieţi în pătrăţel elementul corespunzător al mulţimii B astfel încît egalităţile scrise mai jos să fie adevărate :

$f(1) = \square, f(2) = \square, f(3) = \square, f(4) = \square,$

$g(a) = \square, g(b) = \square, g(c) = \square.$

75. Funcţia f este dată cu ajutorul perechilor : $(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)$. Să se afle mulţimea de definiţie a funcţiei şi mulţimea valorilor ei. Cît este $f(1), f(2), f(3)$?

76. Funcţia f este dată cu ajutorul perechilor : $(4, 5), (2, 3), (1, 7), (3, 4)$. Să se reprezinte grafic mulţimea de definiţie şi mulţimea valorilor funcţiei. Să se arate corespondenţa stabilită prin această funcţie cu ajutorul săgeţilor.

77. Corespondenţa dintre două mulţimi X şi Y este stabilită astfel : fiecărui număr real care aparţine mulţimii X îi corespunde opusul său în Y. Mulţimea Y este formată din toate numerele care sînt opusele numerelor ce aparţin lui X. Să se arate că această corespondenţă este o funcţie. Să se găsească mulţimea Y a valorilor funcţiei dacă :

a) $X = \{-5, -4, -2, -1\}$;

b) $X = \{-5, 0\}$;

c) $X = (-1, 0)$;

d) $X = (-6, -3)$;

e) $X = (-5, -2)$;

f) $X = (-1, +1)$.

78. Dacă notăm cu f funcţia de la X la Y, din exerciţiul precedent atunci să se calculeze pentru cazul (a), cît este $f(-5)$, $f(-4)$, $f(-1)$.

79. Corespondenţa între două mulţimi X şi Y este stabilită astfel: fiecărui număr x care aparţine mulţimii X îi facem să corespundă numărul $2x$, adică un număr care se obţine prin înmulţirea cu 2 a numărului x. Să notăm cu Y mulţimea acestor numere. Să se arate că această corespondenţă este o funcţie.
Să se găsească mulţimea Y a valorilor funcţiei, dacă:

a) $X = \{-1, -2, -3, -4\}$; b) $X = (-1, 1)$;

c) $X = (-\infty, 0)$; d) $X = [-2, +3]$;

e) $X = (-5, +\infty)$.

80. Să considerăm dreptunghiul $ABCD$ şi punctul O de intersecţie al diagonalelor AC şi CB. Să notăm: $X = \{M / M \in AB\}$.
Mulţimea M este formată din punctele care aparţin segmentului AB. Să stabilim o corespondenţă astfel încît unui punct M al segmentului AB să-i corespundă un punct M', cu proprietatea $OM = OM'$, punctele O, M, M' fiind coliniare.

a) Să se afle mulţimea Y a punctelor M'.

b) Să se arate că corespondenţa de la X la Y este o funcţie.

c) Dacă notăm cu f funcţia, să se afle: $f(A)$, $f(B)$.

d) Să notăm cu Q mijlocul segmentului AB. Să se arate ce proprietate are $f(Q)$.

81. Se dau în plan trei puncte necoliniare A, B şi C şi un segment de dreaptă RQ, a cărei lungime este egală cu a. Se stabileşte o corespondenţă astfel încît unui punct M aşezat pe laturile triunghiului ABC să-i corespundă punctul M', care satisface relaţia: $MM' \parallel RQ$ şi $MM' = RQ$.

a) Să se determine mulţimea Y a punctelor M'.

b) Să se arate că această corespondenţă este o funcţie.

c) Dacă notăm cu f funcţia stabilită, să se arate ce proprietate au punctele : $f(A)$, $f(B)$ şi $f(C)$.

82. Se dă mulţimea X a punctelor din plan, care sînt aşezate pe circumferinţa unui cerc, mulţimea Y a punctelor care aparţin segmentelor MN şi un punct oarecare S (fig. 5.22).

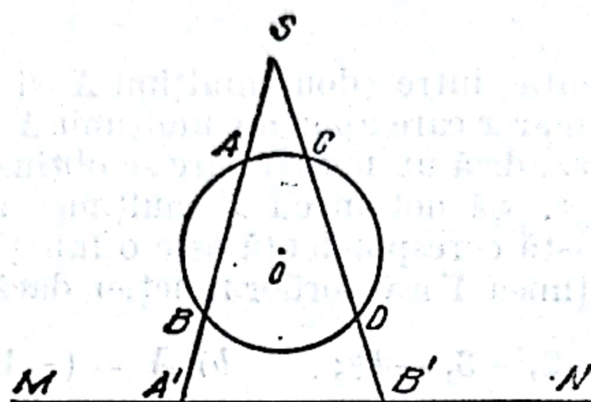


Fig. 5.22

Să se stabilească o corespondenţă între mulţimea punctelor aşezate pe circumferinţa cercului O şi mulţimea punctelor aparţinînd segmentului MN astfel încît unui punct A de pe circumferinţa cercului să-i corespundă punctul A', care se află la intersecţia dreptelor SA şi MN. Să se arate de ce această corespondenţă nu este o funcţie.

83. Se consideră mulţimea X a numerelor naturale pare şi mai mici sau cel mult egale cu numărul natural 10 şi mulţimea Y formată din pătratele acestor numere. Să stabilim o corespondenţă între aceste mulţimi, astfel încît unui număr din mulţimea X să-i corespundă pătratul său în mulţimea Y.

a) Să se arate că această corespondenţă este o funcţie.

b) Să se alcătuiască tabelul de variaţie al acestei funcţii, trecînd pe o linie numerele care aparţin mulţimii X, iar pe cealaltă linie numerele care corespund acestora în mulţimea Y.

84. Se dă mulţimea A a numerelor naturale mai mici sau cel mult egale cu numărul natural 10 şi mulţimea B a numerelor naturale formată de cuburile acestora. Se stabileşte o corespondenţă între mulţimile A şi B, astfel încît fiecărui număr din mulţimea A să-i corespundă cubul său în mulţimea B. Să se alcătuiască tabelul de variaţie.

85. Funcţia f este dată prin tabelul scris mai jos :

x	-1	0	1	2	3
y	1	0	1	4	9

Să se afle $f(-1), f(0), f(1)$?

86. Funcţia g este dată prin tabelul :

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

Să se verifice că, dacă x este un număr scris în prima linie, această funcţie satisface proprietatea :

$$g(-x) = -g(x).$$

87. Un corp se deplasează uniform şi fără frecare cu o viteză de 30 km/h, pornind din stare de repaus. Să se afle spaţiul parcurs de corp după : o oră, două ore, trei ore, patru ore, şi să se completeze tabelul de variaţie.

t	1	2	3	4	5	6	7
S	30	60					

Funcţii date printr-o formulă

88. O funcţie este dată prin formula : $y = 2x$. Să se afle pentru ce valori ale lui x, funcţia este egală cu zero. Să se stabilească valoarea funcţiei y, cînd x ia valoarea -4.

89. O funcţie este dată prin relaţia $y = 3x$. Să se afle valorile lui y corespunzătoare lui $x = 1, 2, 3$. Să se întocmească tabelul de variaţie al funcţiei şi apoi să se construiască graficul său.

90. O funcţie este dată prin relaţia $y = 5x$. Să se afle valorile lui y corespunzătoare lui $x = -1, 0, 2, 3$. Să se întocmească tabelul de variaţie cuprinzînd aceste valori şi apoi să se construiască graficul funcţiei.

91. Se dă funcţia $y = 3x^2 + 1$ şi domeniul de definiţie al funcţiei $X = \left\{-2, -1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Să se găsească mulţimea valorilor funcţiei.

92. Funcţia $f(x)$ este dată prin relaţia $y = 5x^2 - 2$. Să se afle $f(0), f(-1), f\left(\frac{1}{2}\right)$.

93. În tabelul de mai jos se arată corespondenţa dintre valorile lui x şi valorile funcţiei y:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-2	-1	0	0	1	8	27

Să se scrie această funcţie cu ajutorul unei formule.

94. În tabelul scris mai jos se arată corespondenţa stabilită de o funcţie, numai pentru primele trei valori ale lui x. Să se scrie funcţia cu ajutorul unei formule ($y = x + b$) şi apoi să se completeze tabelul de variaţie pentru celelalte valori:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-2	-1	0				

95. O funcţie q este dată prin formula: $q(x)=5x + 10$. Să se afle pentru ce valori ale lui x avem: $q(x) = 5$, $q(x) = 10$, $q(x) = 15$, $q(x) = 20$.

96. O funcţie f este dată prin formula $f(x) = 3x + 6$. Să se stabilească mulţimea valorilor lui x, cu condiţia ca $f(x) > 0$, adică mulţimea valorilor lui x, pentru care valorile corespunzătoare lui y sînt pozitive.

97. Se dă funcţia $y = 3x - 6$. Să se stabilească mulţimea valorilor lui x pentru care valorile corespunzătoare ale lui y sînt negative ($f(x) < 0$).

98. Funcţia y este dată de relaţia $y = 3x + 1$. Să se stabilească mulţimea valorilor funcţiei corespunzătoare valorilor:

$$x = -1,\ x = 1,\ x = 2,\ x = 3.$$

Să se întocmească tabloul de variaţie şi apoi să se construiască graficul funcţiei.

Să se verifice că punctul $M(-2, -5)$ se află pe grafic.

Să se arate apoi că valorile $x = -2$, $y = -5$ verifică relaţia $y = 3x + 1$.

99. O funcţie f este dată prin graficul din figura 5.23 pentru $x \in [-3, +3]$. Să se afle cu ajutorul graficului:

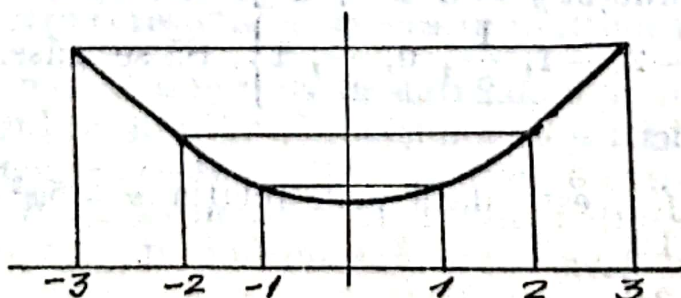


Fig. 5.23

a) mulţimea valorilor funcţiei f;

b) valoarea funcţiei pentru $x = 0$;

c) să se afle $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$.

100. O funcţie f este dată prin graficul din fig. 5.24 pentru $x \in [-4, 4]$. Să se stabilească cu ajutorul graficului:

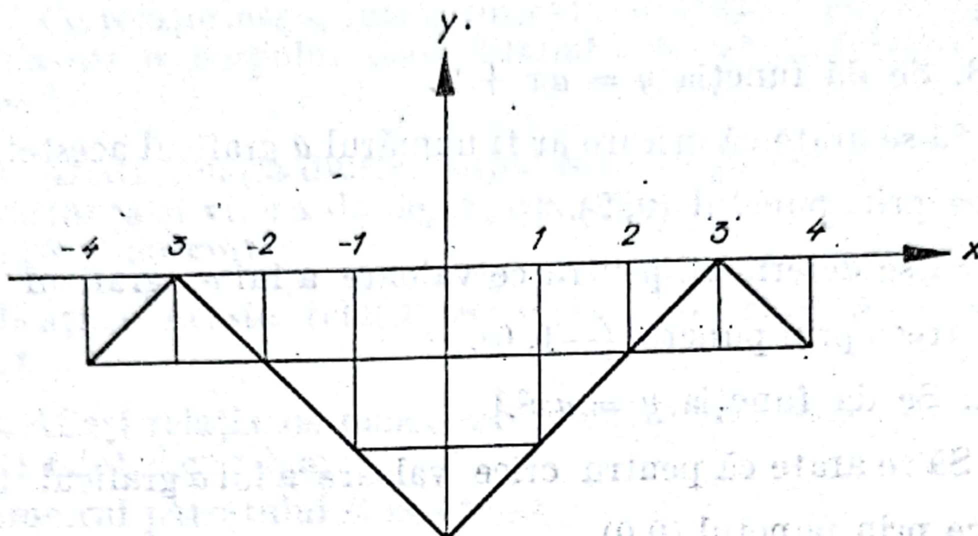


Fig. 5.24

a) Domeniul valorilor funcţiei;

b) Mulţimea valorilor x pentru care funcţia primeşte valori pozitive;

c) Mulţimea valorilor x pentru care funcţia f primeşte valori negative;

d) Mulţimea valorilor x pentru care avem satisfăcută relaţia: $-1 \leqslant f(x) \leqslant -3$;

e) Valoarea corespunzătoare a lui y pentru $x = 0$;

f) Pentru ce valori ale lui x funcţia este egală cu zero.

101. O funcţie este dată prin relaţia $y = 4x + 1$. Să se întocmească tabloul de variaţie pentru $x = 1, 2, 3, 4, 5$.

Să se reprezinte grafic funcţia.

Dacă $x \in [1, 5]$, să se afle domeniul valorilor funcţiei.

102. Să se construiască graficul funcţiei $y = \dfrac{x^2}{2}$, unde $x \in$ $\in [-4, 4]$.

Să se găsească pe grafic mulţimea valorilor variabilei x, pentru care:

$a)$ $y = 0$; $b)$ $y > 0$; $c)$ $y \leqslant 1$; $d)$ $y \geqslant 1$.

Să se construiască graficul funcţiei $y = x^2 + 1$, unde $x \in [-2, 2]$.

Să se arate că punctul de coordonate $(-1, 2)$ se află pe grafic.

103. Se dă funcţia $y = ax + 2$.

$a)$ Să se arate că oricare ar fi numărul a graficul acestei funcţii trece prin punctul $(0, 2)$.

$b)$ Să se determine pentru ce valoare a lui a, graficul acestei funcţii trece prin punctul $(-1, 0)$.

104. Se dă funcţia $y = ax^2$.

$a)$ Să se arate că pentru orice valoare a lui a graficul funcţiei trece prin punctul $(0,0)$.

$b)$ Să se afle apoi pentru ce valoare a lui a graficul funcţiei trece prin punctul de coordonate $(2, 4)$.

105. O funcţie este dată prin formula $y = x^2$. Să se găsească domeniul de definiţie X, dacă mulţimea valorilor funcţiei este intervalul

1) $[0, 1]$; 2) $[0,4]$; 3) $[0, 9]$.

106. Se dau funcţiile: $y = 4x+1$ şi $y = 2x + 1$. Să se reprezinte grafic şi apoi să se stabilească coordonatele punctului de intersecţie al celor două drepte.

Să se verifice apoi că coordonatele punctului de intersecţie al acestor două drepte verifică cele două relaţii prin care sînt date funcţiile.

107. O funcţie f este dată prin formula $y = |x|$, unde $x \in [-4, 4]$.

Să se afle: $f(-1), f(-2), f(-3), f(-4), f(1), f(2)$.

108. Se dau funcţiile: $y = x^2$, $y = 5x - 6$.

Să se stabilească cu ajutorul graficului mulţimea punctelor x pentru care $x^2 = 5x - 6$.

109. O funcţie este dată prin formula $y = |x| - 1$. Să se afle mulţimea valorilor lui x pentru care funcţia ia valoarea 1.

Proporţionalitatea directă şi inversă

110. Ce relaţie leagă, într-o mişcare cu viteza constantă $V = 4$ km/h, drumul parcurs şi timpul necesar parcurgerii drumului?

111. Ce relaţie leagă, într-o mişcare, drumul parcurs şi viteza de deplasare a corpului dacă timpul necesar deplasării nu se schimbă?

112. Aflaţi relaţia dintre timpul necesar parcurgerii unei anumite distanţe şi viteza de deplasare, dacă distanţa rămîne mereu aceeaşi ($S = 20$ km).

Indicaţie: Aceste relaţii se deduc din formulele mişcării $S = v \cdot t$.

113. Aflaţi relaţia de dependenţă dintre următoarele mărimi şi stabiliţi felul dependenţei:

a) perimetrul pătratului şi latura sa;

b) aria dreptunghiului şi lungimea sa (cînd lăţimea rămîne neschimbată);

c) aria triunghiului şi înălţimea sa (cînd baza rămîne neschimbată);

d) baza şi înălţimea dreptunghiului (cînd aria rămîne neschimbată);

e) aria rombului şi una din diagonalele sale (cînd cealaltă rămîne neschimbată);

f) diagonalele rombului (cînd aria rămîne neschimbată).

114. Scrieţi o relaţie de dependenţă între următoarele mărimi:

a) lungimea cercului şi raza sa;

b) aria laterală a cilindrului şi generatoarea (cînd raza bazei rămîne neschimbată);

c) aria laterală a conului şi lungimea razei (cînd generatoarea rămîne neschimbată);

d) generatoarea unui con şi raza sa cînd aria laterală a conului rămîne constantă;

e) perimetrul unui triunghi care are toate laturile egale şi lungimea laturii sale.

115. În ce relaţii de dependenţă se află numărul de ore în care se poate efectua o lucrare şi numărul de muncitori, cunoscînd că fiecare muncitor lucrează aceeaşi parte din lucrare.



116. Un dreptunghi are dimensiunile 4 şi 5 cm. Cu cît trebuie să se mărească lăţimea dreptunghiului pentru ca suprafaţa să crească de două ori (lăţimea rămîne constantă)?

117. Să se construiască graficul funcţiei $y = 3x$. Să se găsească apoi valorile lui y corespunzătoare lui $x = -1, 1, 4, 2$.

118. Să se construiască graficul funcţiei : $y = -3x$.

a) Dacă variabila x aparţine intervalului (0,1), să se afle la ce mulţime aparţine variabila y şi să se arate pe grafic.

b) Pentru ce valori ale variabilelor x, variabila y aparţine mulţimii numerelor pozitive.

c) Să se afle pentru ce valoare a lui x, y este egal cu -6.

119. În fig. 5.25 este construită o dreaptă ce trece prin

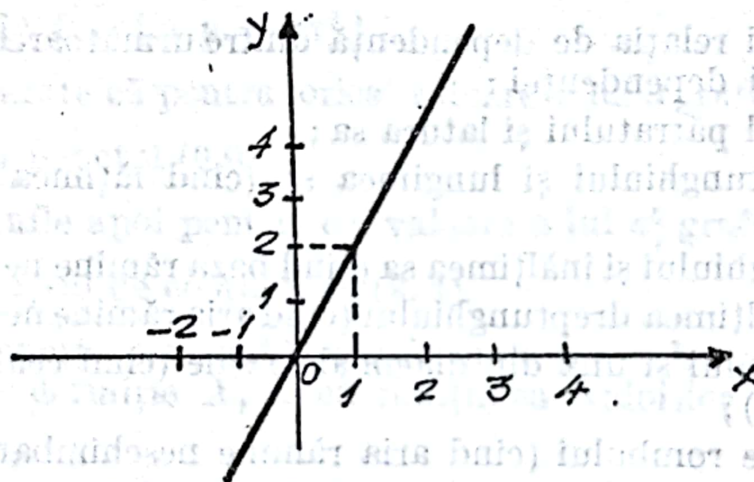


Fig. 5.25

punctul O.

Dreapta reprezintă graficul unei funcţii. Folosind acest grafic să se completeze tabelul.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							
$\frac{y}{x}$							

120. Se dă funcţia : $y = 4x$. Să se construiască graficul acestei funcţii.

Să se verifice apoi care din următoarele puncte aparţin graficului $A(1, 4)$, $B(2, 3)$, $C(-1, -4)$, $D(-2, -5)$.

121. Se dă funcţia $f: R \to R$ $f(x) = 3x$. Fără să se construiască graficul, să se verifice direct dacă punctele $A(1,3)$, $B(-4, -12)$, $C(-1, -6)$ aparţin graficului.

122. Să se construiască graficul funcţiilor $y = 4x$, $y = -2x$, $y = 5x$ şi apoi să se stabilească cu ajutorul acestor grafice care este coeficientul de proporţionalitate al fiecărei funcţii.

123. Se ştie că punctul $A(1, 3)$ aparţine graficului proporţionalităţii directe a două variabile. Să se afle coeficientul de proporţionalitate.

124. Să se construiască graficul funcţiei $y = \frac{1}{x}$ şi să se afle apoi cu ajutorul graficului valorile aproximative ale variabilei y cînd $x = -1, 5$; $-2,5$.

125. Se consideră funcţia $y = \frac{4}{x}$. Să se construiască graficul acestei funcţii şi apoi să se stabilească cu ajutorul acestui grafic mulţimea căreia îi aparţine variabila y dacă variabila x aparţine mulţimilor:

$$[-4, -1],\ [1, 4],\ [-6, -2],\ [2, 6].$$

126. Se consideră funcţia $y = \frac{3}{x}$. Să se construiască graficul acestei funcţii. Să se afle cu ajutorul graficului valorile variabilelor y pentru $x = 1,5$; 2; 5; 3; 5.

127. Se consideră funcţia: $y = \frac{-4}{x}$. Să se afle mulţimea căreia îi aparţine variabila y, dacă x aparţine mulţimilor:

$$[-2, 0], \quad [0, +2].$$

128. Se ştie că punctul $A(1, a)$ aparţine graficului funcţiei $y = \frac{3}{x}$.

Să se afle a.

129. Să se construiască curbele:

$$xy = 8,\ xy = 1, \quad xy = -1.$$

130. Un tren merge cu o viteză de 60 km/h. Să se exprime drumul parcurs în funcţie de timpul t şi să se reprezinte grafic variaţia acestei funcţii.

(Se va reprezenta pe axa Ot 1 oră prin segmentul de lungime egal cu 1 cm, iar pe axa Ov, distanţa de 40 km se va reprezenta prin segmentul a cărui lungime este 1 cm.)
Cu ajutorul graficului din problemă să se stabilească drumul parcurs după $2\frac{1}{2}$ ore.

131. S-a studiat experimental viteza sunetului la diferite temperaturi şi s-a obţinut următorul tabel :

t (°C)	−30	−19	−5	0	8	12	20	30
$v(m/s)$	313	321	329	332	337	339	344	349

Să se alcătuiască graficul variaţiei vitezei în funcţie de temperatură.

132. O cantitate de marfă costă 120 lei. Cît va costa o cantitate de trei ori mai mare din acelaşi fel de marfă? (oral).

133. Un mobil parcurge distanţa de 120 km într-un anumit timp. Mergînd cu aceeaşi viteză, ce distanţă va parcurge într-un timp de două ori mai mic? (oral).

134. Viteza unei motociclete este 2/5 din viteza unui automobil. Să se afle raportul dintre timpul în care motocicleta parcurge o distanţă şi timpul în care automobilul parcurge aceeaşi distanţă.

135. Un mobil, în mişcare uniformă, parcurge, în 3 ore, 108 km. Dacă viteza rămîne constantă, cît va parcurge mobilul în 4 ore? dar în 10 ore?

136. Patru centimetri cubi dintr-un material cîntăresc 31,2 g. Cîte grame cîntăresc 2 cm^3 din acelaşi material?

137. Şase muncitori termină de săpat un şanţ în 4 zile. Dar 3 muncitori, lucrînd cu acelaşi randament ca primii, în cîte zile vor săpa acelaşi şanţ?

138. Un automobil mergînd cu viteza de 60 km/h parcurge o anumită distanţă în 4 ore. În cîte ore va parcurge automobilul aceeaşi distanţă dacă viteza va fi de 90 km/h?

139. Patru robinete vor umple un bazin în 6 ore. Cîte robinete de acelaşi fel vor fi necesare pentru ca acelaşi bazin să poată fi umplut în 3 ore.

Capitolul 6

STATISTICA

6.1. POPULAȚIE STATISTICĂ. EȘANTION

În foarte multe din activitățile practice este necesar să alcătuim o colecție de date, obținute din simple observații sau măsurători. Această organizare se face în scopul de a obține informații necesare organizării și conducerii acestor activități.

Vom numi populație statistică orice mulțime care formează obiectul unei analize statistice. Elementele unei populații statistice se numesc unități statistice sau indivizi. Să presupunem de exemplu că dorim să analizăm notele obținute de elevii unei clase la matematică. Populația statistică este în acest caz formată din elevii clasei.

Cînd studiem această populație statistică facem abstracție de alte proprietăți ale elementelor care o alcătuiesc, ca de exemplu notele obținute de elevi la o altă disciplină de învățămînt sau cunoștințele practice.

Noi cercetăm această populație statistică numai în raport cu o anumită proprietate, care în exemplul nostru este calitatea notelor obținute la matematică.

Proprietatea în raport de care noi cercetăm elementele unei populații statistice se numește *proprietate caracteristică.*

Dacă numărul elevilor din școală este foarte mare, este aproape imposibil de a cerceta toate notele și de a face o clasificare a lor.

Vom alege pentru aceasta numai notele pe care le-au obținut la matematică elevii din clasa unde învață elevul X. Mulțimea elevilor din această clasă este o submulțime a mulțimii elevilor din școală. Vom numi această submulțime *eșantion*.

Un *eșantion* este prin urmare o submulțime a unei populații statistice, aleasă în mod special pentru a se cerceta elementele ei în raport cu o proprietate caracteristică.

Alegerea eșantionului se face cu respectarea anumitor condiții.

Este necesar ca informaţiile pe care le obţinem din analiza datelor, cercetînd elementele eşantionului, să fie aproximativ adevărate pentru întreaga populaţie statistică. Această condiţie se numeşte *reprezentativitatea eşantionului.*

Proprietatea caracteristică a elementelor care alcătuiesc o populaţie statistică are un caracter foarte variat; se disting proprietăţi calitative sau cantitative. Dacă vrem să obţinem anumite informaţii asupra înălţimii elevilor din aceeaşi şcoală şi care au aceeaşi vîrstă, atunci cel mai simplu mod este acela de a măsura înălţimea elevilor unei singure clase — în cazul cînd şcoala are un număr mare de clase paralele.

În acest exemplu *populaţia statistică* este formată din elevii şcolii care au aceeaşi vîrstă şcolară.

Proprietatea caracteristică a acestei populaţii statistice este *înălţimea elevilor.*

Eşantionul statistic este format din elevii unei singure clase.

6.2. ÎNREGISTRAREA ŞI CLASIFICAREA DATELOR

Să presupunem că pentru a obţine informaţii asupra notelor acordate la lucrarea scrisă, la matematică, se analizează lucrările a 20 de elevi dintr-o clasă. Se scriu notele obţinute de elevi în ordinea în care ei sînt trecuţi în catalog.

5, 6, 8, 6, 7, 8, 7, 4, 5, 6,
7, 8, 4, 3, 9, 6, 5, 6, 7, 8.

Mulţimea acestor numere, obţinute ca rezultat al aprecierii calităţii lucrărilor, formează un tablou de date.

Aceste date pot fi aranjate în ordine crescătoare şi se obţine o înregistrare, începînd cu cea mai mică notă, pînă la cea mai mare.

Aşezarea acestor valori în ordine crescătoare se numeşte *clasificarea datelor.* Diferenţa dintre cea mai mare şi cea mai mică valoare a înregistrărilor se numeşte distanţă. Distanţa pentru mulţimea noastră de date este 9—3 sau 6.

Numărul de elevi din care este compusă clasa analizată este 20. În general, numărul de elemente ale unui eşantion se numeşte *volumul eşantionului* şi se notează cu litera N. Prin urmare, în exemplul analizat $N = 20$.

Rezultatele clasificării datelor statistice sînt consemnate în tablouri (tabelul 1), unde pe prima coloană se trec notele elevilor la lucrarea scrisă, pe coloana a doua se marchează prin liniuţe numai elevii care au luat nota respectivă, iar pe coloana a treia se trece numărul de elevi care au luat nota trecută în coloana I-a, totalizînd numărul de liniuţe.

Numărul elevilor care corespund unei anumite note școlare sau care au luat la lucrarea scrisă nota respectivă se numește efectiv sau frecvență absolută. Pentru notația frecvenței absolute se folosește litera n. Se numește frecvența absolută a unei valori x a caracteristicii numărul de unități ale populației corespunzătoare acestei valori.

Din analiza datelor prezentate mai sus rezultă că:

Un elev a obținut nota trei; doi elevi au obținut nota 4; trei elevi au obținut nota 5; cinci elevi au obținut nota 6; patru elevi au obținut nota 7; patru elevi au obținut nota 8; un elev a obținut nota 9.

Aceste note pot fi trecute într-un tabel care are în prima coloană notele, iar în coloana a 2-a, frecvențele.

Notele elevilor la lucrările scrise

Valori	x	Marcarea elementelor	Frecvența
x_1	3	/	1
x_2	4	//	2
x_3	5	///	3
x_4	6	/////	5
x_5	7	////	4
x_6	8	////	4
x_7	9	/	1

Mulțimea valorilor proprietății caracteristice și a frecvențelor corespunzătoare alcătuiesc o serie statistică.

O serie statistică se poate prezenta sub forma unui tabel simplu avînd două coloane: pe prima coloană se trec valorile măsurătorilor sau ale datelor de observație; pe cea de a doua coloană, frecvența corespunzătoare, n_1.

Suma tuturor frecvențelor absolute este egală cu *volumul eșantionului*:

$$1+2+3+5+4+4+1 = 20$$

Datele trecute în tabel alcătuiesc o serie statistică.

6.3. FRECVENȚA RELATIVĂ

Se numește frecvență relativă raportul dintre frecvența absolută și *volumul eșantionului.*

Frecvenţa absolută se notează cu litera n.

$$f = \frac{n}{N}$$

f — frecvenţa relativă,
n — frecvenţa absolută,
N — volumul eşantionului.

Exemplu

Vrem să cunoaştem care este raportul dintre numărul elevilor care au obţinut nota 6 şi numărul total al elevilor din clasă.

Pentru a răspunde la această întrebare trebuie să analizăm tabelul de date.

În prima coloană a acestui tabel sînt trecute în ordine crescătoare notele elevilor iar în coloana a 3-a frecvenţele relative corespunzătoare.

Numărul elevilor care au obţinut nota 6 este egal cu 5.

Ţinînd seama de notaţiile introduse putem scrie :

$$n = 5, N = 20.$$

Frecvenţa relativă f este raportul dintre numărul elevilor care au obţinut nota 6 şi numărul elevilor din clasă.

Prin urmare :

$$f = \frac{n}{N} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

Exprimarea frecvenţei relative în procente

Pentru a exprima acest raport în procente, folosim regula de trei simplă.

$$\begin{array}{ccc} 20 & \ldots\ldots\ldots & 100 \\ 5 & \ldots\ldots\ldots & x \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{5}{20} \times 100 = 25\%$$

Din analiza acestui exemplu simplu rezultă că exprimarea în procente se face înmulţind frecvenţa relativă cu numărul 100.

Se mai constată că suma tuturor frecvenţelor relative ale unei serii statistice este egală cu 1.

$$\frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{3}{20} + \frac{5}{20} + \frac{4}{20} + \frac{4}{20} + \frac{1}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

Valori	Frecvenţe absolute	Frecvenţe relative
3	1	$\frac{1}{20}$
4	2	$\frac{2}{20}$
5	3	$\frac{3}{20}$
6	5	$\frac{5}{20}$
7	4	$\frac{4}{20}$
8	4	$\frac{4}{20}$
9	1	$\frac{1}{20}$

6.4. POLIGONUL DE FRECVENŢĂ

Valorile datelor de observaţie sau ale măsurătorilor pot fi reprezentate grafic în raport cu un sistem cartezian de coordonate

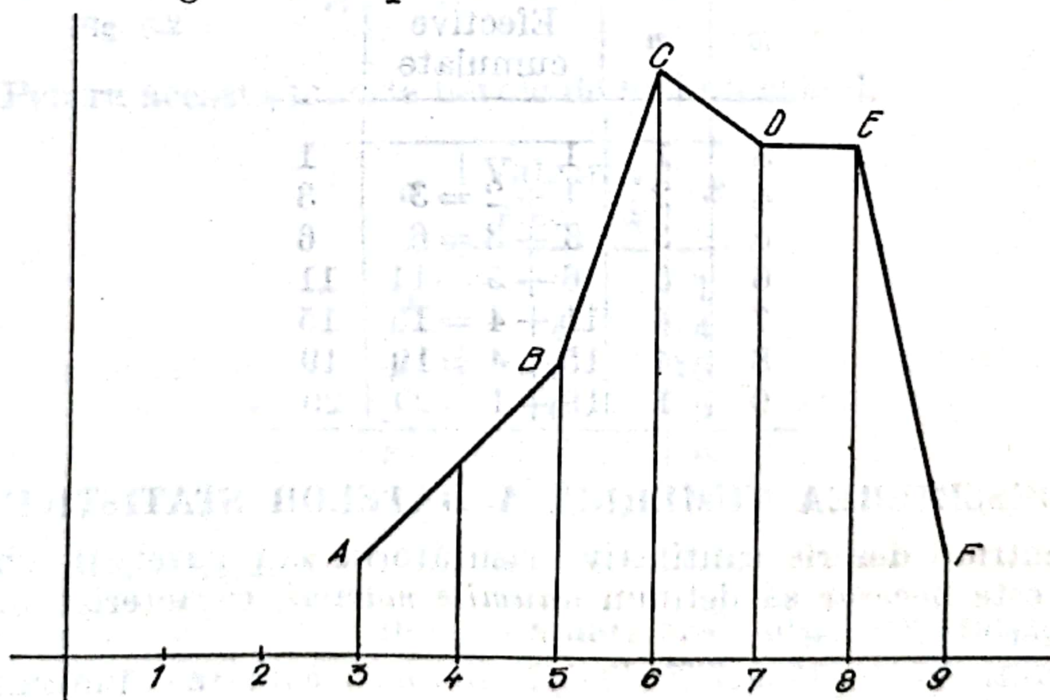


Fig. 6.1

astfel : pe axa orizontală se reprezintă prin puncte valorile măsurătorilor sau ale datelor de observaţie (fig. 6.1). În aceste puncte se ridică perpendiculare pe axa orizontală pe care se măsoară segmente proporţionale cu frecvenţele respective. Se obţin punctele A, B, C, D, E, F.

Se unesc punctele astfel obţinute şi se obţine o linie poligonală numită poligonul frecvenţelor.

6.5. FRECVENŢE CUMULATE

În anumite măsurători este foarte important să cunoaştem nu numai frecvenţele corespunzătoare unei anumite valori, a caracteristicilor studiate, ci mai ales suma tuturor frecvenţelor anterioare.

De exemplu, dacă analizăm rezultatele la lucrarea scrisă la matematică a elevilor unei clase este interesant de aflat cîţi elevi nu au obţinut note de trecere, adică mai mici decît 5.

Din analiza tabelului 1 de date, noi constatăm că nota cinci este cea de a treia valoare din şirul crescător al valorilor.

Frecvenţa absolută corespunzătoare acestei valori este $n_3 = 3$.

Pentru a afla numărul elevilor care au obţinut mai puţin decît nota 5, trebuie să adunăm efectivele corespunzătoare notelor mai mici decît 5, adică efectivele corespunzătoare lui $x_1 = 3$ şi $x_2 = 4$.

Prin urmare, vom avea :

$$1 + 2 = 3.$$

Frecvenţele cumulate se calculează în tabelul alăturat.

x	n	Efective cumulate	
3	1	1	1
4	2	$1 + 2 = 3$	3
5	3	$3 + 3 = 6$	6
6	5	$6 + 5 = 11$	11
7	4	$11 + 4 = 15$	15
8	4	$15 + 4 = 19$	19
9	1	$19 + 1 = 20$	20

6.6. DESCRIEREA NUMERICĂ A DATELOR STATISTICE

Pentru a descrie cantitativ măsurătorile sau datele de observaţie este necesar să definim *anumite mărimi*, caracteristice, ale unei serii statistice.

Printre aceste mărimi distingem unele care ne informează asupra tendinţelor centrale ale unei distribuţii, indicînd ordinul de

mărime al elementelor unei serii statistice. Cele mai frecvent utilizate sînt : modul, mediana, media aritmetică.

6.6.1. MODUL

Modul este acea valoare a datelor de observaţie sau măsurători care corespunde frecvenţei celei mai ridicate.

Modul este o valoare care se află direct din tabelul de date. În tabel efectivul cel mai ridicat sau frecvenţa cea mai mare este $n = 10$.

Nota corespunzătoare acestei frecvenţe este : $x = 5$. Prin urmare modul este egal cu 5.

Modul se poate citi direct şi pe un grafic dacă s-a întocmit poligonul de frecvenţă (fig. 6.2).

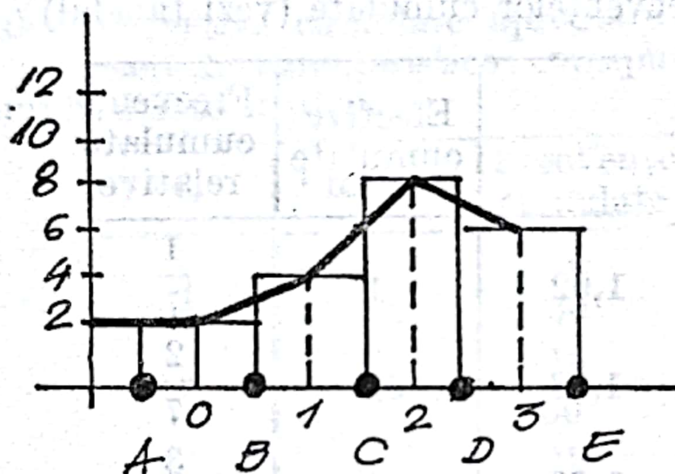


Fig. 6.2

Pentru aceasta nu este nevoie de nici un calcul.

x	Valoarea efectivă	x
x_1	2	1
x_2	4	4
x_3	5	10
x_4	6	5
x_5	7	6
x_6	8	4

6.6.2. MEDIANA

Mediana este acea valoare x a datelor de observaţie sau măsurătorilor caracteristice care împarte în două părţi egale efectivele populaţiei studiate.

Mediana unei serii este un număr x, astfel că există tot atîtea unităţi corespunzătoare valorilor $< x$, ca şi cele corespunzătoare valorilor $> x$.

Mediana se află după ce în prealabil valorile observaţiilor au fost scrise în ordine crescătoare.

Prin urmare mediana are acea valoare a măsurătorilor ce corespunde valorii $\frac{1}{2}$ a frecvenţei relative cumulate.

Exemplu:

S-au măsurat înălţimile a 7 copii şi s-au găsit următoarele valori: 1,62; 1,68; 1,70; 1,74; 1,76; 1,78; 1,80.

Efectivul corespunzător fiecărei valori a proprietăţii caracteristice este 1. Pentru a se afla mediana se întocmeşte tabloul de distribuţie al frecvenţelor cumulate (vezi tabelul)

x_i	Efective cumulate	Frecvenţe cumulate relative
1,62	1	$\frac{1}{7}$
1,68	2	$\frac{2}{7}$
1,70	3	$\frac{3}{7}$
1,74	4	$\frac{4}{7}$
1,76	5	$\frac{5}{7}$
1,78	6	$\frac{6}{7}$
1,80	7	$\frac{7}{7}$

Din acest tablou se observă că frecvenţa cumulată relativă apropiată de valoarea $\frac{1}{2}$ este cea căreia îi corespunde o valoare a proprietăţii caracteristice egală cu 1,74.

Prin urmare valoarea medianei este de 1,74 sau $M = 1{,}74$.
Această valoare se poate stabili şi direct din datele de observaţie aşezate în ordine crescătoare.

1,62 ; 1,68 ; 1,70 ; 1,74 ; 1,76 ; 1,78 ; 1,80.

În cazul în care avem un număr par de măsurători sau date atunci mediana se stabileşte făcînd media a două valori succesive egal depărtate de valorile extreme ale seriei de date.

Exemplu:

Înălţimile a şase elevi aşezate în ordine descrescătoare sînt: 1,88 ; 1,76 ; 1,74 ; 1,72 ; 1,70 ; 1,65.

$$M = \frac{1{,}74 + 1{,}72}{2} = 1{,}73.$$

Dacă o valoare a caracteristicii (a proprietăţii) este luată de mai multe ori, atunci se află jumătate din volumul eşantionului şi se caută valorile efective cumulate apropiate de aceste valori.

Valoarea proprietăţii caracteristice corespunzătoare acestor frecvenţe cumulate este mediana.

x_i	Efective	Frecvenţe cumulate
1	5	$\frac{5}{30}$
2	15	$\frac{15}{30}$
3	18	$\frac{18}{30}$
4	5	$\frac{5}{30}$
5	7	$\frac{7}{30}$

$N = 30$

În acest tabel pe prima coloană sînt trecute punctele obţinute la probele de control la matematică de treizeci de elevi ai unei clase. Probele au fost apreciate cu puncte de la 0 la 5.

Prin împărţirea lui 30 la 2 se obţine 15.

Valorii de 15 unităţi a efectivelor cumulate îi corespunde valoarea $x_1 = 2$ a proprietăţii caracteristice.

Prin urmare: $M = 2$.

Mediana se poate determina şi grafic observînd diagrama cumulativă a frecvenţei.

Mediana este acea valoare a proprietății caracteristice care corespunde punctului de pe diagrama cumulativă, care marchează valoarea $\frac{1}{2}$ a frecvenței cumulative (fig. 6.3).

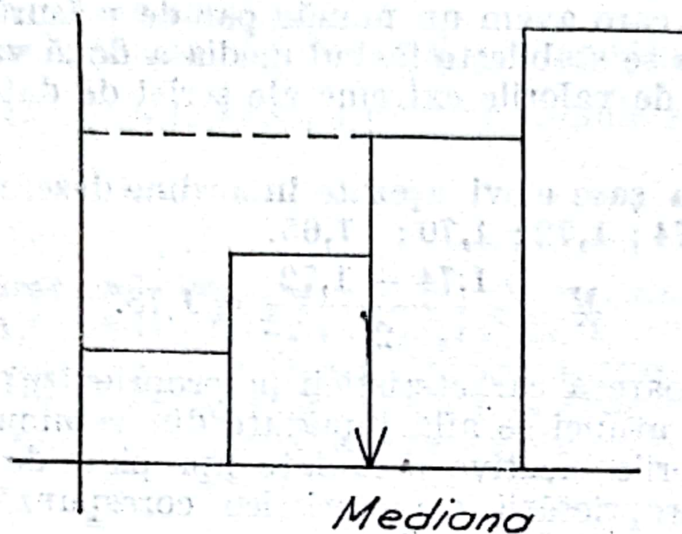


Fig. 6.3

6.6.3. MEDIA ARITMETICĂ

Să presupunem că un elev a obținut la examinarea orală de matematică notele:

8, 6, 8, 6, 8, 6.

Se cere să se calculeze media notelor la matematică.
Pentru a afla media notelor obținute de elev se împarte suma notelor la numărul total al notelor și obținem:

$$x = \frac{8 + 6 + 8 + 6 + 8 + 6}{6} = 7.$$

Media aritmetică a acestor rezultate se mai poate calcula astfel:

$$x = \frac{8 \cdot 3 + 6 \cdot 3}{6} = \frac{42}{6} = 7.$$

În produsul $8 \cdot 3$, numărul 3 ne arată numărul notelor de 8, iar în produsul $6 \cdot 3$ numărul 3 ne arată numărul notelor de 6.
Se întocmește o serie statistică a notelor obținute.
Media aritmetică a mai multor măsurători se obține împărțind suma produselor dintre valorile datelor de observație sau ale măsurătorilor și frecvențelor corespunzătoare la volumul sau numărul total al valorilor obținute din măsurători.

Exemplu:

Performanţele obţinute de 20 elevi la o probă de matematică au fost exprimate în puncte astfel:
18, 17, 16, 16, 18, 16, 16, 20, 18, 17, 17, 18, 16, 18, 16, 16, 17, 20, 18, 18.

Să se afle scorul mediu.

Pentru a calcula scorul mediu se întocmeşte o serie statistică a rezultatelor obţinute:

x	f	$x \times f$
16	7	$7 \times 16 = 112$
17	4	$4 \times 17 = 68$
18	7	$7 \times 18 = 126$
19	0	$19 \times 0 = 0$
20	2	$20 \times 2 = 40$

$$x = \frac{7 \times 16 + 4 \times 17 + 7 \times 18 + 20 \times 2}{7 + 4 + 7 + 2} =$$

$$= \frac{112 + 68 + 126 + 40}{20} = \frac{346}{20} = 17{,}3.$$

6.7. EXERCIŢIU REZOLVAT

Să presupunem că trei monede sînt aruncate simultan de 20 ori şi se notează de fiecare dată numărul de apariţii ale mărcii. Numărul de apariţii ale mărcii este notat, pentru fiecare experiment, după ordinea de apariţie a evenimentelor, astfel:

1	2	3	2	1
0	3	2	0	2
1	2	0	3	1
3	0	2	2	1

Vom alcătui un tabel care cuprinde o coloană cu numărul de apariţii ale mărcii la fiecare aruncare a celor trei monede, iar a doua coloană frecvenţele corespunzătoare. Frecvenţa corespunzătoare valorii 0 ne arată de cîte ori nu a ieşit marca în cele 20 de aruncări. Frecvenţa corespunzătoare valorii 1 ne arată de cîte ori a ieşit o dată marca în cele 20 de aruncări consecutive. Frecvenţa corespunzătoare valorii 2 ne arată de cîte ori a ieşit de două ori marca în cele 20 de aruncări consecutive ş.a.m.d.

Vom marca printr-o liniuță (/) fiecare eveniment. Numărul de liniuțe ne dă numărul de apariții ale evenimentului corespunzător sau frecvența :

Nr. de mărci	Apariții	Frecvențe
0	////	4
1	/////	5
2	///////	7
3	////	4

Datele redate în tabel pot fi reprezentate în mai multe moduri. Cel mai simplu mijloc este cu ajutorul poligonului de frecvențe.

În locul poligonului de frecvențe se poate folosi o linie de frecvențe, astfel : se marchează printr-un punct mijlocul fiecărui segment AB, BC, CD, DE și în punctele astfel obținute se ridică perpendiculare pe axa Ox. Se marchează punctele astfel obținute și se unesc apoi printr-o linie. Se obține histograma sau linia poligonală a frecvențelor.

Media aritmetică a numărului de apariții a mărcii se notează cu x și se calculează astfel : se efectuează suma produselor dintre numerele care arată de cîte ori a ieșit marca la fiecare aruncare și frecvența corespunzătoare, care se împarte la suma frecvențelor.

$$x = \frac{0\cdot 4 + 1\cdot 5 + 2\cdot 7 + 3\cdot 4}{4 + 5 + 7 + 4} = \frac{5 + 14 + 12}{20} = \frac{31}{20}.$$

6.8. EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Valorile obținute în urma unor măsurători sînt :

17, 45, 38, 27, 6, 48, 11, 57.

Să se așeze aceste valori în ordine crescătoare apoi în ordine descrescătoare.

Să se calculeze distanța.

2. Rezultatele examinării lucrărilor scrise la matematică ale elevilor unei clase sînt date în tabelul următor :

10, 9, 4, 5, 8, 3, 7, 8, 9,

5, 8, 7, 5, 7, 9, 8, 6, 7, 8,

6, 8, 5, 7, 6, 8, 5, 4, 3, 10.

Să se alcătuiască un tablou de distribuție în care să fie trecute frecvențele absolute.

Să se alcătuiască un tablou de distribuţie care să cuprindă frecvenţele cumulate.

3. S-au măsurat înălţimile elevilor într-o clasă şi s-au găsit următoarele valori (în m):

1,55; 1,58; 1,60; 1,61; 1,62; 1,64;

1,65; 1,60; 1,62; 1,64; 1,66; 1,66;

1,61; 1,66; 1,69; 1,71; 1,66; 1,66.

Să se alcătuiască un tabel în care să se treacă frecvenţele absolute şi apoi frecvenţele relative.

4. S-a măsurat productivitatea anuală a unor pomi evaluată în kg fructe pe pomi şi s-au găsit următoarele rezultate:

11; 35; 24; 32; 14; 22; 5; 24;

26; 8; 15; 38; 7; 38; 12; 25;

13; 34; 26; 7; 18; 33; 24; 6;

15; 23; 35; 12; 26; 32; 28; 36;

24; 25; 23; 32; 35; 31; 34; 22;

26; 35; 21; 30.

a) aranjaţi aceste înregistrări în intervale de cîte 10;

b) să se alcătuiască apoi un tabel de distribuţie a valorilor pe clase, care cuprinde:

1) clasele de interval,

2) valoarea centrală a claselor,

3) efectivele.

c) să se construiască o histogramă a acestor date.

5. Folosiţi datele din problema precedentă şi calculaţi frecvenţele relative corespunzătoare pentru fiecare clasă.

Capitolul 7

PROBABILITĂŢI

7.1. NOŢIUNEA DE EVENIMENT

În natură şi în viaţa noastră au loc diferite întîmplări. De exemplu astăzi plouă, colegul meu de bancă a fost ascultat la matematică, mi-a scăpat stiloul, am aruncat o monedă şi a căzut „stema" etc.

Înţelegem prin eveniment rezultatul unei experienţe sau al unei observaţii. Dacă aruncăm un zar, constatăm că a căzut una din cele şase feţe ale zarului. Oricare ar fi rezultatul acestei experienţe, vom spune că a avut loc un anumit eveniment.

Evenimente sigure, posibile, imposibile. Unele dintre evenimentele pe care le-am amintit sînt sigure: „Ziua se face lumină, noaptea se face întuneric".

Alte evenimente sînt numai posibile dar nu sigure: „Mîine s-ar putea să merg la teatru". „Aruncînd o monedă, s-ar putea să cadă stema". Oricare din aceste evenimente poate să aibă sau să nu aibă loc. De aceea le vom numi *evenimente posibile.*

În alte cazuri trebuie să vorbim de evenimente imposibile. Într-o urnă punem 3 bile negre. Este imposibil să scoatem din urnă o bilă albă.

7.2. MULŢIMEA EVENIMENTELOR UNUI EXPERIMENT

Să considerăm experimentul ce constă din aruncarea unei monezi.

Să notăm cu M evenimentul ce constă din apariţia mărcii şi cu S evenimentul determinat de apariţia stemei.

Evenimentele acestui experiment sînt:

$$\{\{S\}; \{M\}; \{S, M\}; \emptyset\}$$

$\{S\}$ — apariţia stemei;

$\{M\}$ — apariţia mărcii;

$\{S, M\}$ — apariţia mărcii sau apariţia stemei;

$\emptyset$ — evenimentul imposibil, adică apariţia simultană a mărci şi stemei.

Evenimentul $\{S, M\}$ adică apariţia mărcii sau stemei se numeşte un eveniment sigur, deoarece el se produce în mod sigur (apare marca sau stema — altă posibilitate nu există în acest experiment). Evenimentul $\emptyset$ care constă în apariţia simultană a mărcii şi stemei se numeşte evenimentul imposibil, deoarece nu pot apărea simultan marca şi stema — apariţia unuia din evenimente exclude posibilitatea apariţiei celuilalt. Evenimentele $\{S\}$ şi $\{M\}$ sînt evenimente contrare, deoarece apariţia unui eveniment exclude apariţia celuilalt.

Exemplu:

Să considerăm experimentul ce constă din aruncarea a două monede. Mulţimea tuturor evenimentelor posibile este:

$$\{\{M, S\}, \{M, M\}, \{S, M\}, \{S, S\}\};$$

$\{M, S\}$ — este evenimentul ce constă din apariţia mărcii la prima monedă şi apariţia stemei la cea de-a doua monedă.

$\{M, M\}$ — este evenimentul ce constă din apariţia mărcii la prima monedă şi apariţia mărcii la cea de-a doua monedă.

$\{S, M\}$ — este evenimentul ce constă din apariţia stemei la prima monedă şi apariţia mărcii la cea de-a doua monedă.

$\{S, S\}$ — este evenimentul ce constă din apariţia stemei la prima monedă şi apariţia tot a stemei la cea de-a doua monedă.

7.3. PROBABILITATEA UNUI EVENIMENT

Să presupunem că într-o cutie se află 4 bile albe şi 4 bile roşii. Să cercetăm care este şansa ca la o extragere a unei bile din cutie să obţinem o bilă roşie. Să notăm cu A evenimentul care constă în extragerea unei bile albe şi cu B evenimentul care constă în extragerea bilei roşii.

Numărul de probe care realizează evenimentul A este 4, deoarece avem 4 bile albe în cutie. Numărul de probe care realizează evenimentul B este tot 4, deoarece avem 4 bile roşii. Prin urmare avem şanse egale de a extrage o bilă roşie sau o bilă albă, deoarece numărul bilelor albe este egal cu numărul bilelor roşii. Dacă într-o cutie avem 4 bile albe şi o bilă roşie, atunci şansa de a obţine la o extragere o bilă albă este mai mare decît cea de a obţine o bilă roşie, deoarece numărul bilelor albe este mai mare decît numărul bilelor roşii. Ne propunem să exprimăm printr-un număr şansa de a se realiza un eveniment. Din exemplul mai sus arătat, observăm că numărul care măsoară şansa de realizare a unui eveniment depinde în mod evident de numărul probelor care realizează evenimentul. Dacă numărul probelor care realizează un anumit eveniment este mare, atunci şi numărul care măsoară şansa este mare. Prin urmare numărul care măsoară şansa de realizare a unui eveniment este direct proporţional cu numărul de probe ce realizează evenimentul, adică cu numărul de cazuri favorabile.

Să presupunem acum că avem două cutii. În prima cutie, notată A, avem 4 bile roşii şi 5 bile albe, iar în a doua cutie, notată B, avem 4 bile roşii şi 10 bile albe. Să comparăm şansele de a extrage o bilă roşie din cutia A şi cutia B.

Este evident că şansa de a extrage o bilă roşie din cutia A este mai mare decît şansa de a extrage o bilă roşie din cutia B.

Prin urmare numărul care exprimă şansa de a realiza un eveniment este invers proporţional cu numărul tuturor probelor posibile, adică cu numărul evenimentelor posibile.

Numărul care exprimă şansa de realizare a unui eveniment se exprimă printr-un raport care are la numărător numărul de cazuri favorabile, iar la numitor numărul de cazuri posibile, cînd toate cazurile sînt egal posibile.

Acest raport se numeşte *probabilitate.*

Exemplu :

Într-o cutie avem 8 bile albe şi 6 bile negre. Care este probabilitatea de a extrage la întîmplare o bilă albă?

Să notăm cu A evenimentul ce constă din extragerea unei bile albe şi cu B evenimentul ce constă din extragerea unei bile negre.

Să notăm cu $P(A)$ probabilitatea evenimentului A.

$$P(A) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$$

Numărul cazurilor favorabile = 8, deoarece avem 8 bile albe.
Numărul cazurilor posibile = 14, deoarece avem în total 14 bile : 8 albe şi 6 negre.

Prin urmare :

$$P(A) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}.$$

În mod asemănător :

$$P(B) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}.$$

Probabilitatea unui eveniment se exprimă totdeauna printr-o fracţie subunitară.

7.4. PROBABILITATEA EVENIMENTELOR SIGURE ŞI IMPOSIBILE

Exemplu. Introducem într-o cutie 5 bile negre. Fireşte, extragerea unei bile negre este în acest caz un eveniment sigur. Numărul cazurilor favorabile este egal cu numărul cazurilor posibile şi deci :

$$P(N) = \frac{5}{5} = 1$$

Dar o bilă albă am putea extrage din această cutie? Fireşte că nu. Extragerea unei bile albe este un eveniment imposibil în această experienţă. Nu există nici un caz favorabil, $P(A) = \frac{0}{5} = 0$.

Putem avea mai multe cazuri favorabile decît posibile? Evident că nu. Probabilitatea nu poate depăşi valoarea 1. De aici tragem următoarele concluzii :

Probabilitatea evenimentului imposibil este egală cu 0. Probabilitatea evenimentului sigur este egală cu 1. Probabilitatea unui eveniment oarecare A este un număr avînd o valoare între 0 şi 1. Deci : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

7.5. PROBABILITATEA EVENIMENTELOR COMPUSE

Să presupunem că într-un anumit joc se aruncă împreună două monede. Una de 25 bani şi alta de un leu. Ne întrebăm care este probabilitatea să apară stemele. Pentru a afla această probabilitate trebuie să cunoaştem toate rezultatele posibile care se pot obţine la aruncarea celor două monede.

1. Ambele monede arată stema, eveniment pe care-l notăm $\{S, S.\}$

2. Ambele monede arată banul, eveniment pe care-l notăm $\{B, B.\}$

3. Prima monedă arată stema şi cea de-a doua banul $\{S, B\}$.

4. Prima monedă arată banul, iar cea de-a doua stema, eveniment care se notează cu $\{B, S\}$.

Evenimentele posibile pot fi reprezentate sub forma unei scheme:

Prima monedă	A doua monedă	Rezultate
$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S, S\}$
$\{B\}$	$\{B\}$	$\{B, B\}$
$\{S\}$	$\{B\}$	$\{S, B\}$
$\{B\}$	$\{S\}$	$\{B, S\}$

Mulţimea tuturor evenimentelor posibile este:

$\{SS; BB; SB; BS\}$. .

Numărul total al cazurilor posibile este 4. Să aflăm probabilitatea de realizare a evenimentului $\{S, S\}$.

$$P_{\{S,S\}} = \frac{1}{4}.$$

7.6. LEGĂTURA DINTRE FRECVENȚĂ ȘI PROBABILITATE

Să aruncăm un zar de 30 de ori și să considerăm rezultatele într-un tabel în modul următor:

Fața	Frecvențe absolute		Frecvențe relative
1	////	4	$\frac{4}{30}$
2	////	4	$\frac{4}{30}$
3	//////	6	$\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$
4	/////	5	$\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$
5	//////	6	$\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$
6	/////	5	$\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$

Frecvența absolută a unei valori x a caracteristicii, este numărul de unități ale populației corespunzătoare acelei valori.

Numărul de apariții al feței îl însemnăm pe coloana frecvențelor relative prin cîte o liniuță. Frecvența absolută este raportul dintre frecvența relativă și numărul total al cazurilor sau efectivul total al populației.

Frecvența apariției numărului 3 în acest experiment este egală cu $\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$.

Probabilitatea ca la o aruncare a zarului să apară fața numărului 3 este:

$$P(A)=\frac{1}{6}.$$

Frecvența unui eveniment ca urmare a unei experiențe repetate se află împărțind numărul de cazuri în care evenimentul s-a produs la numărul total de experiențe efectuate.

Probabilitatea de apariţie a numărului 3 este $P(A) = \frac{1}{6}$ şi ea se calculează înainte de efectuarea experienţei. Frecvenţa se calculează pe baza datelor obţinute din experienţă.

Constatăm că pentru un număr mare de experienţe frecvenţa $\left(\text{adică } \frac{1}{5}\right)$ se apropie de probabilitate $\left(\text{adică } \frac{1}{6}\right)$.

7.7. UTILIZAREA DIAGRAMELOR PENTRU A REPREZENTA MULŢIMEA TUTUROR EVENIMENTELOR POSIBILE ALE UNUI EXPERIMENT

În toate experienţele noastre este necesar să numărăm evenimentele posibile.

Exemplul 1

Să considerăm o mulţime M, formată din salariaţii unui serviciu:

$$M = \{\text{Ion}; \quad \text{Maria}; \quad \text{Petre}; \quad \text{Ileana}; \quad \text{Gheorghe}\}.$$

Pentru o manifestaţie trebuie să participe o pereche formată dintr-o femeie şi un bărbat. Cîte perechi se pot forma?

Soluţie Pentru fiecare alegere posibilă a unui bărbat există cîte două alegeri posibile ale unei femei, după următoarea schemă (fig. 7.1):

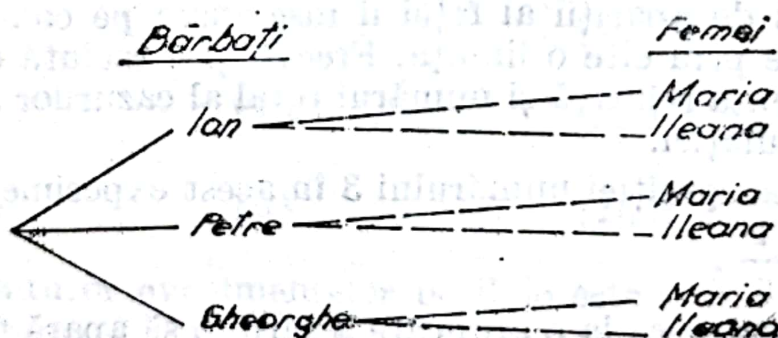


Fig. 7.1

Prin urmare, sînt şase perechi posibile (evenimente posibile) după cum urmează:

Ion — Maria	Petre — Maria	Gheorghe — Maria
Ion — Ileana	Petre — Ileana	Gheorghe — Ileana

Exemplul 2

Se consideră experimentul ce constă din aruncarea consecutivă a două monede. Să se afle mulţimea tuturor evenimentelor posibile.

Soluţie Fiecărui eveniment ce constă din apariţia la prima faţă a mărcii (M) sau a stemei (S) îi corespund două evenimente posibile ce se realizează la aruncarea celei de-a doua monede marca (M) sau stema (S), după următoarea diagramă (fig. 7.2):

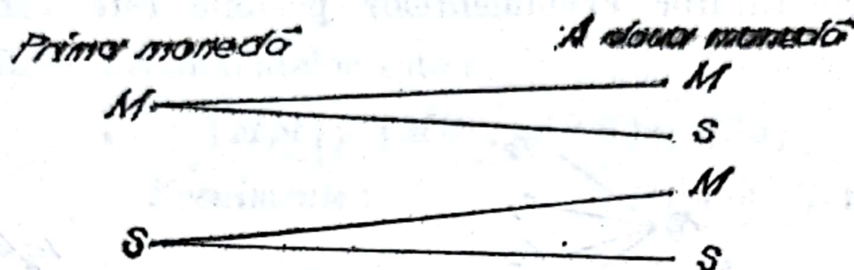


Fig. 7.2

Prin urmare, mulţimea tuturor evenimentelor posibile este:

$$MM;\ MS;\ SM;\ SS.$$

Exemplul 3

Se consideră evenimentul ce constă din aruncarea consecutivă a trei monede. Să se afle mulţimea tuturor evenimentelor posibile.

Soluţie Urmînd un raţionament analog cu cel din exerciţiul precedent, obţinem (fig. 7.3):

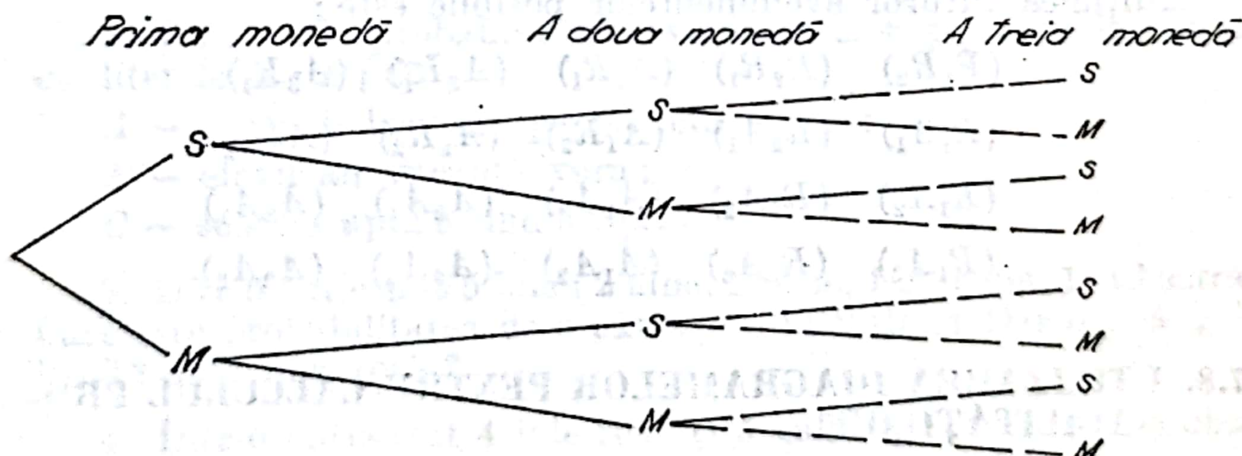


Fig. 7.3

Mulţimea tuturor evenimentelor posibile este:

$(S;\ S;\ S)$; $(S;\ S;\ M)$; $(S;\ M;\ S)$; $(S;\ M;\ M)$

$(M;\ S;\ S)$; $(M;\ S;\ M)$; $(M;\ M;\ S)$; $(M;\ M;\ M)$

Exemplul 4

O cutie conţine două bile roşii şi trei albe. Se consideră experimentul ce constă din extragerea consecutivă a două bile, fără ca bila extrasă să fie reintrodusă în cutie.
Să se alcătuiască mulţimea tuturor evenimentelor posibile.

Soluţie Pentru a identifica mai uşor bilele, vom însemna bilele roşii prin R_1 şi R_2, iar bilele albe prin A_1, A_2, A_3.

Diagrama tuturor evenimentelor posibile este următoarea (fig. 7.4):

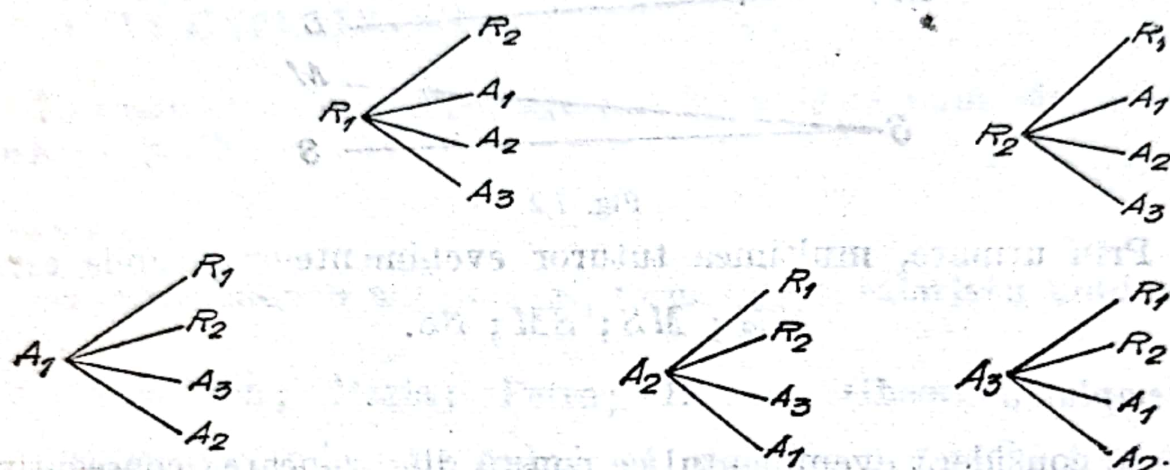


Fig. 7.4

Mulţimea tuturor evenimentelor posibile este:

(R_1R_2)	(R_2R_1)	(A_1R_1)	(A_2R_1)	(A_3R_1)
(R_1A_1)	(R_2A_1)	(A_1R_2)	(A_2R_2)	(A_3R_2)
(R_1A_2)	(R_2A_2)	(A_1A_2)	(A_2A_1)	(A_3A_1)
(R_1A_3)	(R_2A_3)	(A_1A_3)	(A_2A_3)	(A_3A_2).

7.8. UTILIZAREA DIAGRAMELOR PENTRU CALCULUL PROBABILITĂŢILOR

Se aruncă consecutiv două monede. Să se afle:

1. probabilitatea ca să apară de două ori marca;
2. probabilitatea ca să apară o dată marca;
3. probabilitatea ca să apară de două ori stema.

Soluție Vom însemna cu M evenimentul apariției mărcii și cu S evenimentul apariției stemei. Obținem următoarea diagramă (fig. 7.5).

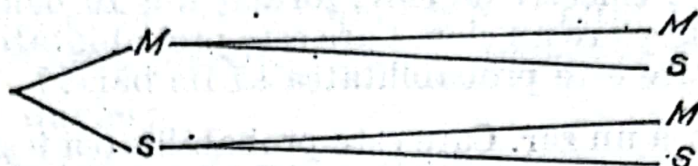


Fig. 7.5

Mulțimea evenimentelor este:

$$\{MM\}; \quad \{MS\}; \quad \{SM\}; \quad \{SS\}$$

Evenimente:	*Probabilități*:
2 mărci	$\frac{1}{4}$
1 marcă	$\frac{2}{4}$
0 mărci	$\frac{1}{4}$

7.9. EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Se aruncă o monedă. Să se afle mulțimea tuturor rezultatelor posibile. Să se determine care sînt evenimentele contrare.

2. Să se afle probabilitatea evenimentelor pe care le notăm cu literele A; B; C.

A — oamenii locuiesc pe planeta Marte;
B — elevii au vacanță vara;
C — soarele apune dimineața.

3. Într-o cutie sînt 5 bile: 2 albe, 1 roșie, 1 galbenă, 1 albastră. Care este probabilitatea de a extrage o bilă albă? Dar o bilă galbenă? Dar una roșie?

4. Într-o cutie sînt 4 bile roșii și 5 galbene. Care este probabilitatea de a extrage o bilă roșie? Dar una galbenă?

5. Într-o cutie se află 2 bile albe și 2 negre. Se extrag la întîmplare 2 bile. Să se arate mulțimea tuturor evenimentelor posibile. Care este probabilitatea de a extrage 2 bile albe?

6. Se aruncă la întîmplare 3 monede. Care este probabilitatea de a obține pe toate fețele o stemă?

7. Se aruncă la întîmplare un zar. Care este probabilitatea să arate un număr divizibil cu 4?

8. Dintr-un colectiv de elevi format din 10 băieţi şi 20 de fete se alege la întîmplare un elev. Care este probabilitatea ca elevul ales să fie fată? Care este probabilitatea să fie băiat?

9. Se aruncă un zar. Care este probabilitatea ieşirii unui număr cu soţ de puncte? Dar a unui număr fără soţ de puncte?

10. Într-o familie sînt trei copii. Care este probabilitatea ca toţi copiii să fie băieţi? Care este probabilitatea ca toţi copiii să fie fete? (Se presupune că probabilitatea de a se naşte un băiat este egală cu probabilitatea de a se naşte o fată.)

11. Din literele cuvîntului „abecedar" se alege la întîmplare una. Care este probabilitatea ca litera aleasă să fie *a*? Care este probabilitatea ca litera aleasă să fie *b*?

12. Se aruncă o monedă şi apoi se aruncă un zar. Să se alcătuiască schema grafică a tuturor evenimentelor posibile şi apoi să se determine numărul tuturor evenimentelor posibile. (Se notează cu M evenimentul „apariţia marcii" şi cu S evenimentul „apariţia stemei".)

13. Se aruncă trei monede. Să se alcătuiască schema corespunzătoare acestui experiment şi apoi să se determine numărul tuturor evenimentelor posibile.

14. Se aruncă două zaruri. Să se determine probabilitatea ca să iasă dublă (prin dublă se înţelege evenimentul ca pe ambele zaruri să iasă acelaşi număr).

15. Se aruncă două zaruri. Să se determine probabilitatea ca suma numerelor ieşite pe ambele zaruri să fie egală cu 10. ($a + b = 10$).

16. Se aruncă două zaruri: unul alb şi altul galben. Care este probabilitatea ca pe zarul alb să iasă mai puţin de 3 puncte şi pe zarul galben mai mult de 3 puncte.

17. Se aruncă două zaruri: unul alb şi altul negru. Să notăm cu a numărul punctelor ce apar pe zarul alb şi cu r numărul punctelor ce apar pe zarul roşu. Fie $a + r < 6$ evenimentul ce constă din apariţia a două numere a căror sumă este mai mică decît 6; $a + r \geqslant 6$ evenimentul ce constă din apariţia a două numere a căror sumă este mai mare sau cel puţin egală cu 6. Să se calculeze: $P(a + r = 6)$; $P(a + r \leqslant 6)$; $P(a + r \geqslant 6)$. Observaţii: Prin no-

tația $P(a + r = 6)$ înțelegem probabilitatea ca suma numerelor ieșite să fie egală cu 6.

18. Se aruncă două zaruri: unul alb și altul roșu. Folosind notațiile din exercițiul precedent să se descrie evenimentele:

a) Neieșirea dublei;

b) Numărul punctelor de pe zarul alb este cu doi mai mic decît numărul punctelor de pe zarul roșu;

c) Numărul punctelor de pe zarul alb este de două ori mai mare decît numărul punctelor de pe zarul roșu.

Să se determine probabilitatea corespunzătoare acestor evenimente.

19. Numerele de la 1 la 15 sînt notate pe 15 mingi, cîte unul pe fiecare minge. Se alege la întîmplare o minge. Să se calculeze probabilitatea ca numărul notat pe această minge:

a) Să se împartă la 5;

b) Să fie număr cu soț;

c) Să fie număr fără soț;

d) Să fie un pătrat perfect;

e) Să fie format din două cifre.

20. Într-o urnă sînt de 6 ori mai multe bile albe decît roșii. Se extrage la întîmplare o bilă. Care este probabilitatea ca bila extrasă să fie roșie?

Capitolul 8

LOGICA MATEMATICĂ

În matematică, precum dealtfel şi în vorbirea obişnuită, noi facem anumite afirmaţii sau raţionamente cu ajutorul propoziţiilor.

Exemple :

Numărul 4 este mai mare decît numărul 2. Suma numerelor 4 şi 5 este numărul natural 9.

Alcătuirea corectă a acestor propoziţii se face cu respectarea anumitor reguli, care uneori sînt formulate explicit, iar alteori se învaţă prin deprinderi.

Propoziţiile sînt grupări de semne sau simboluri, care pot exprima şi anumite acţiuni sau relaţii dintre obiecte.

Simbolurile numerice 1 ; 2 ; 3 ; 6, numele proprii Ion, Petre, Gheorghe, expresiile $1 + 4$; $1 + 2$; $1 + 5$; $4 + 2$, se numesc *constante* deoarece desemnează obiecte fixe şi bine determinate.

Putem ajunge la unul şi acelaşi obiect dacă îl desemnăm prin doi termeni diferiţi.

De exemplu

$$8 - 4 \text{ şi } 2 + 2;\ 3 + 1 \text{ şi } 2 + 2;$$

Capitala Angliei şi Londra ;

Prin convenţie se foloseşte semnul = (numit egal) scris între doi termeni care desemnează acelaşi obiect.

Prin urmare, putem scrie :

$$8 - 4 = 2 + 2;\ 3 + 1 = 2 + 2.$$

Aceste expresii se numesc egalităţi.

8.1. ALGEBRA PROPOZIŢIILOR

Logica operează cu propoziţii simple şi compuse. În algebra propoziţiilor se studiază valoarea logică a propoziţiilor logice compuse, în funcţie de valorile logice ale propoziţiilor simple care le alcătuiesc.

8.2. TABLOUL DE ADEVĂR

În cele ce urmează vom considera numai propoziţiile care au două valori de adevăr: adevărul pe care-l notăm cu litera A şi falsul pe care-l notăm cu litera F.

În primul caz spunem că valoarea logică a propoziţiei este adevărul, în al doilea caz este falsul.

Valorile logice ale unei propoziţii pot fi reprezentate printr-o schemă:

P
A
F

În primul rînd se scrie notaţia prescurtată a unei propoziţii oarecare „P", în rîndul doi şi trei se trec valorile de adevăr corespunzătoare acestei propoziţii.

8.3. DISJUNCŢIA A DOUĂ PROPOZIŢII

Se dau două propoziţii:

p: Am rezolvat exerciţiile la matematică;

q: Am luat nota 10 la aritmetică.

Cu ajutorul cuvîntului *sau*, scris între aceste două propoziţii, mai putem nota o nouă propoziţie.

Propoziţia: „Am rezolvat exerciţiile la matematică sau am luat nota zece la matematică" se numeşte disjuncţia propoziţiilor p şi q.

Se notează cu $p \vee q$. Simbolul „ $\vee$ " este semnul grafic al disjuncției logice.

Cum putem stabili ce valoare de adevăr are propoziția compusă $p \vee q$.

Valoarea de adevăr a propoziției compuse $p \vee q$ depinde de valorile de adevăr ale propozițiilor simple p și q. Dacă cel puțin una din propozițiile simple p și q este adevărată, atunci propoziția $p \vee q$ este adevărată. Disjuncția celor două propoziții este falsă, atunci cînd ambele propoziții sînt false.

Tabela de adevăr a disjuncției logice este următoarea :

	p	q	$p \vee q$
1	*A*	*A*	*A*
2	*A*	*F*	*A*
3	*F*	*A*	*A*
4	*F*	*F*	*F*

Valorile de adevăr ale propozițiilor compuse se stabilesc în funcție de valorile propozițiilor simple, după anumite reguli.

Pe coloanele 2 și 3 sînt trecute valorile de adevăr ale propozițiilor p, q, pe coloana 4 valoarea de adevăr a disjuncției.

8.4. CONJUNCȚIA A DOUĂ PROPOZIȚII

Se dau propozițiile :

p : numărul 6 este un multiplu al numărului 2

q : numărul 6 este un multiplu al numărului 3.

Cu ajutorul cuvîntului „și" scris între două propoziții mai putem forma o nouă propoziție.

„Numărul 6 este multiplul numărului 2 *și* numărul 6 este multiplul numărului 3".

Această propoziție nouă care s-a obținut din legarea celor două propoziții cu ajutorul cuvîntului *și* se numește conjuncția propozițiilor p și q și se notează cu $p \wedge q$.

Simbolul „ $\wedge$ " este semnul grafic al conjuncției logice.

Valoarea de adevăr a propoziției compuse $p \wedge q$ depinde de valoarea de adevăr a propozițiilor simple p, q.

Conjuncţia a două propoziţii p, q este adevărată numai în cazul cînd ambele propoziţii p şi q sînt simultan adevărate.

Dacă cel puţin una din propoziţiile p şi q este falsă atunci propoziţia $p \wedge q$ este falsă.

Tabela de adevăr a conjuncţiei logice este următoarea :

	p	q	$p \wedge q$
1	A	A	A
2	A	F	F
3	F	A	F
4	F	F	F

Prin urmare propoziţia $p \wedge q$ este adevărată într-un singur caz : dacă propoziţiile p şi q sînt simultan adevărate.

8.5. NEGAŢIA UNEI PROPOZIŢII

Se numeşte negaţia unei propoziţii p, propoziţia notată $\bar{p}$ şi care se citeşte *non* p şi care este falsă atunci cînd propoziţia p este adevărată şi este adevărată atunci cînd propoziţia p este falsă.

Exemple

Se dă propoziţia

p: numărul a este mai mic sau cel mult egal cu numărul b $(a \leqslant b)$.

Negaţia acestei propoziţii se notează $\bar{p}$ şi se defineşte astfel :

$\bar{p}$: numărul a este mai mare decît numărul b $(a > b)$.

Tabela de adevăr a negaţiei logice este :

p	$\bar{p}$
A	F
F	A

8.6. IMPLICAŢIA LOGICĂ

1. Să considerăm următoarele propoziţii :

p: numărul 3 este mai mic decît numărul 4.

q: numărul 3 este mai mic decît numărul 7.

Dacă numărul 3 este mai mic decît 4, atunci numărul 3 este mai mic și decît numărul 7.

Vom scrie:

$p \rightarrow q$ și vom citi: „propoziția p implică propoziția q".

2. În plan se consideră unghiul AOB și bisectoarea AD.

Să considerăm propozițiile:

p : $M \in AD$.

q : $MP = MQ$ ($MP \perp OA$ și $MQ \perp OB$).

Dacă un punct M aparține bisectoarei AD, atunci el este egal depărtat de laturile unghiului.

Vom scrie: $p \Rightarrow q$.

Simbolul „$\Rightarrow$" este semnul grafic al implicației.

Dacă p este falsă atunci $p \Rightarrow q$ este adevărată, oricare ar fi valoarea de adevăr a propoziției q (valori ce se stabilesc prin convenție).

Exemple:

1. Implicația $(6 < 8) \Rightarrow (4 < 5)$.

Este o propoziție adevărată.

2. Propoziția (15 este multiplu 5) $\Rightarrow$ (9 este un număr par).

Este falsă.

Prin urmare implicația $p \Rightarrow q$ este falsă numai în cazul în care propoziția p este adevărată și propoziția q este falsă.

Tabloul de adevăr al implicației este:

p	q	$p \Rightarrow q$
A	A	A
A	F	F
F	A	A
F	F	A

8.7. ECHIVALENȚE LOGICE

În planul P se consideră punctele: A și B. Un punct M este egal depărtat de punctele A și B.

Fie O mijlocul segmentului AB. În punctul O construim mediatoarea segmentului AB.

Să notăm cu p și q următoarele propoziții.

p : punctul M se află pe mediatoarea segmentului AB.

q : Punctul M este egal depărtat de punctele A și B.

În geometrie se arată că dacă punctul M se află pe mediatoarea segmentului AB el este egal depărtat de punctele A și B.

Prin urmare: $p \Rightarrow q$.

Dar și reciproca acestei teoreme este adevărată.

Dacă un punct M este egal depărtat de punctele A şi B, atunci el se află pe mediatoarea segmentului AB.

Prin urmare:

$$q \Rightarrow p$$

În acest caz, avem de-a face cu o dublă implicaţie.

Se spune că propoziţiile p şi q sînt echivalente.

Propoziţia $p \Rightarrow q$ este o implicaţie directă în timp ce $q \Rightarrow p$ este implicaţia reciprocă a celei dintîi.

Echivalenţa logică a două propoziţii se poate exprima cu ajutorul conjuncţiei logice între implicaţia directă şi reciprocă.

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Pentru a alcătui tabela de adevăr a echivalenţei logice trebuie să folosim tabelele de adevăr a implicaţiei logice şi a conjuncţiei logice.

Vom stabili mai întîi adevărul sau falsul implicaţiilor $p \Rightarrow q$ şi al implicaţiei reciproce $q \Rightarrow p$.

Tabela de adevăr a echivalenţei logice:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
A	F	F	A	F
A	A	A	A	A
F	A	A	F	F
F	F	A	A	A

p	q	$p \Leftrightarrow q$
A	F	F
A	A	A
F	A	F
F	F	A

Echivalenţa logică a două propoziţii este adevărată dacă ambele propoziţii sînt simultan adevărate sau simultan false şi este falsă în celelalte cazuri.

8.8. PREDICATE. CUANTIFICATORI

S-a văzut că o mulţime poate fi dată enunţînd o anumită proprietate pe care trebuie să o satisfacă elementele sale. Această condiţie poate fi exprimată cu ajutorul unei anumite proprietăţi,

care trebuie să fie adevărată pentru toate elementele care fac parte din mulţimea respectivă şi numai pentru ele. Dacă x este un element oarecare al mulţimii, proprietatea pe care o satisfac elementele mulţimii, o vom nota cu $p(x)$.

Să considerăm propoziţia :

„x divizibil cu 2"

În general cînd proprietatea — pe care noi o notăm cu $p(x)$ — caracterizează o anumită mulţime A, scriem mulţimea A cu ajutorul expresiei :

$$A = \{x/p(x)\}.$$

Propoziţia obţinută, cînd înlocuim x prin a, se scrie $p(a)$. Ea este adevărată dacă (şi numai dacă) elementul a aparţine mulţimii A, adică $a \in A$.

(1) Să considerăm mulţimea :

$$X = \{1; 2; 3; 6\}.$$

Această mulţime poate fi scrisă enunţînd o proprietate caracteristică a elementelor sale, astfel :

$$X = \{x \mid x \text{ — număr natural, divizor al lui } 6\}.$$

(2) Fie mulţimea :

$$Y = \{y \mid y \text{ elev trimis în tabără}\}.$$

Pentru a nota mulţimile de mai sus, noi am folosit expresiile :

„x număr natural divizor al lui 6";

„y elev trimis în tabără".

În aceste expresii x şi, respectiv, y pot fi numere, respectiv persoane arbitrare. Ele se numesc variabile.

Expresia $x + 1 = 3$, care este adevărată numai pentru anumite valori ale lui x, se mai numeşte funcţie propoziţională.

În locul variabilei se poate substitui orice element al unei anumite mulţimi date. Se cere în plus, ca, pentru fiecare alegere a valorii variabilei, luată din clasa (mulţimea) pe care o poate parcurge variabila, rezultatul înlocuirii să fie o propoziţie bine determinată, care are o valoare logică precisă, adică să fie sau adevărată sau falsă.

Se dau mulţimile :

$$A = \{4, 6, 8, 10\}$$

$$B = \{3, 6, 7, 10, 18\}.$$

Să considerăm următoarea propoziţie :

p : Numărul a este divizibil cu 2.

Dacă a este oricare din elementele mulţimii A, propoziţia p este adevărată.

Propoziţia p este adevărată numai pentru anumite elemente ale mulţimii B.

În cazul mulţimii A propoziţia p este adevărată pentru toate elementele care aparţin acestei mulţimi.

Pentru a exprima această proprietate se foloseşte simbolul $\forall$ care se citeşte „orice".

Se scrie $\forall \ a \in A$, a este divizibil cu 2 şi se citeşte „orice număr a este divizibil prin 2".

Deoarece numai anumite elemente ale unei mulţimi B au această proprietate, se foloseşte semnul „$\exists$" care se citeşte „există". Se scrie „$\exists \ a \in B$, a este divizibil cu 2".

Există un element a care aparţine mulţimii B şi este divizibil cu 2.

Pentru a exprima cîte elemente ale unei mulţimi au anumite proprietăţi se utilizează semnele $\exists$, $\forall$, numite *cuantificatori*.

Simbolurile $\forall$ şi $\exists$ cu înţelesul de mai sus se numesc *cuantificatori*, deoarece rolul lor este să indice cantitatea, adică numărul elementelor din mulţimea de adevăr a predicatului. În afara acestor cuantificatori mai există şi alţii, dar aceştia sînt cei mai importanţi în matematică.

Observaţie :

Cuantificatorii se aplică oricărui predicat şi dau propoziţii adevărate sau false.

8.9. EXERCIŢII REZOLVATE

Exemplu :

Se consideră propoziţiile :

p : George merge la şcoală ;

q : Ileana nu merge la şcoală.

Să se scrie sub formă simbolică propozițiile:

a) George și Ileana merg amîndoi la școală;

b) Nici George și nici Ileana nu merg la școală;

c) Nu este adevărat că George și Ileana merg amîndoi la școală;

d) Nu este adevărat că nici Ion și nici Ileana merg la școală.

Soluție:

a) $p \wedge \overline{q}$, *b*) $\overline{p} \wedge q$; *c*) $\overline{p \wedge \overline{q}}$; *d*) $\overline{\overline{p} \wedge q}$.

Exemplu:

Se consideră propozițiile:

p: îmi place matematica;

q: îmi place muzica.

Să se exprime în cuvinte propoziția $p \wedge \overline{q}$ și să se alcătuiască tabela de adevăr.

Soluție:

Se alcătuiește o tabelă de adevăr care cuprinde valorile propozițiilor p și $\overline{q}$.

p	q	p	$\wedge$	$\overline{q}$
A	*A*	*A*		*F*
A	*F*	*A*		*A*
F	*A*	*F*		*F*
F	*F*	*F*		*A*

În final se completează coloana a 4-a cu valorile de adevăr ale conjuncției valorilor date în coloanele a 3-a și a 5-a:

p	q	p	$\wedge$	$\overline{q}$
A	*A*	*A*	*F*	*F*
A	*F*	*A*	*A*	*A*
F	*A*	*F*	*F*	*F*
F	*F*	*F*	*F*	*A*

Exemplu:

Să se stabilească valorile de adevăr ale propozițiilor:

a) Dacă $3 \cdot 5 = 15$, atunci $2 + 4 = 6$;

b) Dacă $3 + 8 = 10$, atunci $2 \cdot 3 = 6$;

c) Dacă $3 + 5 = 10$, atunci $2 - 1 = 0$;

d) Dacă $3 \cdot 5 = 15$, atunci $23 = 10 + 3$.

În aceste propoziții trebuie să stabilim valoarea de adevăr a unei implicații logice de forma $p \Rightarrow q$.

a) Pentru p adevărată și q adevărată, propoziția $p \Rightarrow q$ este adevărată.

b) Pentru p falsă și q adevărată, propoziția $p \Rightarrow q$ este adevărată.

c) Pentru p falsă și q falsă, propoziția $p \Rightarrow q$ este adevărată.

d) Pentru p adevărată și q falsă, propoziția $p \Rightarrow q$ este falsă.

Exemplu:

Să se alcătuiască tabela de adevăr a propoziției $\bar{p} \wedge q$.

Soluție: Se alcătuește la început tabela de adevăr, avînd două coloane rezervate valorilor de adevăr ale propozițiilor p și q; altă coloană este rezervată valorilor de adevăr ale propoziției $\bar{p}$. Ultima coloană este rezervată valorilor logice corespunzătoare conjuncției logice:

p	q	$\bar{p}$	$\bar{p} \wedge q$
A	*A*	*F*	*F*
A	*F*	*F*	*F*
F	*A*	*A*	*A*
F	*F*	*A*	*F*

În tabela de adevăr se completează coloana a 3-a cu valoarea de adevăr a propoziției $\bar{p}$, folosind valorile de adevăr ale propoziției p din prima coloană. În ultima coloană se completează valorile de adevăr ale conjuncției logice.

Exemplu:

Să se găsească toate înlocuirile posibile ale variabilei x, astfel încît următoarea propoziție să fie adevărată:

„Dacă $3 \cdot 4 = 12$, atunci $x - 4 = 10$".

Soluție. Propoziția dată este de forma $p \Rightarrow q$ pentru:

$p: 3 \times 4 = 12$; $q: x - 4 = 10$.

Propoziția $p \Rightarrow q$ este falsă atunci cînd p este adevărată și q este falsă. Ea este adevărată în toate celelalte cazuri.

Prin urmare, pentru ca implicația $p \Rightarrow q$ să fie adevărată, trebuie ca $x - 4 = 10$ să fie adevărată:

$$x - 4 = 10 \Rightarrow x = 14.$$

Valoarea pe care trebuie să o substituim lui x, astfel încît $x - 4 = 10$ să fie adevărată, este $x = 14$.

8.10. EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Se dau propozițiile:

p: îmi place această carte;

q: îmi place matematica.

Exprimați în cuvinte propozițiile:

a) $p \wedge q$; *b*) $p \vee q$; *c*) $\bar{q}$; *d*) $\bar{p}$; *e*) $\bar{p} \wedge \bar{q}$.

2. Se dau propozițiile:

p: Ion este fericit;

q: Gheorghe este trist.

Să se exprime în cuvinte propozițiile:

a) $\bar{p} \wedge \bar{q}$; *b*) $p \vee q$; *c*) $p \wedge \bar{q}$.

3. Să se găsească valoarea de adevăr a propozițiilor următoare:

a) Dacă $577 = 12$, atunci $6 + 7 = 13$;

b) Dacă $4 \cdot 7 = 28$, atunci $4 \times 3 = 15$;

c) Dacă $3 + 4 = 25$, atunci $4 \times 4 = 16$.

4. Să presupunem că propozițiile

$a \times b = c$; $b \times c = d$; $c = d$ sînt adevărate.

Să se afle valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) Dacă $a \times b = c$, atunci $b \times c \neq d$;

b) Dacă $a \times b = d$, atunci $b \times c = c$;

c) Dacă $a \times b = d$, atunci $b \times c = d$;

d) Dacă $a \times b = c$, atunci $b \times c = c$.

5. Să se găsească toate înlocuirile posibile ale lui x în fiecare din propozițiile date mai jos, astfel încît implicațiile date să fie adevărate.

a) Dacă $2 + 3 = 5$, atunci $x + 2 = 9$;

b) Dacă $4 + 5 = 7$, atunci $x + 1 = 8$;

c) Dacă $x + 2 = 8$, atunci $2 + 4 = 7$;

d) Dacă $x + 1 = 8$, atunci $2 + 3 = 6$;

e) Dacă $3 - x = 1$, atunci $2 \times 5 = 10$;

f) Dacă $3 - x = 1$, atunci $2 \times 5 = 8$.

6. Se dau propozițiile:

p: Nicolae muncește sîrguincios;

q: Nicolae reușește la matematici.

Să se exprime în cuvinte propozițiile:

$p \Rightarrow q$; $q \Rightarrow p$; $\bar{p} \Rightarrow q$; $p \Rightarrow \bar{q}$;

7. Să se găsească valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $(3 = 2 + 1) \vee (5 = 3 + 2)$.

b) $(3 = 2 + 1) \wedge (5 + 3 = 8)$.

c) $(9 = 6 + 4) \vee (5 = 4 + 3)$.

d) $(10 = 3 + 7) \vee (7 = 6 + 1)$.

e) $(8 = 6 + 3) \wedge (5 + 2 = 7)$.

f) $(10 = 8) \wedge (6^2 = 36)$.

g) $(6 = 10) \vee (13 = 1)$.

h) $[(-3)^2 = 9] \vee [(-2)^2 = 4]$.

i) $[(0{,}01)^2 = 0{,}0001)] \wedge [(-0{,}3)^2 = 0{,}09]$.

j) $(-1 < -4) \wedge (-1 < 0)$.

k) $(-4 < -3) \wedge (-5 < -1)$.

l) $\left(-\frac{1}{17} > -\frac{1}{16}\right) \wedge \left(-\frac{1}{18} > -\frac{1}{20}\right)$.

m) $\left(-\frac{3}{5} > -\frac{1}{2}\right) \vee \left(-\frac{3}{5} < -\frac{1}{2}\right)$.

8. Să se stabilească valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

a) $(|-5| = 5) \wedge (|-3| + |-2| = 5)$.

b) $[(-6) = (-4) + (-2)] \vee (|-6| = +6)$.

c) $(|-5| > 0) \vee (|-3| = 3)$.

d) $(|-8| > 0) \wedge (|-4| > |-2|)$.

e) $(|-5| > 0) \wedge (|-5| \geqslant 5)$.

9. Să se stabilească valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

a) $(|-2| \geqslant 2) \wedge (|-2| = 2)$.

b) $(|-6| \geqslant |-4| + |-2|) \wedge (|-5| \geqslant 5)$.

c) $|9 - 1| \neq |1 - 9|$.

d) $|6 - 100| \leqslant |100 - 6|$.

10. Se dau propoziţiile p şi q. Să se alcătuiască tabela de adevăr a propoziţiilor:

a) $\bar{p} \wedge q$; *b*) $\bar{p} \wedge \bar{q}$; *c*) $p \wedge \bar{q}$; *d*) $\bar{p} \vee q$;

e) $p \vee \bar{q}$; *f*) $\overline{p \wedge q}$; *g*) $\bar{p} \vee \bar{q}$.

11. Să se alcătuiască tabela de adevăr a propoziţiilor:

a) $\overline{p \wedge q}$; *b*) $\bar{p} \vee \bar{q}$; *c*) $\overline{p \vee q}$; *d*) $\bar{p} \wedge \bar{q}$.

Să se arate apoi echivalenţele:

$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$; $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$.

12. Se dă mulţimea:

$A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

şi următoarele propoziţii :

a) $1 \in A$; *b*) $\{1, 2\} \subset A$; *c*) $\{1\} \in A$.

Să se stabilească valoarea de adevăr a acestor propoziţii.

13. Se dau mulţimile :

$A = \{x \mid x \in N;\ 1 < x \leqslant 3\}$

$B = \{x \mid x \in N;\ 3 \leqslant x < 4\}$.

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiilor :

a) $B \subset A$, *b*) $B \in A$.

14. Să se stabilească valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii :

a) $(5 < 6) \vee (3 + 1 < 2)$;

b) $(6^2 > 1) \wedge (3 + 5^2 < 7 + 8)$;

c) $[(-1)^3 < -2] \wedge [(-2)^3 < (-3)^3]$.

15. Să se stabilească care din următoarele propoziţii sînt adevărate :

p : 12 este un multiplu al numărului 3 sau 12 este multiplul numărului 4.

q : 5 este divizorul numărului 15 şi 4 este multiplul numărului 3.

s : $(2^3 \cdot 3^2)$ este multiplul numărului 6 şi $2^3 \cdot 3^2$ este multiplul numărului 36.

16. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiilor :

$(-6 \leqslant 7) \Rightarrow (3 > 4)$;

$(3 + 2 < 5) \Rightarrow (4 + 1 > 5)$;

$(4 \geqslant 5) \Rightarrow$ 4 este divizorul numărului 8.

17. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiilor :

$[(-3)^2 > (-1)^2] \Rightarrow [(-4)^2 < (-5)^2]$;

$[(-3 < -4) \vee (-2 < -1)] \Rightarrow [(-3 + 1) > -1) \wedge (-2 < -1)]$;

$[(-6 + 1) < (-3 + 1) < (-5)] \wedge (-2)^2 \leqslant 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow [(-2)^3 < -8) \wedge (-5 < -4)]$.

18. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor compuse:

$[(-2)^3 < (-1)^2] \wedge [(-2)^2 > (-1)^3] \Rightarrow$

$\Rightarrow [(-2)^2 < (-3)^2] \wedge [(-5) < (-1)]$.

19. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:

(2 este divizorul numărului 4) $\vee$ (6 este multiplu numărului 2)

$\Rightarrow (3 < 4) \wedge [(-1)^2 + 3] < 0$.

20. Se dau propozițiile:

p: Patrulaterul $ABCD$ este un pătrat.

q: Diagonalele patrulaterului $ABCD$ sînt perpendiculare.

Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $p \Rightarrow q$; *b)* $q \Rightarrow p$; *c)* $p \Leftrightarrow q$.

21. Se dau propozițiile:

p: Patrulaterul $ABCD$ este un dreptunghi.

q: Diagonalele patrulaterului $ABCD$ sînt egale.

Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $p \Rightarrow q$; *b)* $q \Rightarrow p$; *c)* $q \Leftrightarrow p$.

22. Se dau propozițiile:

p: Patrulaterul $ABCD$ este un dreptunghi.

q: Diagonalele patrulaterului $ABCD$ sînt egale.

r: Diagonalele patrulaterului $ABCD$ se taie în părți egale.

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției:

$p \Leftrightarrow q \wedge r$.

23. Se dau propozițiile:

p: Numărul a este par.

q: Numărul a este multiplu al numărului 2.

Să se stabilească adevărul propoziției:

$p \Leftrightarrow q$



24. Se consideră mulţimea :

$$A = \{4, 6, 8, 10, 12\}$$

şi propoziţia.

$\forall\, x \in A$; x este multiplu al numărului 2.

Să se citească şi apoi să se stabilească valoarea de adevăr a acestei propoziţii.

25. Se consideră mulţimea :

$A = \{1, 5, 7, 9\}$ şi propoziţia :

$\exists x \in A$: „x este un număr par"

Să se stabilească valoarea de adevăr a acestei propoziţii.

26. Să se completeze tabelele de adevăr.

p	q	$-$	$[\bar{p}$	$\vee$	$\bar{q}]$

p	q	$-$	$[\overline{p}$	$\vee$	$\overline{q}]$

27. Se dă mulţimea :

$$A = \{+1, 4, +3, 0, 5\}$$

şi propoziţia $\forall x \in A : 3(x + 1) \leqslant 21$.
Să se citească propoziţia.
Este această propoziţie adevărată ?

28. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiei :

$\forall x \in N : x + 1 \in N$ (cu N s-a notat mulţimea numerelor naturale).

29. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiei :

$$\forall x \in N : x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 > 0.$$

30. Se dă propoziţia :

$\forall\ x \in N$; $x + 1 = 9$.

Să se stabilească valoarea logică.

31. Se dau mulţimile:

$$A = \{-1, -2, -3, -4\} \text{ şi } B = \{-2, -4, -6, -8\}.$$

Citiţi şi verificaţi dacă este adevărată următoarea afirmaţie:

$\forall x \in A \Rightarrow 2x \in B.$

32. Se dau mulţimile definite prin următoarele proprietăţi:

A = mulţimea numerelor naturale care au proprietatea de a fi mai mici decît 5, proprietate pe care o notăm cu p_1.

$$A = \{x; x \in N, x < 5\}.$$

B = mulţimea numerelor naturale mai mici decît 7, proprietate pe care o notăm cu p_2.

$$B = \{x; x \in N, x < 7\}.$$

Ce relaţie de implicaţie există între p_1 şi p_2?

33. Se dau mulţimile definite prin următoarele proprietăţi:

A — mulţimea numerelor naturale care sînt multiplii numărului 6, proprietate pe care o notăm cu p_1.

$$A = \{x; x \in N, x = \mathcal{M}6\}.$$

B — mulţimea numerelor naturale care sînt multiplii numărului 3, proprietate pe care o notăm cu p_2.

$$B = \{x; x \in N, x = \mathcal{M}3\}.$$

Ce relaţie de implicaţie există între p_1 şi p_2?

34. Se dau mulţimile:

Z mulţimea punctelor din plan egal depărtate de punctele A şi B (proprietate pe care o notăm cu p_1).

$$p_1 = \{X / \overline{XA} = \overline{XB}\}.$$

Y mulţimea punctelor din plan care sînt situate pe mediatoarea segmentului $\overline{AB}$, (proprietate pe care o notăm cu p_2).

$$p_2 = \{X | X \in \overline{OM}\}.$$

Arătaţi că este adevărată relaţia:

$$p_1 \Rightarrow p_2.$$

35. Care din următoarele propoziții sînt adevărate și care sînt false (răspundeți prin „adevărat" sau „fals").

a) $\forall x \in R: x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$;

b) $\exists x \in R: x + 1 < 2$;

c) $\forall x \in R: (x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1$.

36. Să se afle care din următoarele afirmații sînt adevărate și care sînt false:

a) $\exists\, x \in R;\ x < 5$; b) $\forall x \in R;\ x > 5$; c) $\exists x \in R;\ 3x < 6$;

d) $\forall\, x \in R;\ 2x > 8$; e) $\exists x \in R;\ x^2 + 2 > 0$; f) $\forall x \in R$;

$x\,(x+1) = x^2 + x$.

37. Se dau propozițiile:

$p_1 : x < 5$; $p_2 : x \geq 3$; $p_3 : x + 1 > 0$.

Să se scrie: $\bar{p}_1$; $\bar{p}_2$; $\bar{p}_3$.

38. Se dau propozițiile:

$p_1 : \forall x \in N;\ 2x \in N$ și $p_2 : \exists x \in N;\ x + 1 < 2$.

Să se scrie propozițiile:

$\bar{p}_1$ și $\bar{p}_2$.

39. Arătați care din aceste propoziții sînt adevărate și care sînt false:

a) $\forall x \in N;\ x^2 + 1 \in N$; b) $\exists x \in N;\ x^2 + 1 = 0$;

c) $\exists x \in N;\ x^2 + 1 \neq 0$.

40. Să se scrie mulțimile de adevăr ale următoarelor propoziții:

$\exists x \in N;\ x + 1 < 2$; $\exists x \in N;\ x - 1 = 0$.

41. Se dau predicatele:

a) $A(x, y) \equiv \{x < y\}$.

b) $B(x, y) \equiv \{x + y = 10\}$.

c) $C(x, y) \equiv \{x$ divide $y\}$.

d) $D(x, y) \equiv \{x + y$ este un număr prim$\}$.

Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:

$A(1, 3) \equiv \{1 < 3\}$; $A(2,2) \equiv \{2 < 2\}$; $B(1,3) \equiv \{1 + 3 = 10\}$ $C(4,2) \equiv \{4 \text{ divide } 2\}$; $D\{5, 6\} \equiv \{5 + 6 \text{ este un număr prim}\}$.

42. Se dă predicatul

$A(x) \equiv \{x^2 + 1 > 0\}$.

Să se completeze rîndul al doilea al tabelei alcătuite mai jos cu valorile de adevăr ale propozițiilor scrise în primul rînd:

$A(1)$	$A(2)$	$A(3)$	$A(4)$	$A(5)$	$A(6)$	$A(7)$	$A(8)$	$A(9)$

Să se folosească cuantificatorul $\forall x$ (orice x) pentru a exprima valoarea de adevăr a acestor propoziții.

43. Se dau predicatele:

$A(Q) = \{\text{patrulaterul } Q \text{ este un romb}\}$,

$B(Q) = \{\text{diagonalele patrulaterului } Q \text{ sînt perpendiculare}\}$.

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției:

$A(Q) \Rightarrow B(Q)$.

44. Se consideră mulțimea

$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

și predicatul:

$E(x, y) \equiv \{x + y \text{ aparține mulțimii } M\}$.

Să se găsească toate perechile de numere $(a, b) \in M \times M$ astfel încît propoziția $E(a, b)$ să fie adevărată.

45. Să se folosească cuantificatori $\forall$ și $\exists$ pentru a scrie simbolic propozițiile:

a) Orice număr natural x verifică inegalitatea $x^2 > x$;

b) Există numere naturale care se divid la numărul natural 5;

c) Există triunghiuri care au cele trei laturi egale.

Capitolul 9

CALCULUL VECTORIAL

9.1. NOȚIUNEA DE VECTOR

Mai mulți pionieri se joacă cu un balon.

Din punctul A un pionier deplasează balonul pînă în punctul B (fig. 9.1).

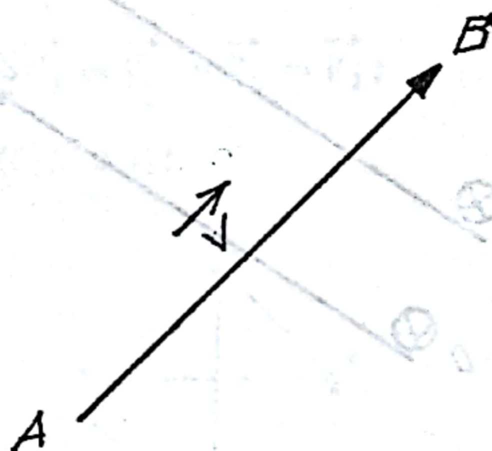


Fig. 9.1

Convenim să reprezentăm deplasarea balonului din punctul A pînă în punctul B printr-o săgeată care are originea în punctul A și extremitatea în punctul B. Săgeata o vom nota simbolic $\overrightarrow{AB}$ și este caracterizată prin următoarele elemente:

1) are o direcție, care este direcția segmentului AB;

2) are un sens care, este sensul de la A la B al segmentului AB;

3) are o valoare absolută care este egală cu lungimea segmentului de dreaptă AB.

O mărime geometrică care este caracterizată prin valoare absolută, direcție și sens se numește vector.

Direcţia vectorului $\overrightarrow{AB}$ este direcţia dreptei AB. Sensul vectorului $\overrightarrow{AB}$ este sensul de la punctul A la punctul B pe dreapta AB. Valoarea absolută a vectorului este egală cu lungimea segmentului. de dreaptă AB.

Punctul A se numeşte originea vectorului, iar punctul B se numeşte extremitate. Un vector se notează prescurtat $\overrightarrow{AB}$ sau $\overrightarrow{V}$.

9.2. VECTORI ECHIPOLENŢI

Să considerăm din nou un balon care se deplasează de la C la D, astfel încît să avem $CD \parallel AB$ şi $CD = AB$ (fig. 9.2).

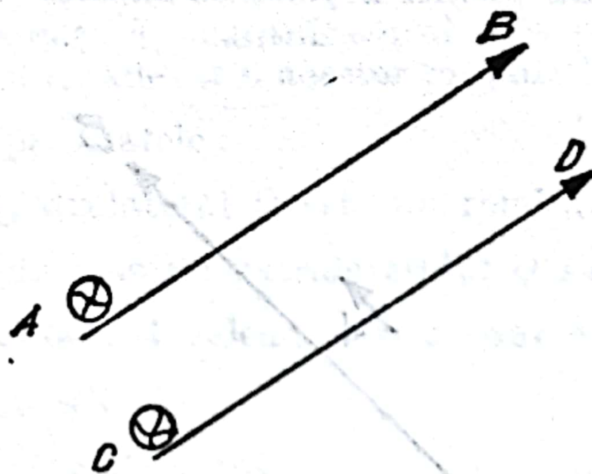


Fig. 9.2

Din punctul C pînă în D, balonul parcurge aceeaşi distanţă ca cea de la punctul A la punctul B, pe aceeaşi direcţie şi în acelaşi sens.

Segmentele de dreaptă AB şi CD care arată o aceeaşi deplasare a balonului şi sînt paralele reprezintă doi vectori echipolenţi.

Definiţie Doi sau mai mulţi vectori în plan sînt echipolenţi dacă au aceeaşi valoare absolută, aceeaşi direcţie şi acelaşi sens.

Vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sînt doi vectori echipolenţi, deoarece :

1) $AB = CD$,

2) $AB \parallel CD$.

Pentru notaţia relaţiei de echipolenţă vom folosi semnul „=" scris între vectorii corespunzători vom scrie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Relaţia de echipolenţă are următoarele proprietăţi:

a) este reflexivă:

$$\vec{V} = \vec{V};$$

b) este simetrică (fig. 9.3):

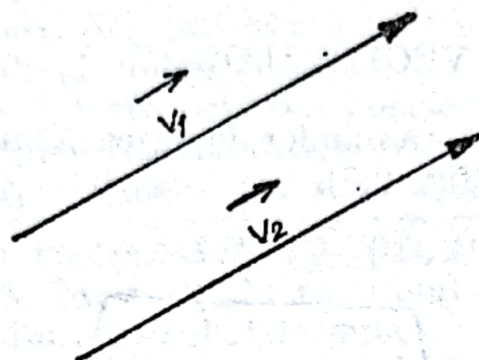


Fig. 9.3

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}_2 = \vec{V}_1;$$

c) este tranzitivă (fig. 9.4):

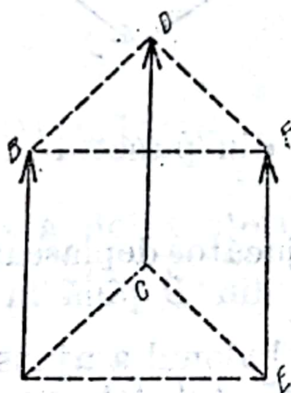


Fig. 9.4

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 \text{ şi } \vec{V}_2 = \vec{V}_3 \Rightarrow \vec{V}_1 = \vec{V}_3.$$

Demonstraţie

Din relaţia $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$ şi $\vec{V}_2 = \vec{V}_3$, deducem: $AB = CD$ şi $AB = CD$; $CD \| EF$ şi $CD = EF$.

Prin urmare: $AB = EF$ şi $AB \| EF$.

16— c. 1782

Observație

Relația de echipolență între vectori va permite ca, în operații, să înlocuim un vector cu un vector echipolent cu el pentru a efectua mai simplu calculele.

9.3. OPERAȚII CU VECTORI

9.3.1. ADUNAREA VECTORILOR

Să presupunem că un pionier deplasează balonul din punctul A pînă în punctul B (fig. 9.5).

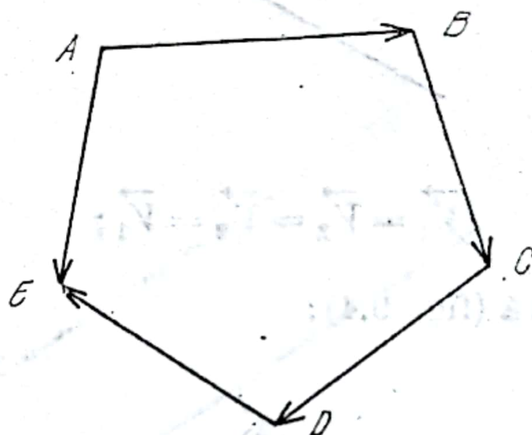


Fig. 9.5

Deplasarea balonului din punctul A pînă în punctul B este reprezentată prin $\overrightarrow{AB}$.

Din punctul B un alt jucător deplasează balonul pînă în punctul C. Deplasarea balonului din B pînă în punctul C se reprezintă prin $\overrightarrow{BC}$. Din punctul A balonul a ajuns în punctul C ca rezultat a două deplasări de la punctul A la punctul B, reprezentată prin vectorul $\overrightarrow{AB}$, și de la punctul B la punctul C, reprezentată prin vectorul $\overrightarrow{BC}$. Convenim să notăm operația corespunzătoare compunerii celor doi vectori prin semnul $+$ și să o numim adunarea vectorilor; vom scrie $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

Din punctul A pînă în punctul C, balonul se mai poate deplasa pe direcția AC, sensul de la A la C, deplasare care este reprezentată de vectorul $\overrightarrow{AC}$. Prin urmare: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$. Doi vectori se numesc consecutivi dacă originea unuia este extremitatea celui-

lalt. Vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sînt consecutivi, deoarece originea unuia este extremitatea celuilalt.

Definiţie

Se numeşte suma a doi vectori consecutivi $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$ vectorul $\overrightarrow{AC}$ care are originea, originea primului vector şi extremitatea, extremitatea celui de-al doilea vector.

Dacă în locul a doi vectori vom considera mai mulţi vectori consecutivi, astfel încît extremitatea unui vector este originea vectorului următor, obţinem un contur poligonal de vectori (fig. 9.5) format din vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EA}$.

Dacă vom considera, ca şi în exemplul precedent, un balon care se deplasează din punctul A în punctul B şi din B în C, din C în D, din D în E, atunci din punctul A pînă în punctul E, balonul se mai poate deplasa pe direcţia AE şi avem :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}.$$

Deci suma a doi sau a mai mulţi vectori consecutivi este vectorul care uneşte originea primului vector cu extremitatea ultimului vector.

9.3.2. DIFERENŢA VECTORILOR

Se numeşte diferenţa a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, şi se notează $\vec{a} - \vec{b}$, vectorul $\vec{x}$ care verifică relaţia $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$ (fig. 9.6). Vectorul $\vec{x}$,

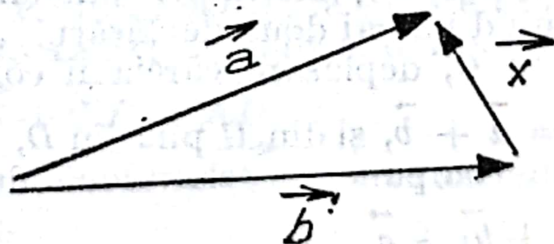


Fig. 9.6

sau diferenţa vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, este vectorul care uneşte extremităţile celor doi vectori, avînd originea extremitatea vectorului scăzător şi extremitatea coincide cu extremitatea vectorului descăzut.

Proprietățile operației de adunare a vectorilor.

1. Adunarea vectorilor este comutativă

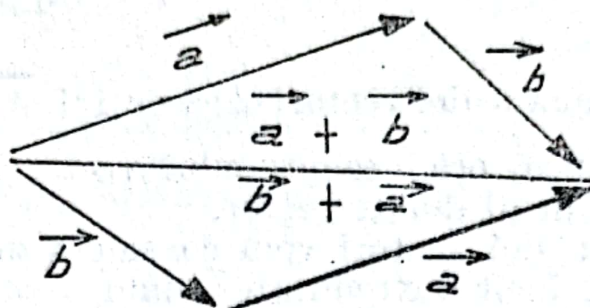


Fig. 9.7

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \text{ (fig. 9.7)}$$

2. Adunarea vectorilor este asociativă (fig. 9.8).

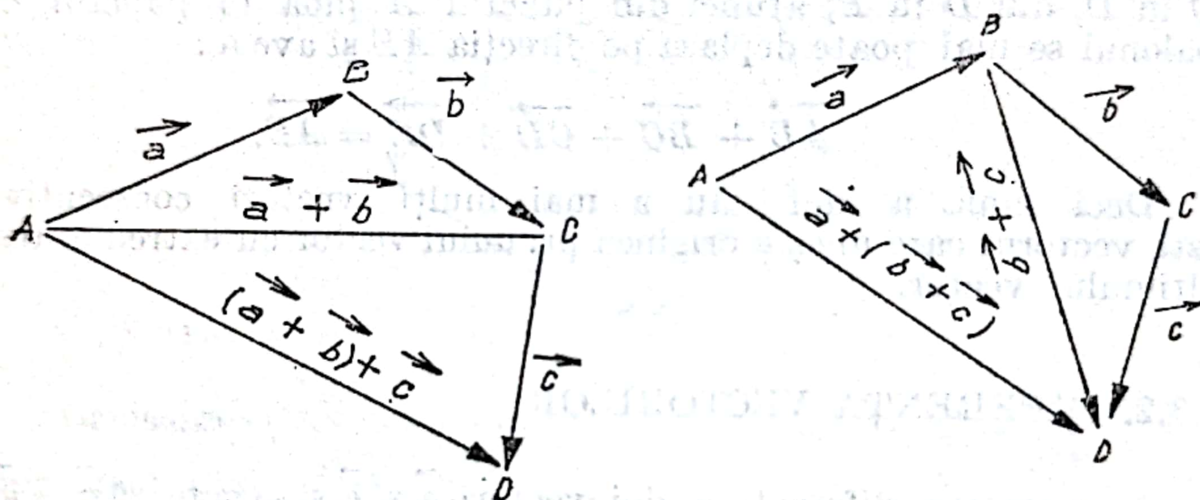


Fig. 9.8

Din punctul A pînă în punctul D, balonul poate ajunge în două moduri, efectuînd numai două deplasări.

1. Din A pînă în C, deplasare căreia îi corespunde vectorul $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$, și din C pînă în D, deplasare pe care o reprezentăm prin compunerea celor două deplasări deci prin vectorul $\overrightarrow{AD}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$. (1)

2. Din punctul A pînă în punctul B, deplasare pe care o reprezentăm prin vectorul $\vec{a}$, și din B pînă în D, pe care o reprezentăm prin vectorul $\overrightarrow{BD}=\vec{b}+\vec{c}$. Compunerea celor două deplasări se reprezintă prin vectorul $\overrightarrow{AD}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. (2)

Din relaţiile (1) şi (2), obţinem :

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

3. Pentru orice vector $\vec{v}$ există un vector opus $(-\vec{v})$:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

4. Pentru orice vector $\vec{v}$ există vectorul nul $\vec{0}$ cu proprietatea $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$.

Să presupunem că balonul s-a deplasat din A pînă în punctul B şi din punctul B pînă în punctul C, astfel încît :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Se numeşte modulul unui vector $\overrightarrow{AB}$ lungimea segmentului de dreaptă AB. Doi vectori care au aceeaşi direcţie, acelaşi modul şi sensuri diferite se numesc opuşi.

Cazuri particulare.

1. Să considerăm vectorii reprezentaţi prin săgeţile $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ care au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens (fig. 9.9).

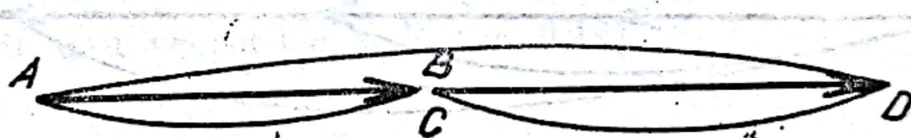


Fig. 9.9

Suma lor este vectorul $\overrightarrow{AD}$ care uneşte originea A a primului vector cu extremitatea D a celui de-al doilea vector.

Vom scrie $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.

2. Să luăm vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ care au aceeaşi direcţie şi sensuri diferite (fig. 9.10).

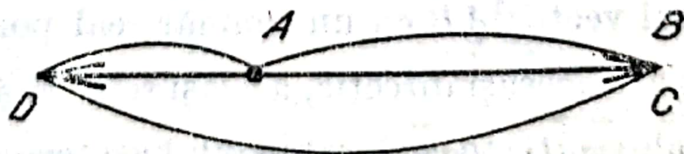


Fig. 9.10

Suma lor este vectorul care uneşte originea primului cu extremitatea celui de-al doilea, adică $\overrightarrow{AD}$ ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$).

În primul caz, modulul sumei este egal cu suma modulelor celor doi vectori.

În al doilea, modulul sumei este egal cu diferenţa modulelor.

9.3.3. ÎNMULŢIREA UNUI VECTOR CU UN SCALAR

Să considerăm vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, care au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi acelaşi modul.

Prin urmare, vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sînt echipolenţi şi avem: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$.

Să calculăm suma: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$. După regula stabilită anterior, avem:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ (fig. 9.11).

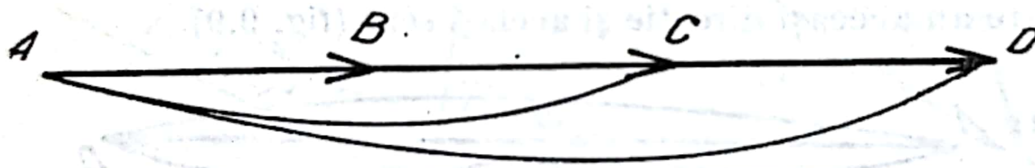


Fig. 9.11

Ţinînd seama de echipolenţa vectorilor, avem:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}.$$

Suma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$ o mai putem scrie $3\overrightarrow{AB}$ şi, prin urmare, avem: $3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$.

Produsul unui vector $\overrightarrow{AB}$ cu un număr real pozitiv α este un vector $\overrightarrow{AD}$ care are aceeaşi direcţie, acelaşi sens ca şi vectorul $\overrightarrow{AB}$. Modulul vectorului $\overrightarrow{AD}$ este egal cu modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$ înmulţit cu numărul real α.

Dacă numărul real α este negativ ($\alpha = -3$), atunci produsul numărului α cu vectorul $\overrightarrow{AB}$ este vectorul $\overrightarrow{AD}$, care are aceeași direcție ca și direcția vectorului $\overrightarrow{AB}$ dar sens opus:

$$(-3) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD'} \text{ (fig. 9.12).}$$

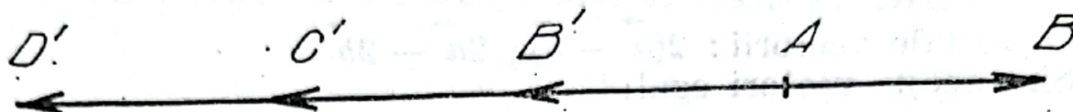


Fig. 9.12

9.4. EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Se dau vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (fig. 9.13).

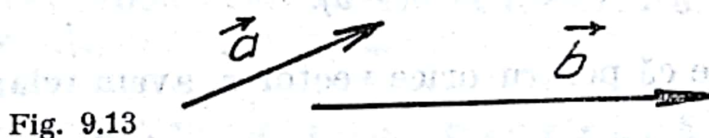


Fig. 9.13

Să se afle vectorul $3\vec{a} + \vec{b}$; $3\vec{a} - \vec{b}$.

2. Se dau vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (fig. 9.14).

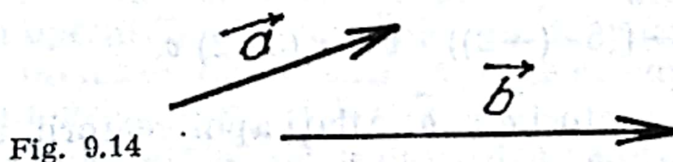


Fig. 9.14

Să se construiască vectorii: $\vec{a} + \vec{b}$, $3\vec{a} - 3\vec{b}$, $2\vec{a} + 2\vec{b}$, $2(\vec{a} + \vec{b})$.

3. Se dau vectorii $\vec{x}$, $\vec{y}$ (fig. 9.15).

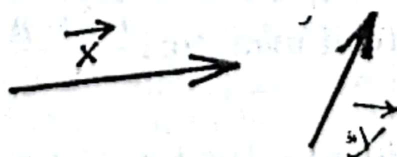


Fig. 9.15

Să se construiască vectorii: $3(\vec{x} + \vec{y})$; $3\vec{x} + 3\vec{y}$.
Sînt acești vectori egali?

4. Se dau vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ (fig. 9.16).



Fig. 9.16

Să se afle vectorii: $2(\vec{a}-\vec{b})$; $2\vec{a}-2\vec{b}$.
Sînt aceşti vectori egali?

5. Să se arate că pentru orice vector $\vec{v}$, avem relaţia:

$$2\cdot(3\vec{v})=(2\cdot 3)\vec{v}.$$

6. Să se arate că pentru orice vector $\vec{v}$, avem relaţia:

$$(-3)\vec{v}=3(-\vec{v}).$$

7. Să se arate că pentru orice vector $\vec{v}$, avem relaţiile:

$$(-3)\cdot(4\vec{v})=(3\cdot 4)(-\vec{v})=-(3\cdot 4\vec{v})=-(3\cdot 4\cdot \vec{v})=(-4)\cdot(3\vec{v}).$$

8. Să se arate că pentru orice vector $\vec{v}$, avem relaţia:

$$[(-3)(-2)]\vec{v}=(-3)\cdot(-2\vec{v})=-[3\cdot(-2\vec{v})]=$$
$$=-[(3\cdot(-2))\cdot\vec{v}]=(3\cdot 2)\,\vec{v}.$$

9. Construiţi doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. Aflaţi apoi vectorii următori:

$$3\vec{a}+\vec{b};\ -\frac{1}{}\vec{a};\ 2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b};\ \frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}.$$

10. În triunghiul ABC vectorul $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, iar vectorul $\overrightarrow{AC}=\vec{n}$. Să se construiască vectorii următori $\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$; $\frac{\vec{m}-\vec{n}}{2}$; $-\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$.

Să notăm cu A' mijlocul laturii BC. Arătaţi că $\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}=AA'$.

Capitolul 10

ORGANIZAREA ŞI PRELUCRAREA DATELOR

10.1. GENERALITĂŢI

Pentru a mări rapiditatea şi exactitatea calculelor, matematicienii au alcătuit la început tabele de calcul cu ajutorul cărora ei au rezolvat problemele foarte dificile pe care le punea, în diverse activităţi, practica socială.

Se cunosc din timpuri foarte îndepărtate tabelele pentru puterile numerelor, pentru extrageri de rădăcină pătrată etc.

Cu timpul însă, caracterul problemelor care trebuie rezolvate s-a complicat foarte mult şi în raport cu ele, calculele au devenit foarte dificile. Aceasta a condus la căutarea unor mijloace mecanizate pentru prelucrarea datelor numerice.

În operaţiile de calcul efectuate cu ajutorul maşinilor mecanice, o parte din operaţiile efectuate de om în calculele aşa-numite de mînă sînt preluate de maşină. Aşa, de exemplu, în operaţiile de adunare, la maşina mecanică sau electrică, rolul calculatorului uman este numai acela de a înregistra valorile numerice ale termenilor. Efectuarea propriu-zisă a operaţiilor de adunare revine maşinii.

Procedeele alese pentru rezolvarea unor probleme cu conţinut numeric depind în mare măsură de disponibilităţile maşinii de calculat. Calculele se desfăşoară la maşina de calculat după anumite reguli, maşina executînd operaţiile în mai multe etape.

Rezultatele intermediare sînt păstrate în memoria maşinii şi utilizate prin anumite instrucţiuni la anumite momente ale desfăşurării calculului. Pentru a înţelege mai bine funcţionarea maşinilor de calcul să analizăm organizarea calculelor atunci cînd ele se efectuează în mod obişnuit cu mîna.

Principalul tip de calcule, aşa zise de mînă, îl constituie calculele după o formulă dată.

Organizarea calculelor se face în acest caz într-o modalitate care permite în orice moment să găsim rezultatele intermediare. Pentru a rezolva o astfel de problemă trebuie să se determine mai întîi operaţiile ce trebuie efectuate, ordinea în care aceste operaţii sînt efectuate, adică succesiunea operaţiilor, şi modul de reţinere şi utilizare a rezultatelor intermediare.

Exemplu:

Să se calculeze: $x = \dfrac{145 \times 15 + 155 \times 15}{16 : 8 + 24 : 8.}$.

Acest exerciţiu se poate rezolva în mai multe moduri.

a) O rezolvare a acestui exerciţiu constă în efectuarea următoarei succesiuni de paşi:

pasul 1 — Se înmulţeşte 145 cu 15;

pasul 2 — Se înmulţeşte 155 cu 15;

pasul 3 — Se adună 145×15 cu 155×15;

pasul 4 — Se împarte numărul 16 la 8;

pasul 5 — Se împarte numărul 24 la 8;

pasul 6 — Se adună $(16 : 8)$ cu $(24 : 8)$;

pasul 7 — Se împarte $(145 \times 15 + 155 \times 15)$ care s-a obţinut la pasul 3 la $(24 : 8 + 16 : 8)$ care s-a obţinut la pasul 6;

b) O altă cale mai raţională de a rezolva acest exerciţiu este următoarea:

$$x = \frac{(145 + 155) \cdot 15}{(16 + 24) : 8}.$$

Se efectuează următoarea succesiune de operaţii:

pasul 1 — Se adună 145 cu numărul 155;

pasul 2 — Se înmulţeşte $(145 + 155)$ cu numărul 15;

pasul 3 — Se adună numărul 16 cu numărul 24;

pasul 4 — Se împarte $(16 + 24)$ la numărul 8;

pasul 5 — Se împarte $(145 + 155) \cdot 15$ la $(16 + 24) : 8$.

Observăm că alegerea celei de a doua căi ne-a condus la un număr mai mic de paşi sau operaţii.

În aceste succesiuni de operaţii, obţinem şi anumite rezultate intermediare pe care dealtfel le folosim mai departe, într-o anumită ordine.

Această succesiune a operaţiilor, într-o anumită ordine, este denumită *rezolvarea algoritmică a problemelor date.*

Algoritmul este o suită organizată şi finită de operaţii efectuabile, capabilă să rezolve o anumită clasă de probleme.

A învăţa un om să efectueze o anumită activitate înseamnă de fapt a-l face să-şi însuşească algoritmul de îndeplinire al acestei activităţi.

Pentru efectuarea calculelor, algoritmul se scrie sub forma unei scheme de calcul care constituie una din modalităţile cele mai raţionale şi simplificate de descriere a algoritmilor de rezolvare a unei anumite probleme.

Într-o schemă de calcul se indică în mod clar şi precis ce operaţii se efectuează şi în ce ordine.

Indicarea operaţiilor într-o schemă logică de calcul se face folosind diferite semne convenţionale prin care se notează introducerea, înregistrarea datelor şi prelucrarea lor.

Aceste semne convenţionale sînt (fig. 10.1) : *a* — începutul şi sfîrşitul programului ; *b* — introducerea datelor ; *c* — instrucţiuni de tratare ; *d* — condiţii sau verificări care se fac între mărimile problemei.

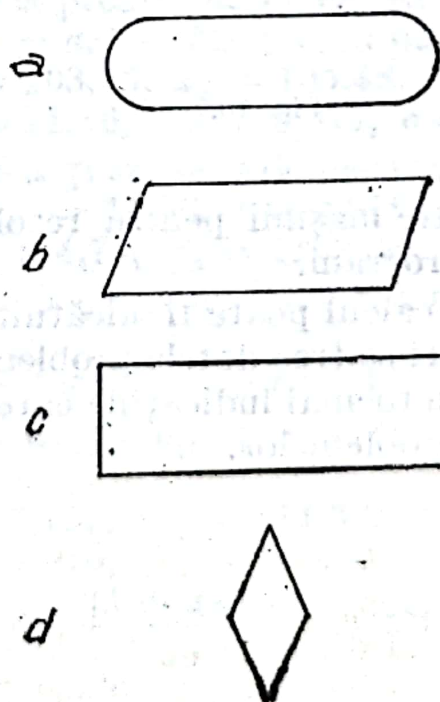


Fig. 10.1

Particularitățile alcătuirii schemei de calcul se înțeleg mai bine pe exemplul precedent (fig. 10.2).

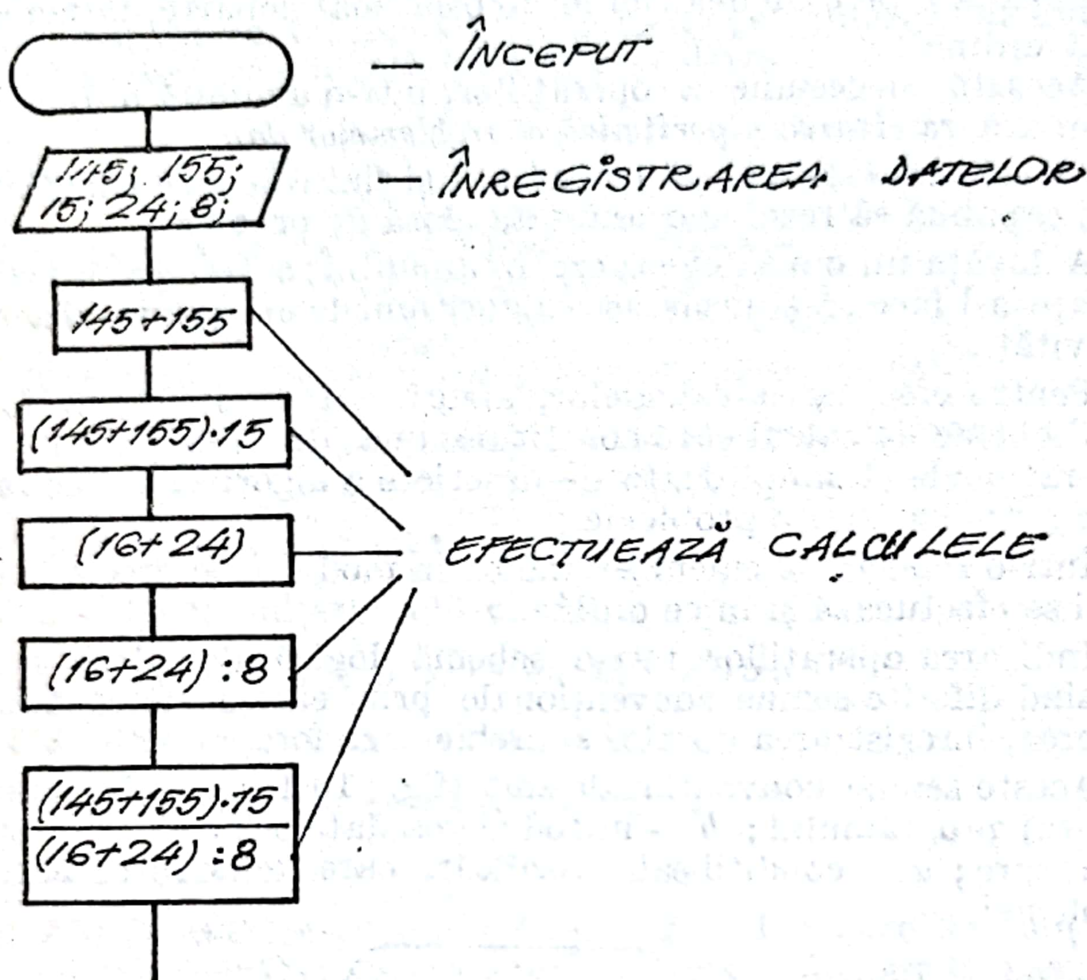


Fig. 10.2

Lista indicațiilor date mașinii pentru rezolvarea unei anumite probleme se numește program.

O schemă logică de calcul poate fi alcătuită și sub forma unui tabel. În primele rînduri se trec datele problemei, iar în următoarele rînduri sînt trecute tocmai indicațiile care se dau calculatorului pentru rezolvarea problemelor.

Exemplu

Să se afle valoarea lui $y = \frac{(ax + b)}{cx^2}$, unde $a = 5$, $b = 9$, $c = 9$, $x = 4$.

Procesul de calcul care conduce la aflarea valorii lui y este reprezentat în următoarea schemă :

Număr instrucţiune	Conţinutul instrucţiunii	Rezultatul
1	a	5
2	b	9
3	c	9
4	x	4
5	(1) × (4)	20
6	(5) + (2)	29
7	(4) × (4)	16
8	(3) × (7)	144
9	(6) : (8)	$\frac{29}{144}$

Această listă cuprinde programul instrucţiunilor codificate pentru calculatorul uman.

În coloana 2 se indică ce anume operaţii trebuie efectuate. Aşa de exemplu în rîndul (5) se indică operaţia de înmulţire între valoarea lui a trecută în rîndul (1) şi valoarea lui x trecută în rîndul (4).

Coloana a treia este lăsată liberă pentru a se trece rezultatele.

10.2 EXERCIŢII

1. Să se alcătuiască programul de calcul şi să se calculeze valoarea polinomului $y = ax^2 + bx + c$, în punctele :
$x_1 = 145{,}36$, $x_2 = 103{,}35$, $x_3 = 105{,}48$,
$x_4 = 119{,}68$, $a = 11{,}36$, $b = 0{,}015$, $c = 11{,}136$.

2. Să se alcătuiască şi să se calculeze valoarea polinomului : $y = ax^3 + bx^2 + cx$, $a = 11{,}36$, $b = 0{,}015$, $c=13{,}135$, în punctele $x_1 = 147{,}63$, $x_2 = 114{,}74$, $x_3 = 1103{,}36$.

3. Să se alcătuiască programa de calcul pentru rezolvarea sistemului :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases}$$

unde :
$a_1 = 0{,}143$, $b_1 = 1{,}157$, $c_1 = 114{,}36$,
$a_2 = 0{,}105$, $b_1 = 1{,}046$, $c_1 = 108{,}30$.

4. Să se alcătuiască programul de calcul pentru parcelarea unui lot de forma unui triunghi avînd $S=140{,}36$ ha şi $L=1483{,}15$ mm şi 100 de parcele egale.

Capitolul 11

PROBLEME CU CONȚINUT PRACTIC

1. Dintr-o sîrmă de oțel cu diametrul de 5 mm se confecționează un arc elicoidal cu o lungime de 122 mm. Să se stabilească numărul de spire, dacă distanța dintre ele este de 8 mm.

2. O scîndură de lățime $b = 236$ mm trebuie tăiată în șipci a căror grosime să fie $b_1 = 20$ mm. Lățimea tăieturii este $t = 4$ mm. Cîte șipci se obțin din această scîndură?

3. Un geam are forma unui dreptunghi. Cît de mare trebuie să fie lungimea și lățimea geamului, pentru ca la perimetrul dat de $2p$ să pătrundă lumină cît mai multă.

4. Prețul de cost al unui produs se compune din mai multe elemente (valoarea materiilor prime, retribuțiile lucrătorilor etc.). Valoarea materiilor prime și a retribuțiilor reprezintă d lei pentru fiecare produs finit. Cheltuielile indirecte de producție (de exemplu : amortizarea clădirilor și echipamentelor, fondul de retribuire a acelora care nu sînt direct în producție) sînt de s lei pe an. Prețul de vînzare este r lei pentru o unitate a produsului.

Cîte unități de produs trebuie realizate pe an, pentru a avea un cîștig mai mare decît p lei?

5. Diferența de înălțime între locuințele așezate în punctul cel mai înalt al unui oraș și stația de pompare pentru alimentarea cu apă este h. Pierderea de presiune care apare în conductele de apă din cauza frecărilor nu este mai mare de $f\%$ în punctele cele mai îndepărtate.

Ce presiune trebuie să aibă apa de la stația de pompare pentru ca în întreaga conductă de apă a orașului scăderea de presiune să fie sub p pascali?

6. Dintr-o foaie de tablă trebuie să confecţionăm 25 de şaibe (inele circulare) al căror diametru exterior este de 50 mm şi diametrul interior de 22 mm (fig. 11.1).

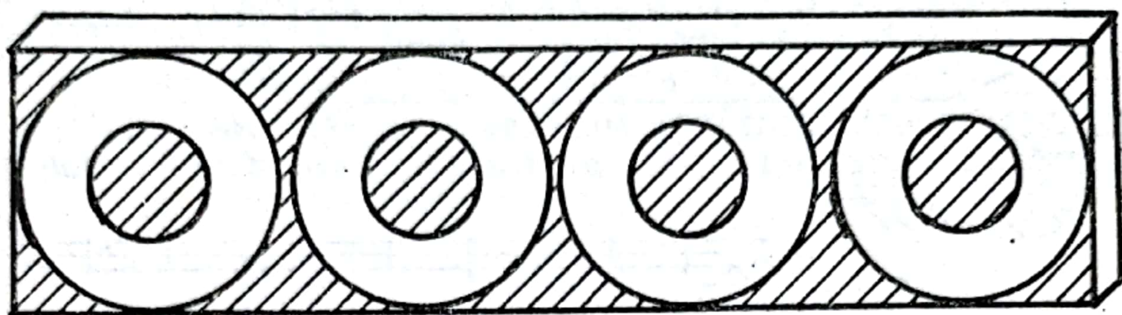


Fig. 11.1

a) Ce suprafaţă de tablă trebuie să avem dacă 35% se consideră pierdere tehnologică?

b) Dacă utilizăm porţiunea de tablă din interiorul inelului, cu cît scade procentul de pierdere tehnologică?

7. Coeficientul de frecare la transmisii prin curele este dat de formula $\mu = a + bv$, coeficient care depinde de viteza de deplasare v a curelei.

Stabiliţi mărimile constante a şi b pentru o curea din piele dacă pe cale experimentală s-au găsit următoarele valori ale coeficientului:

$\mu_1 = 0{,}4$ la viteza de alunecare $v_1 = 0{,}1$ m/s,

$\mu_2 = 0{,}5$ la viteza de alunecare $v_2 = 0{,}5$ m/s.

8. Corpul unui om matur are greutatea de m kg şi volumul v dm³. Calculaţi cîte plăci de plută cu volumul v_1 dm³ sînt necesare pentru un colac de salvare, care să asigure ca, după scufundarea completă în apă dulce, volumul unui înotător să iasă cu f% deasupra apei.

Densitatea plutei este 0,2 kg dm^{-3}.

9. Din cîţi elemenţi (ţevi individuale) trebuie să fie formată conducta unei nave absorbant refulantă (fig. 11.2), astfel ca să transporte nisipul aluvionar la o distanţă de 350 m de la locul de extragere pînă la un dig, dacă lungimea fiecărui element este de 8 m şi lungimea ţevii în interiorul elevatorului absorbant este de 46 m?

10. Un oraş este aşezat lîngă un rîu. La ce distanţă de portul oraşului trebuie amenajat un ştrand pentru ca o cursă cu vaporul dus-întors să dureze t min. (nu se ţine cont de opriri). Viteza proprie a vaporului se notează cu v (km/min) şi viteza curentului cu v_1(km/min), unde ($v_1 < v$).

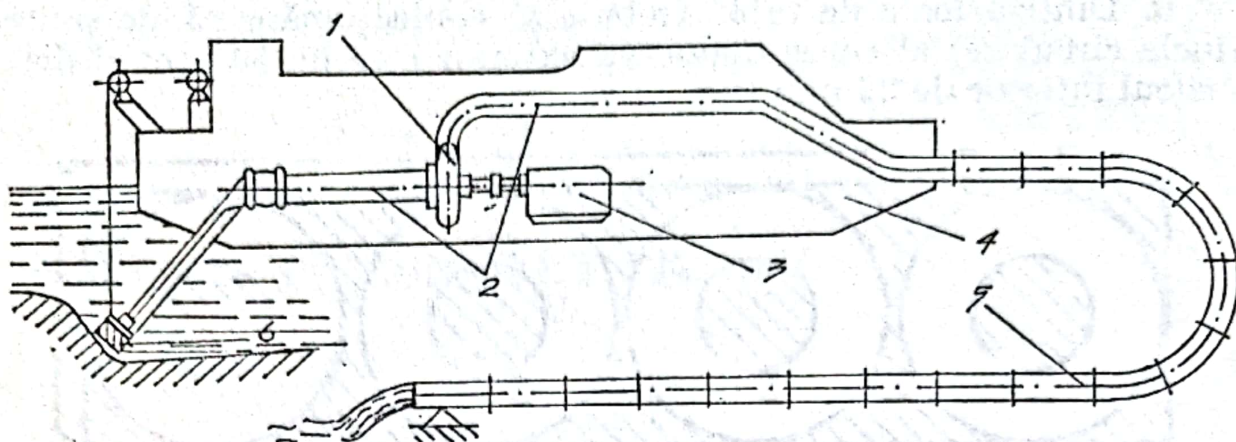


Fig. 11.2

11. Localitățile A și B sînt la o distanță de 5 km una față de alta. În localitatea A prețul de cost al unei tone de cărbune este l lei, în localitatea B cu $p\%$ mai mult. La care punct între A și B va fi mai ieftin cărbunele care vine din B față de cel din A dacă pentru o tonă de cărbune pe km cheltuielile de transport sînt de n lei.

12. Să se pregătească o soluție $p_1\%$ iod și alcool. Cîte grame de alcool trebuie puse la o soluție de iod de p % pentru a obține o soluție a cărei concentrație să nu fie mai mică de $p_1\%$ $(p_1 < p)$?

13. Brațele șublerului care se folosește la măsurarea diametrelor orificiilor au o rază mult mai mică decît cel mai mic orificiu de măsurat (fig. 11.3). Să se stabilească eroarea care se face la măsurarea diametrului unei găuri, dacă brațele șublerului

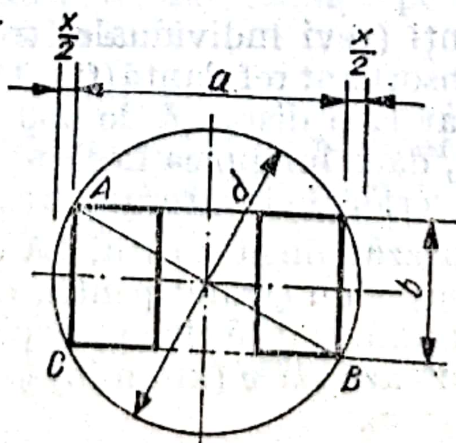


Fig. 11.3

sînt drepte și la măsurare a fost obținut diametrul $a = 15$ mm. Lățimea brațului este $b = 6$ mm.

14. Într-o tablă dreptunghiulară cu laturile $a = 6$ cm și $b = 400$ cm, să se taie o deschizătură dreptunghiulară cu o suprafață $A = 1000$ cm ^{2}, astfel încît marginile să se afle la distanță egală de marginea tablei.

15. O geamandură care are forma unui trunchi de con (fig. 11.4) cu greutatea m se scufundă într-un lichid cu densitatea ρ pînă la o

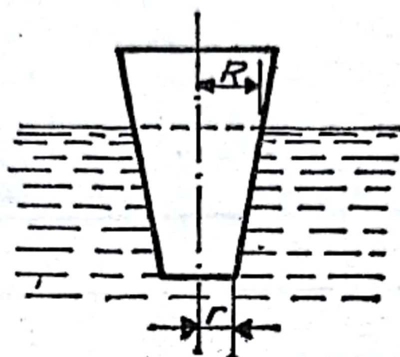


Fig. 11.4

adîncime h. Baza geamandurii care se scufundă în lichid are raza r. Să se determine raza bazei geamandurii la suprafața lichidului.

16. Două roți dințate cilindrice sînt angrenate ca în fig. 11.5. Vitezele periferice pe cele două cercuri de rostogolire sînt la ambele roți egale. Se știe că dacă n_1 și n_2 reprezintă numărul de rotații al celor

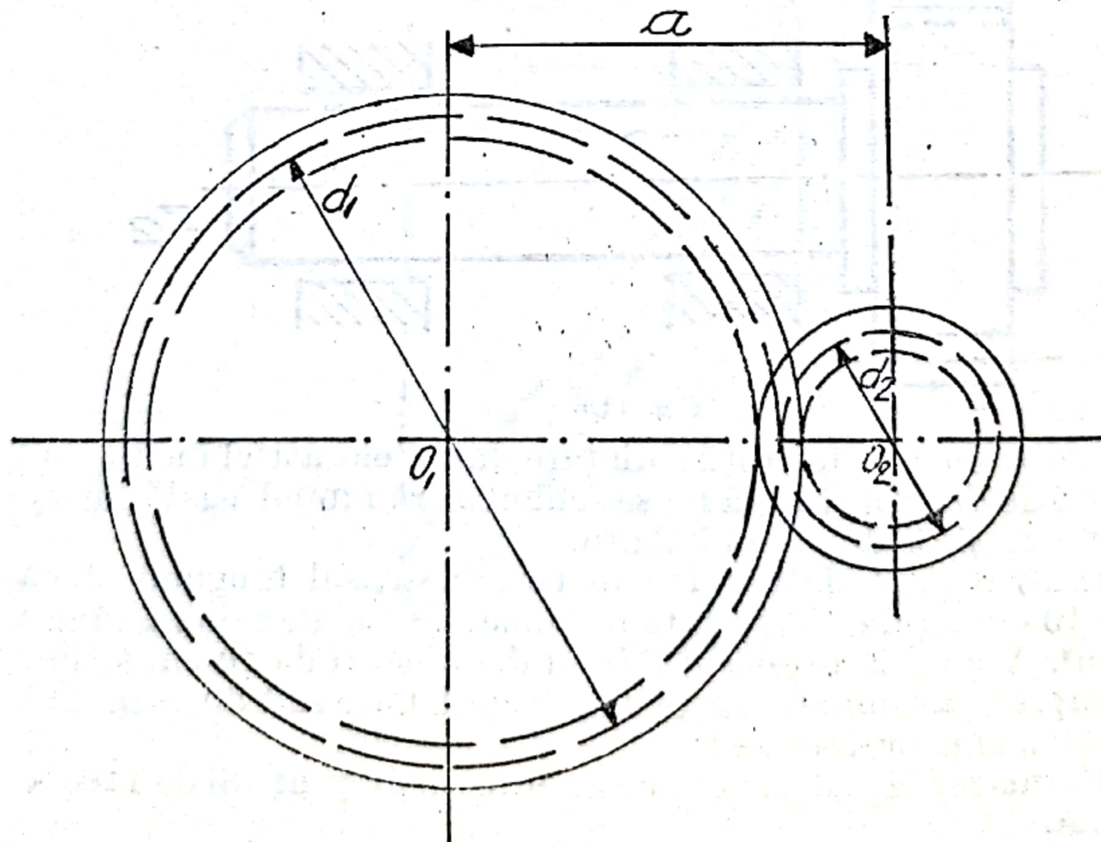


Fig. 11.5

două roţi dinţate şi d_1 şi d_2 diametrele cercurilor de rostogolire atunci avem relaţia $n_1d_1 = n_2d_2$. Cunoscînd că z_1 şi z_2 reprezintă numărul de dinţi al roţilor şi distanţa dintre centrele roţilor dinţate fiind a, să se afle diametrele centrelor de rostogolire a celor două roţi dinţate angrenate.

17. Doi arbori paraleli sînt legaţi între ei prin două roţi dinţate (fig. 11.6). Pentru obţinerea unui alt raport de turaţii $\frac{n_1}{n_2} = i$,

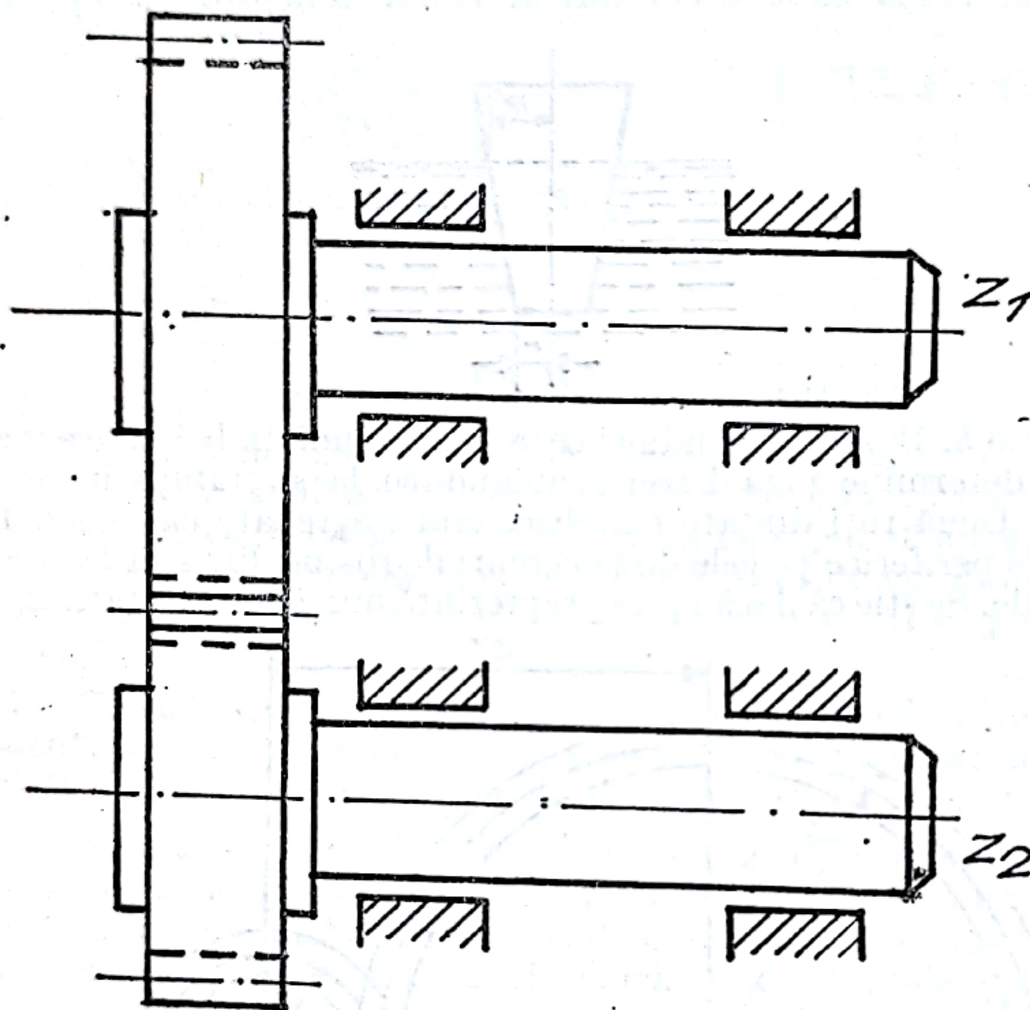


Fig. 11.6

vom schimba în aşa fel roţile dinţate între ele astfel încît suma numărului de dinţi z_1 şi z_2 să nu se schimbe, rămînînd egală cu z_0. Să se afle z_1 şi z_2 după schimbare.

18. Dintr-o foaie de tablă vom tăia în sensul lungimii două benzi de 10 cm lăţime. Suprafaţa diminuată a foii de tablă a rămas de 12 dm^2. Vom tăia în sensul lăţimii două benzi de 10 cm lăţime şi noua suprafaţă diminuată este de 560 cm^2. Care sînt dimensiunile foii de tablă şi suprafaţa sa?

19. Formatul A_0 utilizat în desen este un dreptunghi de 1188 × ×840 mm.

a) Care este suprafaţa acestui format?

b) Care este raportul dintre lungime şi lăţime?

20. O masă pătrată, a cărei latură este 1,10 m, este prevăzută la capete cu două semicercuri. Care este suprafaţa acestei mese?

Pentru acoperirea ei cu o faţă de masă se cumpără o pînză a cărei lăţime este 1,40 m. Ce lungime de pînză este necesară, pentru ca la extremităţile mesei pînza să cadă la fel pe fiecare latură?

21. Dintr-o bucată de ţesătură vom tăia pătrate cu latura de 12 cm în sensul lăţimii şi vom tăia 5 benzi de 12 cm lăţime. Din fiecare bandă vom obţine 7 pătrate. Extremităţile neutilizate din benzi formează un dreptunghi cu suprafaţa de 3,6 dm². Care sînt dimensiunile şi suprafaţa ţesăturii? Efectuaţi un desen.

22. Un tîmplar trebuie să execute o uşă după schiţa din figura 11.7.

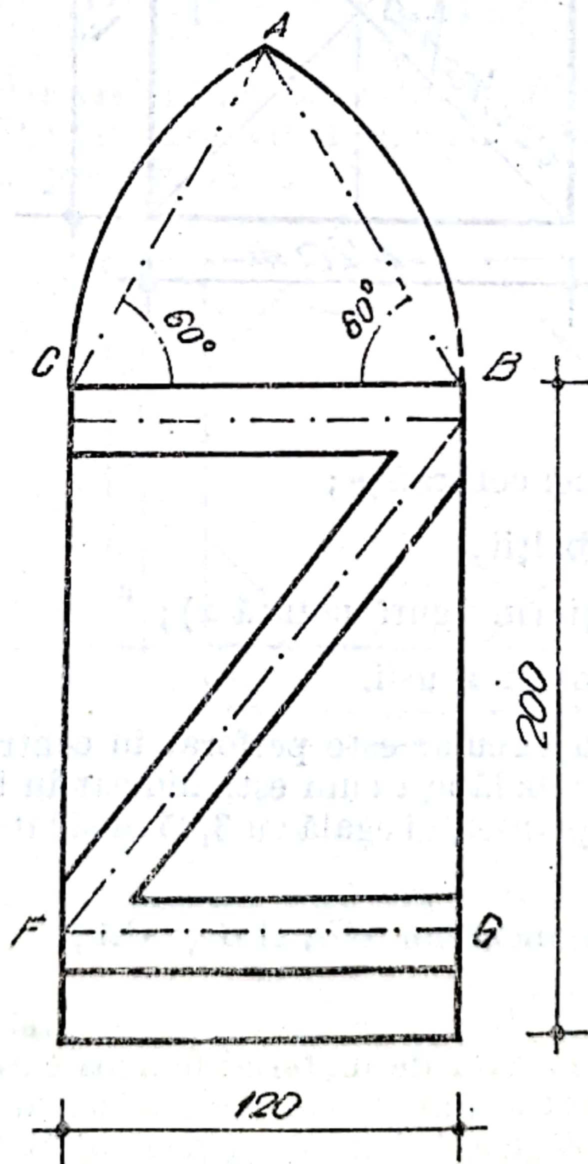


Fig. 11.7

a) Calculați înălțimea acestei uși.

b) Calculați suprafața sa, fără să țineți seama de pierderi tehnologice sau de grinzile transversale (dimensiuni în cm).

23. Aveți de confecționat ușa reprezentată în figura 11.8.

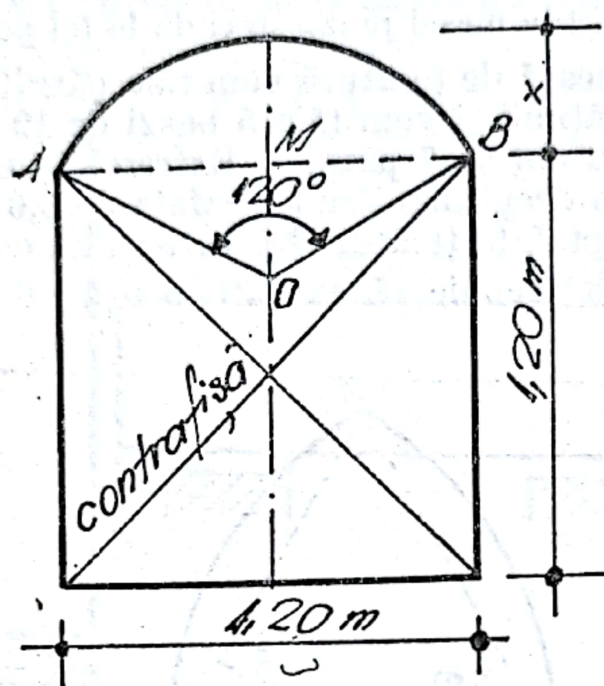


Fig. 11.8

Calculați :

a) lungimea unei contrafișe ;

b) raza *OA* a bolții ;

c) săgeata bolții (în figură notată *x*) ;

d) suprafața totală a ușii.

24. Un planșeu circular este perforat în centru cu o deschizătură în formă exagonală așa cum este indicat în figura 11.9.
Dîndu-se raza planșeului egală cu 3,25 m și latura $OM = 1{,}3$ m, calculați :

a) lungimea segmentelor *CD*, *AB* și *CA* ;

b) aria planșeului ;

c) care este suprafața de material lemnos care a fost necesară pentru realizarea cofrajului acestui planșeu, știind că 20% reprezintă pierderile tehnologice de lemn brut pentru tăieturi și asamblare.

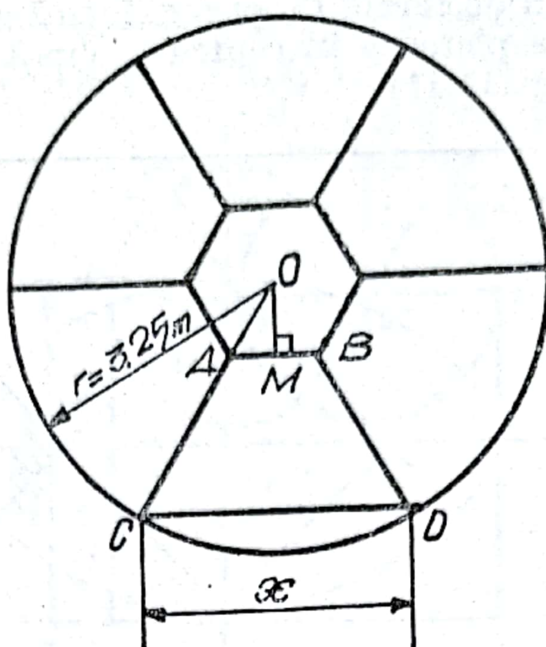


Fig. 11.9

25. Un tîmplar vrea să realizeze dintr-o foaie de placaj, a cărei formă este un pătrat cu latura de 1 m, un octaedru regulat conform desenului de mai jos (fig. 11.10)

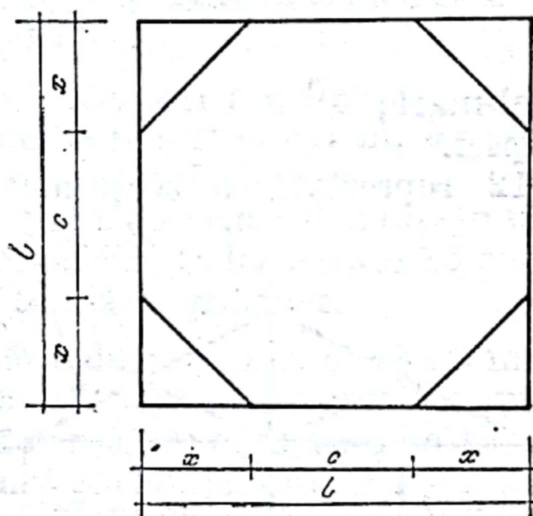


Fig. 11.10

Calculaţi :

a) lungimea x care trebuie dusă din vîrfuri pentru a tăia bucăţile necesare;

b) lungimea laturii c a octaedrului;

c) suprafaţa sa;

d) procentajul deşeurilor.

26. Pe un tavan de formă dreptunghiulară avînd dimensiunile de 4,50×7,50 m se pictează în centru o elipsă a cărei axă mică este de 2,5 m. (fig. 11.11).

Fig. 11.11

Calculați:

a) lungimea axei mari;
b) suprafața elipsei.

27. Figura 11.12 reprezintă o secțiune dintr-un acoperiș.

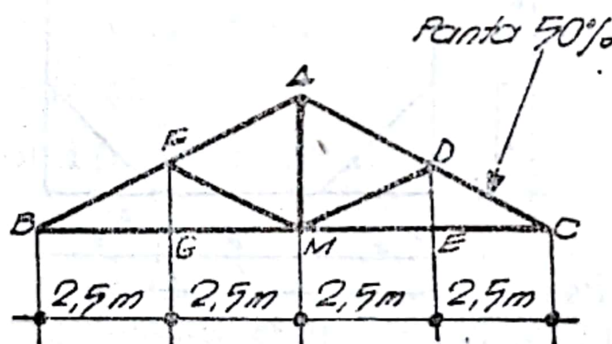


Fig. 11.12

a) Să se calculeze AM, înălțimea acoperișului; AB și AC lungimile pantei; MF și MD; FG și DE;

b) Calculați măsura unghiului $\widehat{BAC}$.

28. Vrem să vopsim ușa reprezentată în figura 11.13. Partea superioară este o jumătate de elipsă.

a) Calculați razele fiecărui arc: $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ și $\overset{\frown}{BC}$;
b) care este mărimea unghiului razelor OB și $O'O$;

c) suprafaţa jumătăţii de elipsă $ABCDA$;

d) suprafaţa ce trebuie vopsită.

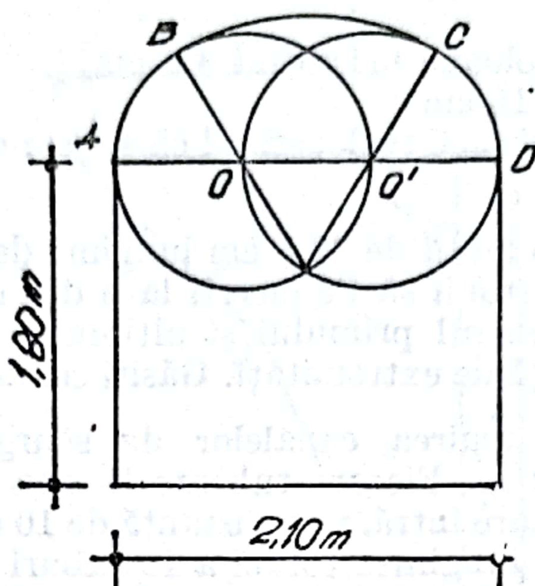


Fig. 11.13

29. Dintr-o ţesătură care are următoarele dimensiuni: 50 cm şi 60 cm se taie benzi oblice necesare pentru bordarea unui volan de 2,5 m lungime. Lăţimea benzilor oblice este de 2 cm. Executaţi un desen la scara 1/10.

30. Planşeul unei încăperi are forma unui trapez dreptunghic cu dimensiunile următoare: $B = 4{,}5$ m, $b = 3{,}5$ m şi $h = 3$ m. Calculaţi suprafaţa acestui planşeu.

Planşeul este susţinut de grinzi distanţate unele faţă de altele la 50 cm, paralele cu bazele, şi încastrate 15 cm în zidărie. Calculaţi lungimea totală a grinzilor.

31. Într-o bucătărie de 6 m lungime şi 4,5 m lăţime un faianţar are de placat cu faianţă suprafaţa bucătăriei pînă la înălţimea de 1,50 m. O placă de faianţă are dimensiunile 15×15 cm. În această bucătărie există o uşă cu dimensiunile 1×2 m şi o fereastră de 1,80×0,8 m şi baza ei se află la 90 cm de la nivelul pardoselii.

Calculaţi cantitatea de faianţă necesară placării acestei bucătării.

32. Un fotogravor are de executat trei clişee asemănătoare după trei documente. Primul document are forma unui cerc cu diametrul 0,26 m şi pe care trebuie să-l reducă la jumătate. Al doilea document are forma unui dreptunghi cu lungimea de 0,36m şi lăţimea de 0,15m. Acesta, după execuţie, trebuie să fie cu 12 cm mai lung. Al treilea document este un pătrat a cărui latură este 9 cm şi trebuie executat la fel.

Dacă metalul folosit costă 2,10 lei/cm² care este prețul metalului folosit pentru confecționarea acestor trei clișee.

33. Pe un plan de sistematizare a unui oraș vom măsura cu rigla :
— planul unei coloane măsurînd 8,2 cm,
— peronul gării 16 cm.
Care sînt dimensiunile reale, știind că 4,1 cm din plan reprezintă 30 m în realitate.

34. Se închide o fentă de 33,5 cm lungime de pe o haină cu 12 butoni, astfel ca butonii să fie cusuți la o distanță de 1 cm unul față de celălalt. Centrul primului și ultimului buton să fie la o distanță de 3 cm față de extremități. Găsiți ce diametre au butonii.

35. Pentru construirea canalelor de scurgere se utilizează tuburi lungi de 1,2 m. Fiecare tub are la una din extremități o porțiune lărgită în care intră, pe o distanță de 10 cm tubul următor. Un elev susține că lungimea totală a 10 tuburi asamblate este de 11 m; un altul afirmă că lungimea celor 10 tuburi asamblate este de 11,10 m.
Să se arate prin calcul care dintre cei doi elevi are dreptate.

36. Figura 11.14 reprezintă planul orizontal a unei săli, a

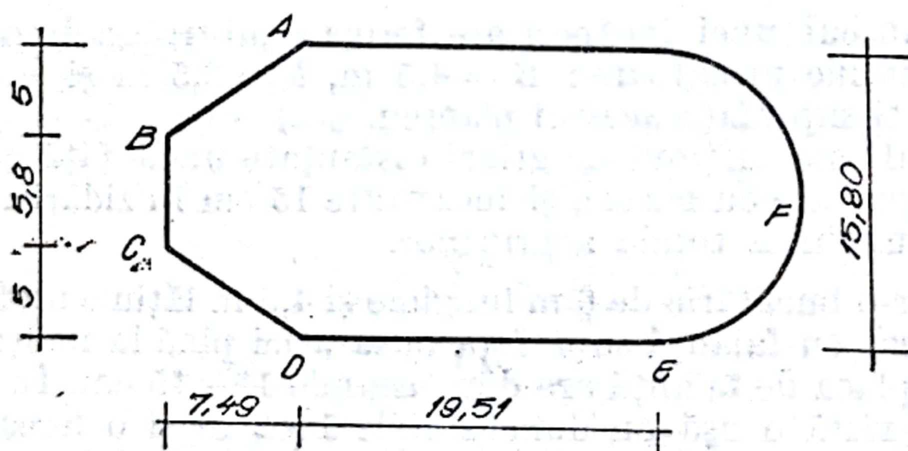


Fig. 11.14

cărei înălțime este de 6,35 m, avînd 4 uși de acces cu înălțimea de 3,25 m și lățimea de 2,3 m. Se propune zugrăvirea cu vinacet a acestei săli.

Calculați :

a) suprafața planșeului;

b) suprafața pereților ce trebuie zugrăviți;

c) suprafața totală de zugrăvit;

d) cantitatea de material folosit pentru zugrăvirea sălii ştiind că pe metru pătrat se consumă 0,500 kg vinacet.

37. Ornamentul central al unei pardoseli din mozaic are două culori. Forma sa este reprezentată în figura 11.15 *a* şi dimensiunile

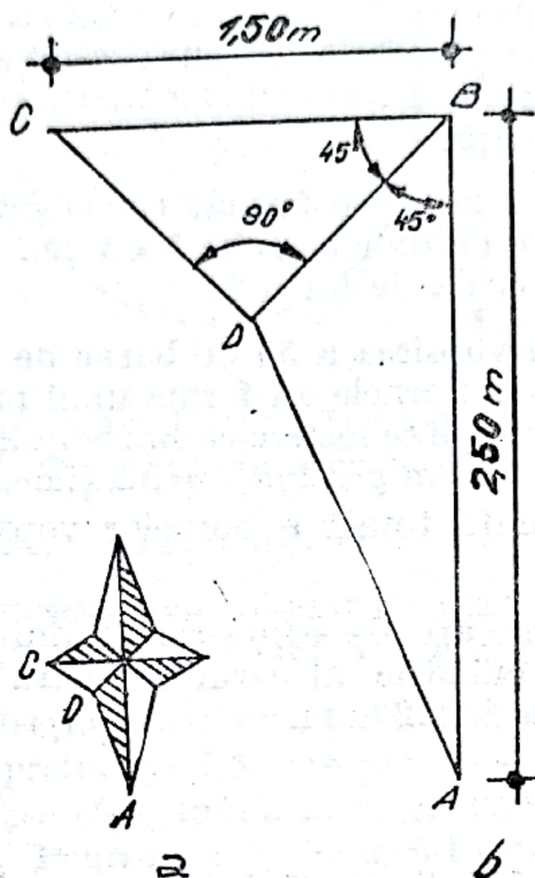


Fig. 11.15

sînt date pe figura 11.15 *b*.

Care este suprafaţa ornamentului şi ce suprafaţă are fiecare culoare?

38. Vestibulul unui apartament avînd o formă exagonală are două ziduri opuse la distanţa de 5,2 m unul faţă de celălalt.

Calculaţi:

a) lăţimea fiecărui zid al vestibulului;

b) suprafaţa totală a vestibulului, urmînd ca acesta să fie zugrăvit, ştiind că:

— înălţimea la care se află planşeul este de 4 m;

— pe fiecare din aceste ziuri se află uşi către alte încăperi ale apartamentului;

— dimensiunile uşilor sînt de 1 × 2,2 m.

39. O încăpere urmează a fi acoperită cu mochetă. Dimensiunile încăperii sînt de 4 × 3,5 m iar lăţimea unei fîşii din mochetă

este de 70 cm. Efectuaţi un desen la scara 1/100 reprezentînd şi dispunerea fişiilor din mochetă. Care este lungimea totală a mochetei ce trebuie cumpărată?

40. O încăpere avînd o formă dreptunghiulară cu dimensiunile de 4,2×3,2m şi înălţimea de 3,20 m urmează a fi tapetată. Ştiind că pe unul din ziduri se află o fereastră a cărei suprafaţă este de 2,60 m² şi o uşă cu dimensiunile de 1×2,20 m, calculaţi suprafaţa totală de tapet necesară.

41. Dintr-o foaie de hîrtie format comercial de 210×270 cm vom decupa etichete de dimensiunile 5×3 cm. Cîte etichete vom obţine din această coală de hîrtie?

42. Se comandă vopsirea a 50 de borne de kilometraj situate pe un drum naţional. Bornele au forma unui paralelipiped vopsit în alb şi sînt montate pe semisfere ce sînt vopsite în roşu. O bornă are 40 cm lăţime şi 35 cm grosime iar înălţimea totală de 86 cm.

Care este suprafaţa totală a bornelor vopsite în roşu? Dar în alb?

43. Un tinichigiu are de confecţionat din tablă zincată de 2 mm un burlan cilindric al cărui diametru interior este de 0,240 m şi lungimea de 2,265 m.

Calculaţi:

a) dimensiunile foii din tablă din care este confecţionat burlanul, ştiind că pentru îmbinare avem nevoie de 28 mm în plus;

b) masa cantităţii acestei table, dacă densitatea tablei este de 7,6 kg/dm³.

44. Se confecţionează un recipient de formă cilindrică, cu capac din tablă ce cîntăreşte 5 kg/m². Înălţimea este egală cu diametrul. Calculaţi suprafaţa de tablă utilizată, ştiind că recipientul confecţionat cîntăreşte 2543 gr. Care este capacitatea recipientului?

45. Într-un cilindru de 40 mm în diametru se execută la freză tăietura definită prin cota $a = 30$ mm (figura 11.16).

a) Calculaţi lungimea b a tăieturii obţinute.

b) Care este raportul între noua şi vechea greutate a cilindrului, ştiind că el măsoară în lungime 150 mm.

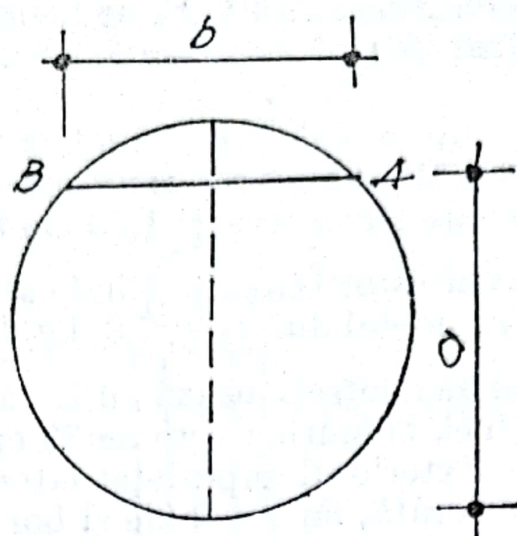


Fig. 11.16

46. Partea conică a unei mandrine port-sculă are diametrele de 12,04 mm şi 9,04 mm şi lungimea de 54 mm.

a) Care este conicitatea mandrinei?

b) Ce unghi formează generatoarea cu axa? (Se ştie că unghiul corespondent unei pante de 0,01 dă 4/7 grade).

47. Pentru confecţionarea unui dulap din stejar avem nevoie de 0,3 m³ de lemn prelucrat şi 35 ore pentru confecţionare, asamblare şi finisare. Se ştie că lemnul brut costă 650 lei/m ³ şi că deşeurile reprezintă 10%. Pentru o oră tîmplarul este plătit cu 11 lei. Cu cît trebuie vîndut dulapul pentru realizarea unui beneficiu de 40%. Care este volumul de lemn neprelucrat necesar pentru confecţionarea a cinci dulapuri?

48. O persoană vrea să-şi repare casa. Arhitectul întocmeşte un deviz estimativ în modul următor;

— repararea elementelor de construcţii: 9500 lei, tencuirea 2500 lei, acoperişul 1050 lei, vopsirea 2065 lei şi diverse 606 lei.

Beneficiul ICRAL-ului este fixat la 5% din cheltuielile la care se ridică reparaţia casei.

Care este valoarea totală a reparaţiilor casei?

49. Un rezervor cilindric din tablă are diametrul de 1,4 m şi 1,45 m înălţime. Se vopseşte pe partea laterală şi capacul de la baza rezervorului la preţul de 5 lei/m ².

Care este preţul vopsirii şi cantitatea de vopsea necesară pentru un metru pătrat ştiind că s-a utilizat 7,920 kg de vopsea?

50. Un tinichigiu efectuează 16 burlane pentru sobă, de 95 cm lungime şi de diametrul 12 cm.

Calculaţi :

a) Suprafaţa de tablă necesară confecţionării burlanelor, ştiind că pentru îmbinare sînt necesari 1,25 cm?

b) Calculaţi masa acestor burlane ştiind că tabla are 0,8 mm grosime iar densitatea metalului este 7,8 kg/dm ^{3}.

51. Într-un atelier se confecţionează cutii cilindrice din carton pentru pălării. Înălţimea cilindrilor este de 30 cm- iar capacele au diametrul de 50 cm. Exteriorul suprafeţei laterale şi a capacului se acoperă cu hîrtie colorată, iar muchiile şi bordurile cutiei se finisează cu o pînză avînd un adeziv.

Calculaţi suprafaţa cutiei, suprafaţa hîrtiei necesară pentru acoperirea unei cutii şi lungimea pînzei cu adeziv necesară pentru o cutie?

52. Un grilaj este format din : 4 bare de oţel, cu lungimea de 3 m şi diametrul de 2 cm, o foaie din tablă de 3 m lungime şi 1,8 m înălţime, două bare plate de 3 m lungime, cu 4,5 cm lăţime şi 15 mm grosime. Ce suprafaţă de vopsire anticorozivă, avem?

53. O garnitură de fier are forma indicată în figura 11.17

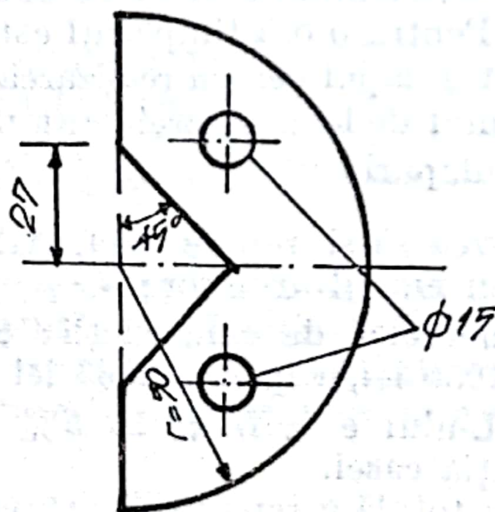


Fig. 11.17

(cotele în mm). Calculaţi greutatea acestei garnituri ştiind că ea este confecţionată din tablă a cărei grosime este de 5 mm şi cîntăreşte 3,894 kg (densitatea este de 7,8 kg/dm^3).

54. Un cilindru metalic din oţel are înălţimea de 100 mm şi diametrul de 50 mm. Calculaţi diametrul burghiului cu care s-a

străpuns cilindrul în sensul înălţimii lui, ştiind că şpanul rezultat din operaţia efectuată cîntăreşte 0,3 kg iar densitatea oţelului este de 7,8 kg/dm³.

55. Un şlefuitor trebuie să repolizeze un mic monument din marmoră, schiţat în figura 11.18. Acesta se compune dintr-un soclu

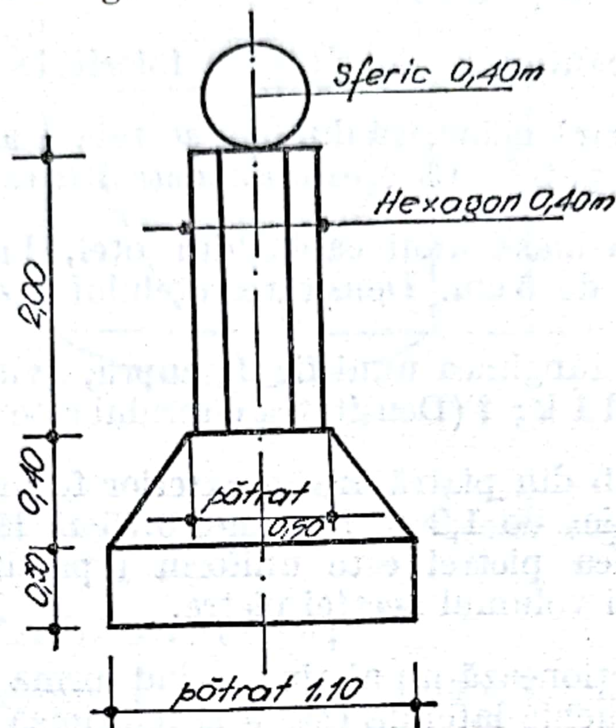


Fig. 11.18

şi dintr-un trunchi hexagonal, şi o sferă. Numai porţiunile care se văd se tratează. Care va fi preţul acestei operaţii dacă preţul unitar de şlefuire netedă este de 300 lei/m².

56. Piesa finită din figura 11.19 folosită pentru frîna de vagoane

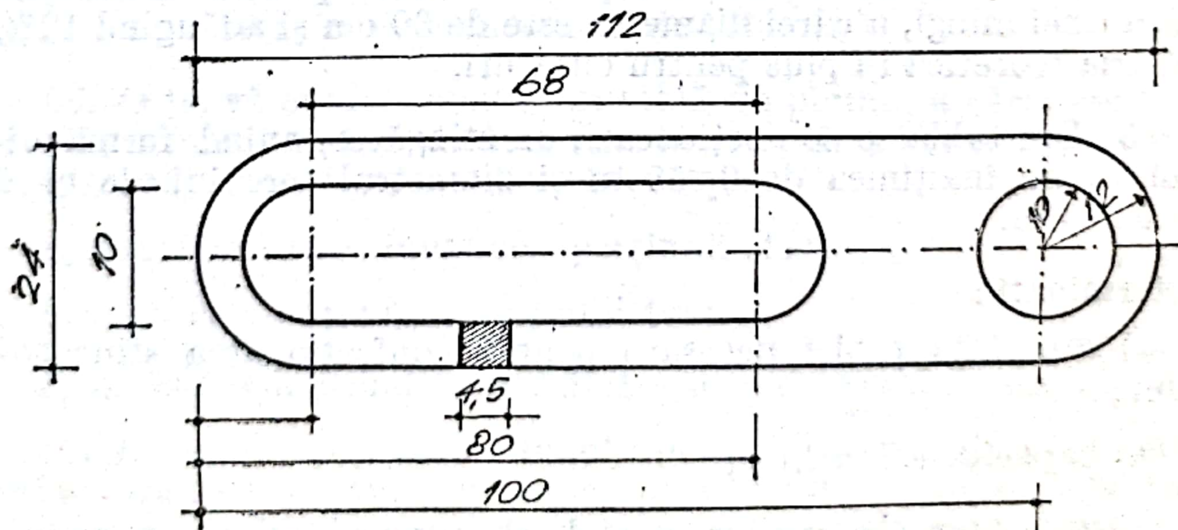


Fig 11.19

este obţinută prin forjare (cotele sînt în mm). Se cere :

a) Volumul piesei finite în dm³;

b) masa în kg ($\rho = 7{,}8$ kg/dm³);

c) greutatea metalului pierdut prin prelucrare, care reprezintă 12% din greutatea piesei finite;

d) calculaţi cantitatea de material folosit la forjarea piesei.

57. Dintr-o bară cilindrică din oţel se taie o altă bară a cărei secţiune este un pătrat. Care este diametrul barei iniţiale?

58. Care este masa unui cablu din oţel, lung de 100 m, avînd diametrul de 5 cm. Densitatea oţelului este de 7,8 kg/dm³.

59. Care este lungimea unui fir de cupru, avînd diametrul de 1 mm şi cîntărind 1 kg? (Densitatea cuprului este de 8,9 kg/dm³).

60. Un jgheab din piatră are în exterior forma unui paralelipiped dreptunghic de 1,2 m lungime, 0,75 m lăţime şi 0,45 m înălţime. Grosimea pietrei este uniform repartizată şi măsoară 75 mm. Calculaţi volumul acestei pietre.

61. Se confecţionează un abajur, avînd forma unui trunchi de con şi a cărei muchie laterală este a şi înălţimea h. Aria laterală se desfăşoară după un sector de coroană circulară, al cărui unghi la centru este de 120 grade. Calculaţi suprafaţa abajurului în funcţie de razele $r = 60$ cm şi $R = 120$ cm.

62. Care este cantitatea de piele necesară pentru confecţionarea unei mingi, a cărei diametru este de 30 cm şi adăugînd 12% din aria teoretică în plus pentru cusături.

63. Din tablă se confecţionează un stingător, avînd formă cilindrică cu înălţimea de 0,650 m şi diametrul cercului de bază de 0,220 m.

Determinaţi:

a) suprafaţa tablei necesare pentru confecţionarea stingătorului;

b) capacitatea în litri;

c) greutatea electrozilor de sudură autogenă ştiind că recipientul este sudat urmînd generatoarea şi circumferinţa bazei. Pentru fiecare dm de sudură se folosesc 4,5 g de electrozi.



64. Secţiunea orizontală într-o cisternă este reprezentată în figura 11.20. Lungimea ei este de 4,5 m.

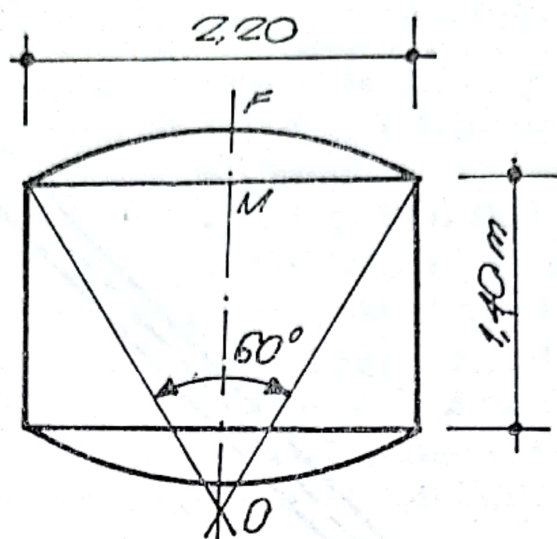


Fig. 11.20

a) calculaţi lungimea *MF* a săgeţii arcelor superioare şi inferioare;

b) suprafaţa fundului cisternei;

c) calculaţi suprafaţa laterală şi totală a tablei întrebuinţate;

d) calculaţi capacitatea cisternei în hl.

65. Un cazan este construit dintr-un cilindru, la capete terminat cu două calote sferice egale. Calculaţi volumul acestui cazan, ştiind că raza cilindrului este de 0,80 m, lungimea totală a cazanului este de 4,60 m şi săgeata calotei de 0,30 m.

66. O ţeavă confecţionată din tablă de plumb, a cărei grosime este de 4 mm şi avînd un diametru interior de 20 mm are traseul *ABCD* indicat în figura 11.21. Calculaţi:

a) urmărind axa, lungimea porţiunii *AD*;

b) care este suprafaţa secţiunii ţevii;

c) masa ţevii, ştiind că densitatea este de 11,35 kg/dm^3.

67. Determinaţi pentru sifonul din ţeavă de plumb, cu diametrul exterior de 34 mm şi grosimea peretelui de 4 mm, reprezentat în figura 11.22, lungimea desfăşurată şi suprafaţa secţiunii lui.

68. Calculaţi lungimea sforii necesare pentru legarea în cruce a unei lăzi, avînd forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea

de 80 cm, lăţimea 50 cm şi înălţimea de 60 cm. Se presupune că pentru fiecare nod sînt necesari 40 cm.

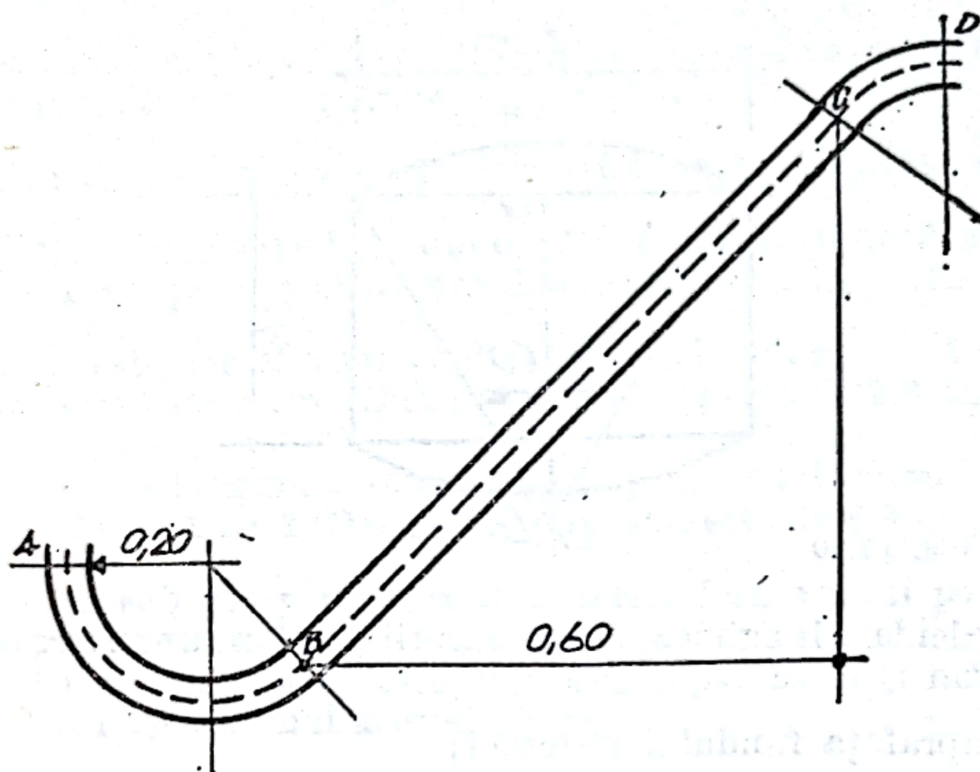


Fig. 11.21

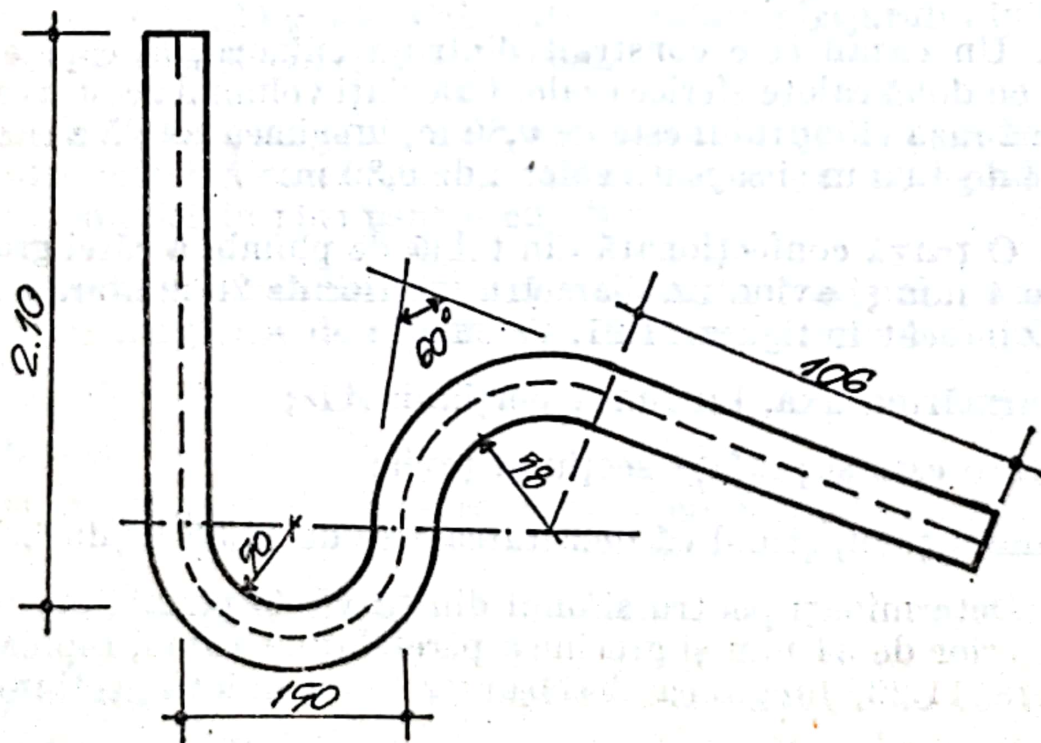


Fig. 11. 22

69. Un colet avînd forma unui paralelipiped dreptunghic se leagă cu sfoară. Lungimea coletului este de 60 cm, lățimea reprezintă 7/12 din lungime și înălțimea 4/5 din lățime. Calculați lungimea sforii, știind că pentru noduri se folosesc 11 cm de sfoară în plus.

70. Într-o cutie a cărei bază este un dreptunghi ce măsoară în interior 7,2 cm lungime și 5,8 cm lățime, trebuiesc aranjată cuburi a căror latură este de 14 mm.

a) Cîte cuburi se pot aranja în primul rînd al cutiei;

b) Care este înălțimea pe care trebuie să o aibă cutia pentru ca ea să conțină 60 cuburi cu latura de 14 mm?

c) Care este volumul interior al cutiei știind că grosimea cartonului din care este confecționată este de 2 mm?

d) Care este înălțimea interioară a unei cutii de același volum, avînd baza de 116 mm lungime și 44 mm lățime?

71. Calculați masa unei bile din oțel de diametru *a* mm (densitatea oțelului este de 7,8 kg/dm ^{3}).

72. Un recipient semisferic, avînd 10 cm în diametru, este umplut cu apă. Conținutul se varsă într-un alt recipient conic de 10 cm în diametru. Care este înălțimea minimă a acestui recipient pentru ca el să conțină tot lichidul?

73. O bielă este confecționată din fontă și grosimea ei este de 15 mm. Calculați masa unității bielei știind că densitatea fontei $\rho = 7,8$ kg/dm^3 (figura 11.23).

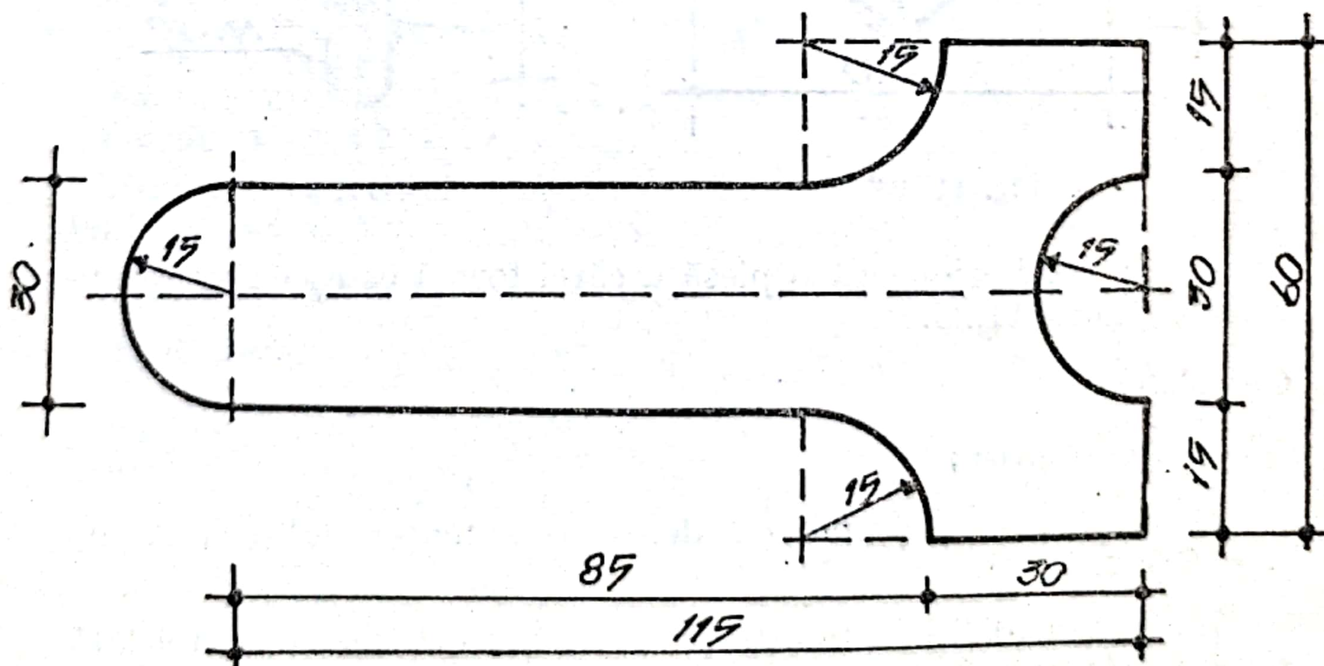


Fig. 11. 23

18—c. 1782

74. Geamandura indicată în figura 11.24 este formată din 2 conuri, unite prin bază (dimensiunile date în mm).

a) Care este suprafaţa de tablă întrebuinţată?

b) Care este volumul acestei geamanduri?

c) Care este cantitatea de cositor necesar pentru lipirea acestei geamanduri, ştiind că pentru 1 m liniar de lipitură sînt necesare 80 gr de cositor şi că geamandura este lipită pe diametrul AB şi generatoarele CD şi BD?

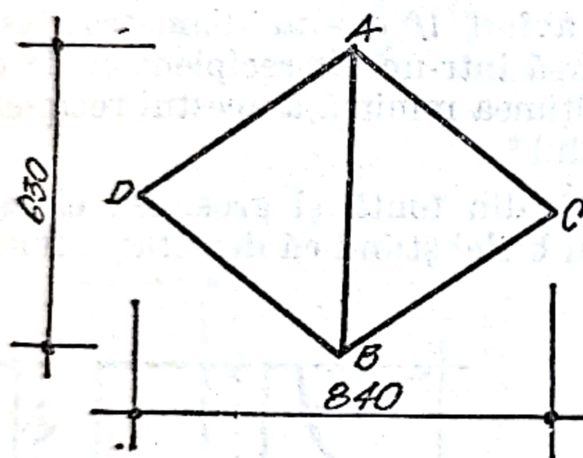


Fig. 11. 24

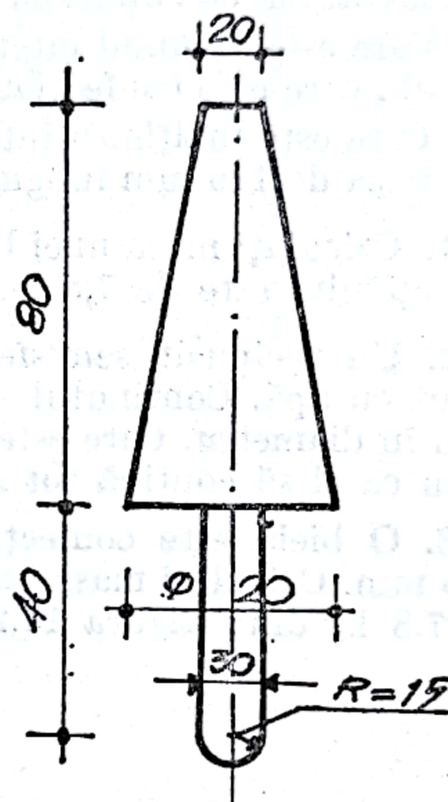


Fig. 11. 25

75. Se confecţionează o piesă a cărei formă este cea reprezentată în figura 11.25.

Calculaţi:

a) Conicitatea;

b) masa piesei, ştiind că densitatea materialului este de $\rho = 7{,}8$ kg/dm ^{3}.

76. Roata unei căruţe este protejată cu o bandă din oţel lată de 8 cm şi groasă de 1 cm. Care este masa protecţiei, ştiind că diametrul roţii este de 1 m şi densitatea oţelului este de7, 8 kg/dm ^{3}.

77. Un puţ cilindric, avînd în diametru 2 m şi o adîncime de 12 m este căptuşit cu o zidărie groasă de 0,25 m.

Care este volumul pămîntului săpat şi volumul zidăriei ;

78. O cisternă cilindrică al cărei diametru este de 1,5 m se umple cu 8000 l apă pînă la înălţimea de 1/5. Care este înălţimea cisternei ?

79. Un rezervor paralelipipedic realizat din beton armat are lungimea interioară de 2 m, lăţimea de 1,6 m, înălţimea de 1,5 m şi grosimea pereţilor de 0,10 m. Calculaţi volumul zidăriei din beton a rezervorului.

80. Se propune fixarea cu parchet din stejar într-o încăpere de 7,8 m lungime şi 7 m lăţime şi finisarea cu parchet din fag într-o încăpere de 6,5 m lungime şi 4,6 m lăţime. Calculaţi masa totală a parchetului necesar ştiind că parchetul din stejar are o grosime de 10 mm şi cîntăreşte 900 kg/m^3 iar parchetul din fag are grosimea de 15 mm şi cîntăreşte 660 kg/m^3.

81. Pentru confecţionarea cîtorva piese de tîmplărie sînt necesare : 8 scînduri de 4 m lungime, 27 mm grosime şi 0,15 m lăţime şi 7 scînduri de 3 m lungime, 4 cm grosime şi 0,4 m lăţime. Calculaţi cubajul total şi suprafaţa totală a acestor scînduri.

82. O masă de lucru este compusă dintr-un blat de 50 $\times$35 cm şi de 22 mm grosime, din 4 picioare avînd secţiunea patrată de 4 $\times$ 4 cm şi 65 cm lungime şi 4 traverse de 9 cm lăţime. Picioarele şi traversele susţin blatul. Calculaţi suprafaţa de lăcuit. Calculaţi preţul lăcuirii acestei mese, ştiind că 1 m^2 costă 10,80 lei.

83. Secţiunile buloanelor sînt calculate astfel ca ele să suporte eforturile la care sînt solicitate.

Ştiind că un bulon în diametru de 15 mm suportă un efort de 1000 kg, calculaţi :

a) efortul pe care îl suportă un bulon de 30 mm în diametru ;

b) diametrul unui bulon care suportă un efort de 2000 kg

84. O grindă din nuc de 2,5 m lungime şi o secţiune patrată a cărei latură este de 0,40 m se desface în foi de furnir de 1 mm grosime. Calculaţi suprafaţa de furnir obţinută din acest bloc, ştiind că 1/20 din total sînt pierderi tehnologice prin tăierea cu fierăstrăul precum şi rebuturile rezultate din noduri.

85. Care este timpul necesar pentru găurirea unui orificiu care are în diametru 25 mm şi 300 mm în adîncime, ştiind că viteza

de aşchiere este de 10 m pe minut şi că avansul pentru gaură în profunzime este de 0,6 mm.

86. Dimensiunile unei statui, reprezentînd un om în picioare se notează în proporţiile următoare, unitatea măsurii fiind lungimea capului (vîrful capului şi mijlocul bărbiei). Vom nota : lungimea capului $= t$; lungimea piciorului $= 4t$; lungimea braţului $= 3t$; înălţimea gleznei $= \frac{3}{t}$; înălţimea trunchiului $= 3t$.

Se ştie că, dacă se ţine seama de înălţimea piciorului, mijlocul înălţimii totale se situează la nivelul şoldurilor. În aceste condiţii, care este numărul de capete (t) conţinute :

a) de la cap la talpă ;

b) înălţimea totală a piciorului.

Pentru $t = 24$ cm, calculaţi :

a) înălţimea gambei ;

b) înălţimea braţului ;

c) înălţimea totală.

87. Vom executa pe o coală de hîrtie, a cărei lungime este de 594 mm şi 297 mm lăţime, un desen. Care este înălţimea desenului, dacă vom avea o margine egală cu 47 mm în jurul colii de desen.

88. Desenul din figura 11.26 reprezintă un bolţ.

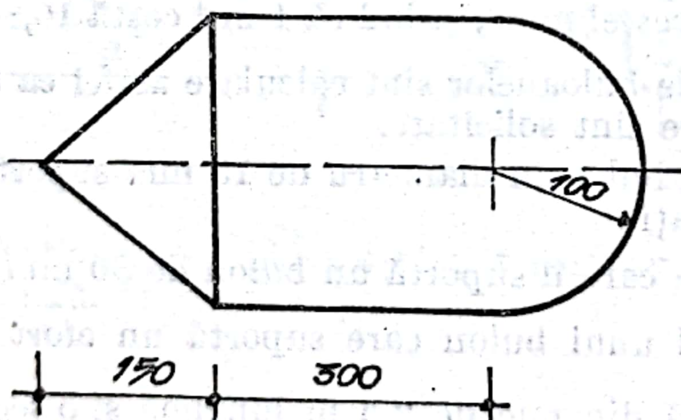


Fig. 11.26

Calculaţi :

a) suprafaţa şi volumul semisferei bolţului ;

b) suprafaţa laterală şi volumul părţii cilindrice ;

c) suprafaţa laterală şi volumul părţii conice ;

d) suprafaţa exterioară şi volumul acestui bolţ.

89. Un flotor este compus dintr-un cilindru cu diametru egal cu 30 cm și lungimea 200 cm, terminat cu două zone sferice cu raza $r = 17$ cm și înălțimea 6 cm (fig. 11.27). Calculați suprafața de tablă care a fost necesară confecționării lui.

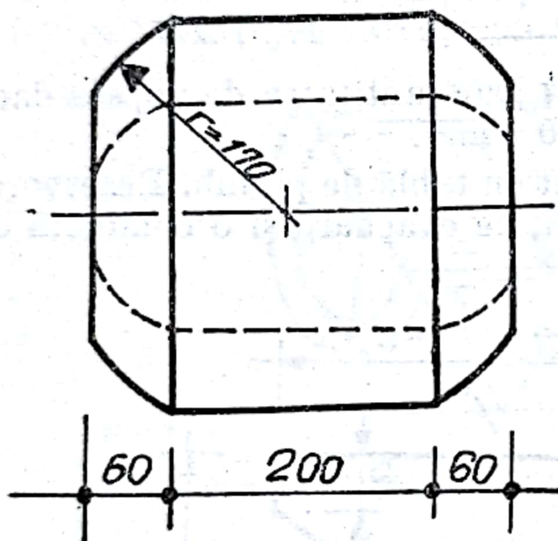


Fig. 11.27

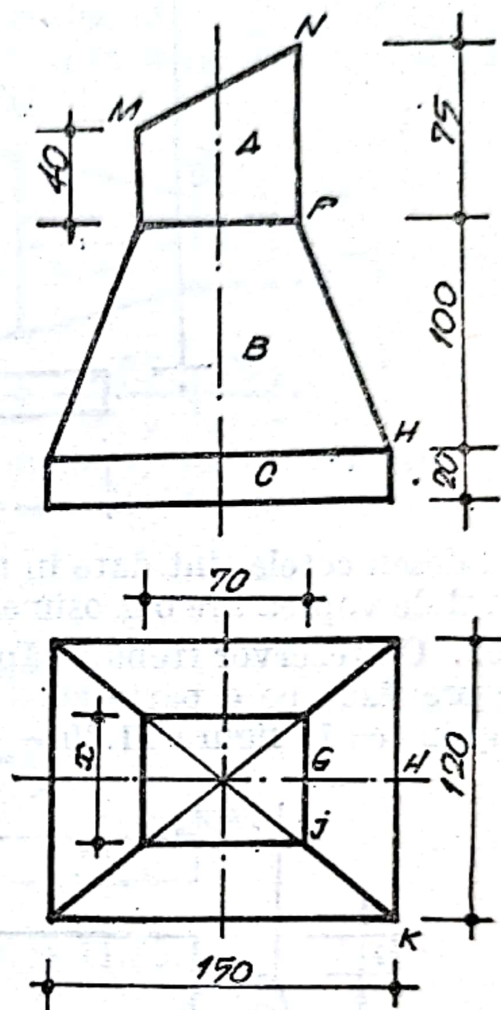


Fig. 11 28.

90. Fie dat colectorul de ventilare reprezentat în figura 11.28.

Calculați:

a) MN în %;

b) înălțimea GH a feței laterale B;

c) latura x;

d) lungimea liniei de sudură JK;

e) aria totală a conductei superioare.

91. Un profil laminat a cărui secțiune este reprezentată în figura 11.29 are o lungime de 6 m. Care este suprafața ce trebuie vopsită cu miniu de plumb pentru al proteja de oxizi, știind

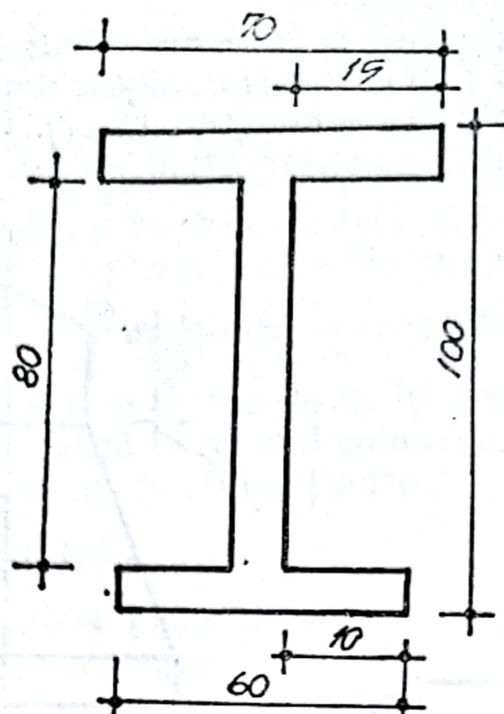


Fig. 11.29

că în desen cotele sînt date în mm? Dar cantitatea de vopsea dacă stratul de vopsea are o grosime de 0,1 mm.

92. Un rezervor trebuie căptuşit cu tablă de plumb. Rezervorul este prevăzut pe o parte cu o gură de evacuare şi o conductă de preaplin ca în figura 11.30.

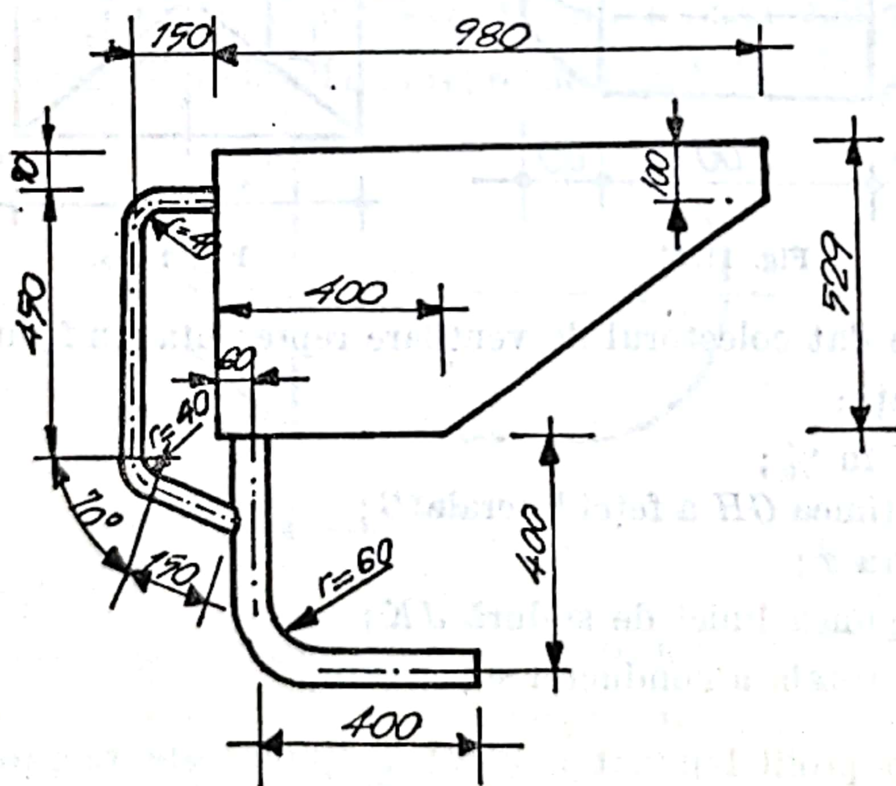


Fig. 11.30

Calculaţi :

a) suprafaţa plăcii de plumb necesară căptuşirii ;

b) lungimea ţevii de evacuare (realizată din ţeavă de plumb cu dimensiunile Ø 50 × 4) ;

c) lungimea conductei de preaplin realizată din plumb de Ø35 × 3.

93. Calculaţi masa piesei realizată din lemn din figura 11.31 ştiind că lemnul cîntăreşte 750 kg/m³.

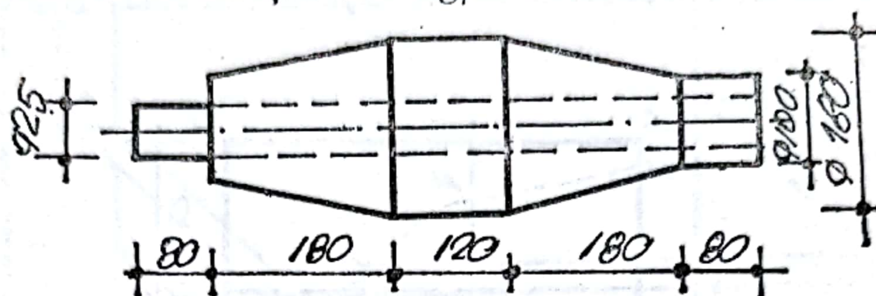


Fig. 11.31

94. Calculaţi masa jumătăţii de cuzinet, din bronz reprezentat în figura 11.32 (densitatea bronzului este de 8,9 kg/dm³).

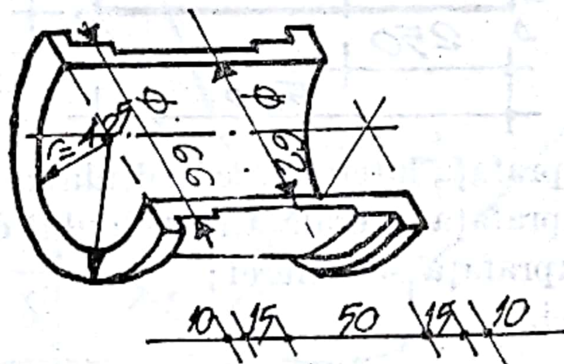


Fig. 11.32

95. Fie piesa reprezentată în figura 11.33.

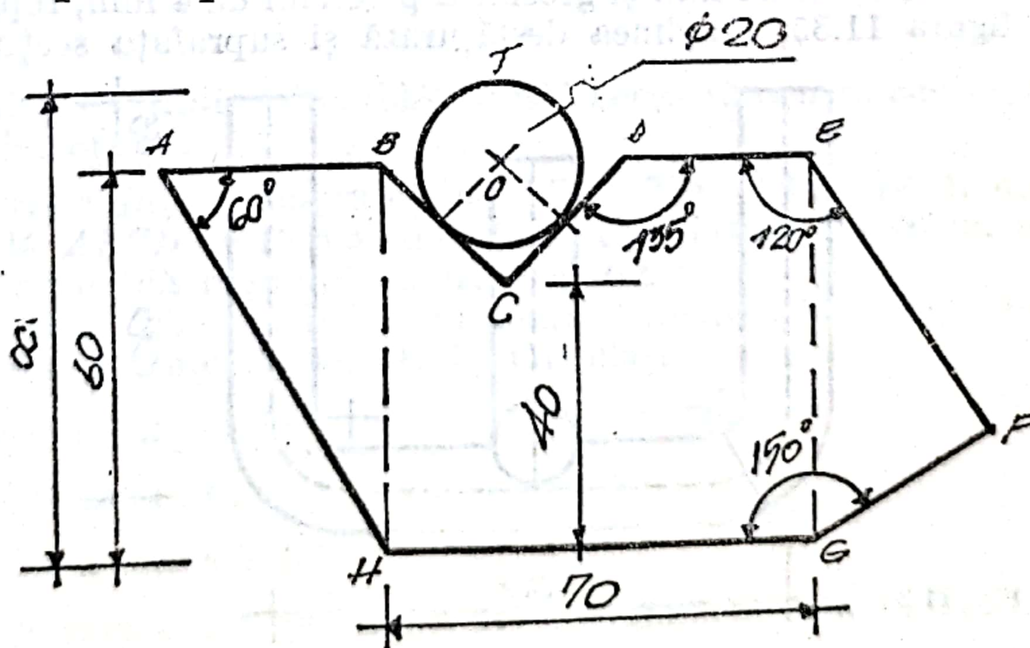


Fig. 11.33

1. Calculaţi cota x de verificarea tăieturii la 90 grade ;

2. Perimetrul piesei ;

3. Masa piesei ştiind că ea este din oţel cu densitatea de 7,8 kg/dm ^{3} şi are o grosime de 20 mm.

96. O piesă are forma unui corp născut din mişcarea de rotaţie a figurii geometrice $ABCDEFGHM$ în jurul axei AD (figura 11.34).

Calculaţi :

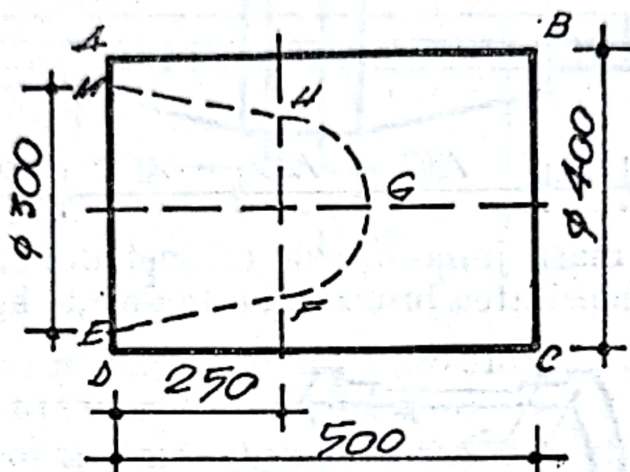


Fig. 11.34

a) volumul şi suprafaţa laterală a cilindrului ;
b) volumul şi suprafaţa laterală a trunchiului de con ;
c) volumul şi suprafaţa semisferei ;
d) volumul piesei.

97. Determinaţi pentru sifonul din ţeavă de plumb, cu diametrul exterior de 34 mm şi grosimea peretelui de 4 mm, reprezentat în figura 11.35, lungimea desfăşurată şi suprafaţa secţiunii lui.

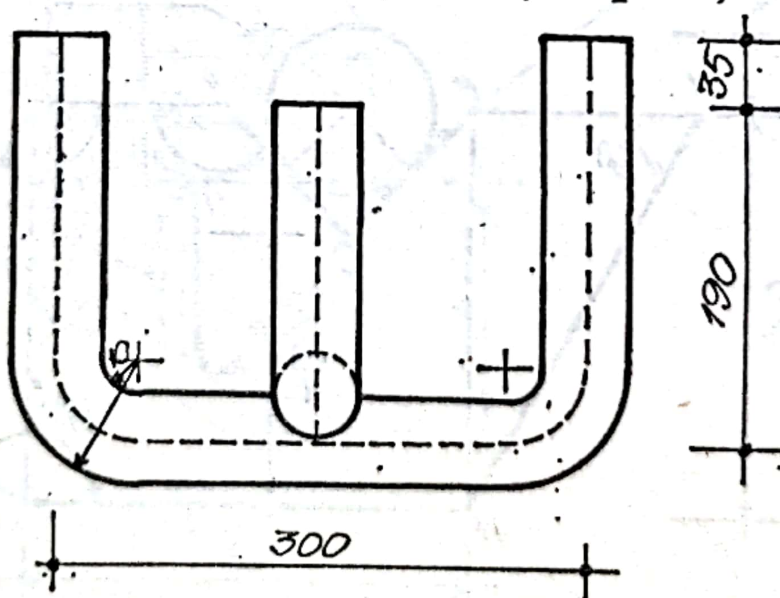


Fig. 11.35

98. Un colector pentru captarea apelor provenite din ploi, ce se montează pe streaşina unui acoperiş, este reprezentat în figura 11.36.

Fig. 11.36

Calculaţi cantitatea de tablă zincată necesară pentru confecţionarea colectorului.

99. Prin ştanţarea suprafeţelor *AEB*, *BFC*, *CLD*, *DGA*, dintr-o tablă *ABCD* de forma unui pătrat cu latura de 40 cm rezultă o piramidă regulată cu baza *EFGL*.
Vîrfurile bazei piramidei sînt mijloacele apotemelor patratului *EFLG*(baza piramidei) (fig. 11.37). Calculaţi :

a) perimetrul bazei ;

b) apotema *CM* ;

c) muchia laterală *CL*.

100. Figura 11.38 reprezintă un ancadrament al unei ferestre compus din 3 pietre *ABC*.

Distanţa dintre 2 feţe a fiecărei pietre este de 0,40 m. Determinaţi dimensiunile de bază ale blocului în formă de paralelipiped din care a fost tăiat ancadramentul.

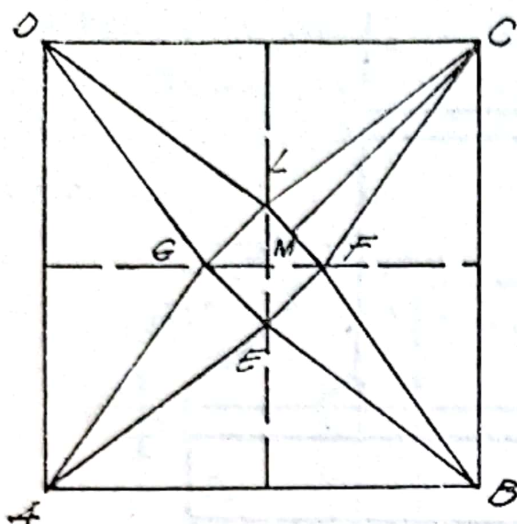


Fig. 11.37

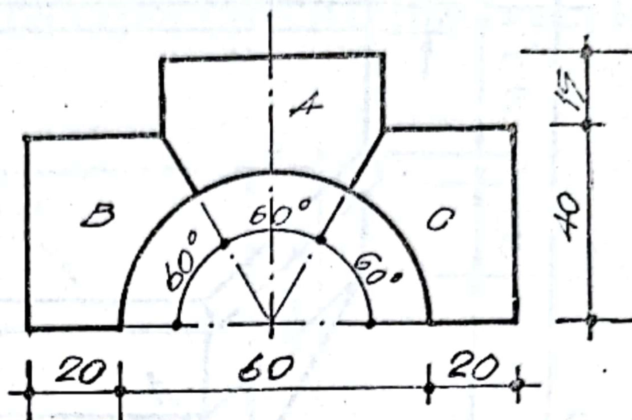


Fig. 11.38

101. Fie dată o roabă metalică reprezentată în figura 11.39.

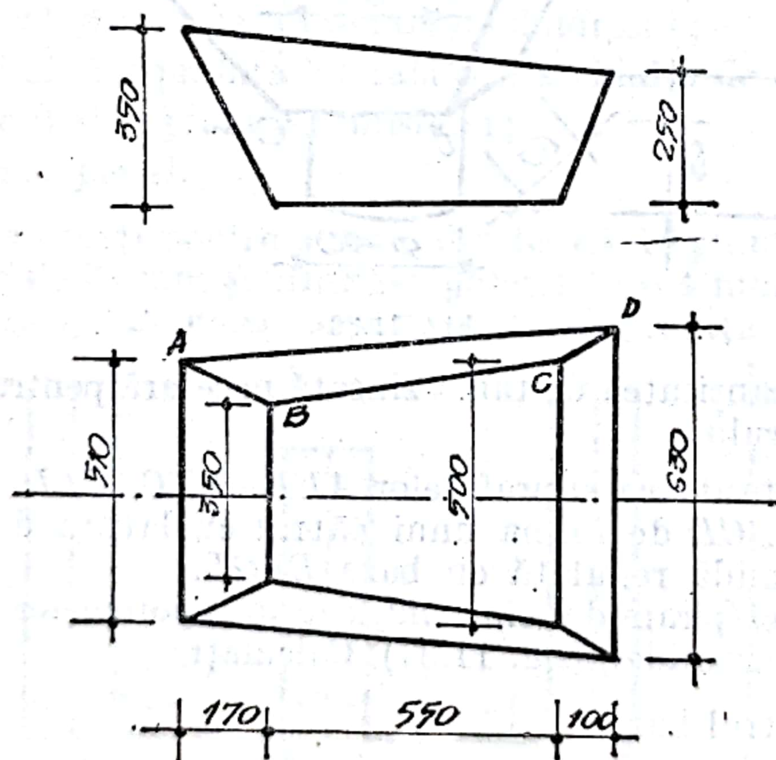


Fig. 11.39

Calculaţi:

a) suprafaţa fundului roabei;

b) panta tăbliilor din faţă şi spate în raport cu planul orizontal;

c) lungimea muchiilor laterale sudate (*AB* şi *CD*);

d) perimetrul roabei măsurat pe marginea superioară a tablei.

102. Pentru verificarea cozii de rîndunică a piesei reprezentată în figura 11.40, se utilizează 2 valţuri cu diametrul de 12 mm.

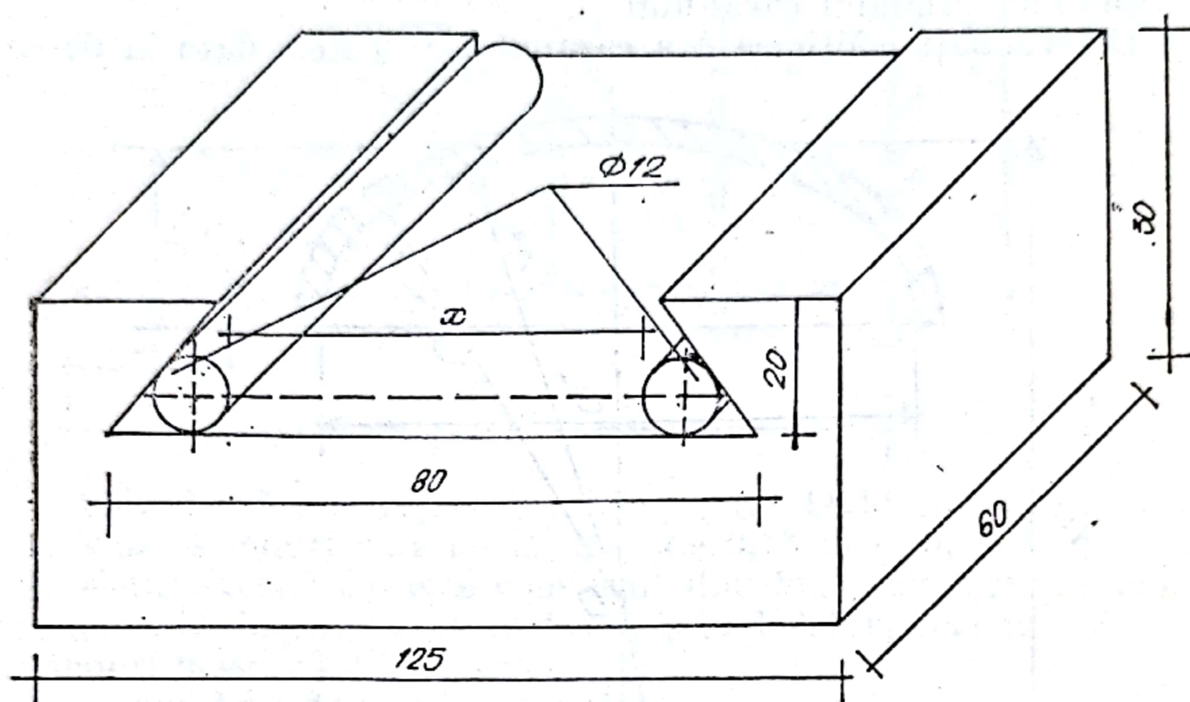


Fig. 11.40

a) care este la 1/100 cota lui *x*;

b) greutatea specifică a metalului fiind de 7,9 gr/cm³, calculaţi masa piesei.

103. Secţiunea într-un canal are forma unui trapez, ale cărui laturi neparalelele sînt egale şi baza mică $a = 2$m. Pereţii laterali ai canalului au o înclinaţie $\alpha = 30°$, faţă de verticală (figura 11.41).

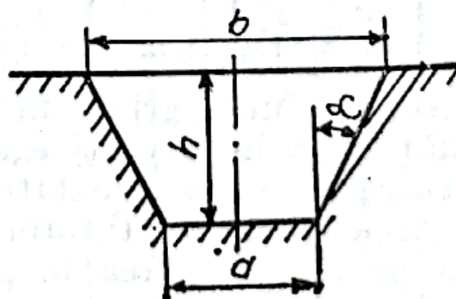


Fig. 11.41

Determinaţi adîncimea canalului, dacă pentru viteza apei care curge prin canal este necesară o secţiune de $A = 4{,}5$ m².

104. Pentru calculul adîncimii fundurilor curbate la cazane cu aburi, cea mai importantă mărime este înălţimea h_1 a fundului cazanului (fig. 11.42). După normele de calcul pentru elementele unui cazan cu aburi de rezistenţă h_1, trebuie să verifice relaţia $h_1 < 0,2\ d$, unde d este diametrul fundului cazanului. Să notăm cu r şi R razele celor două emisfere din care fac parte cele două porţiuni ale fundului cazanului.

Determinaţi înălţimea h a cazanului cu cotele date în desen.

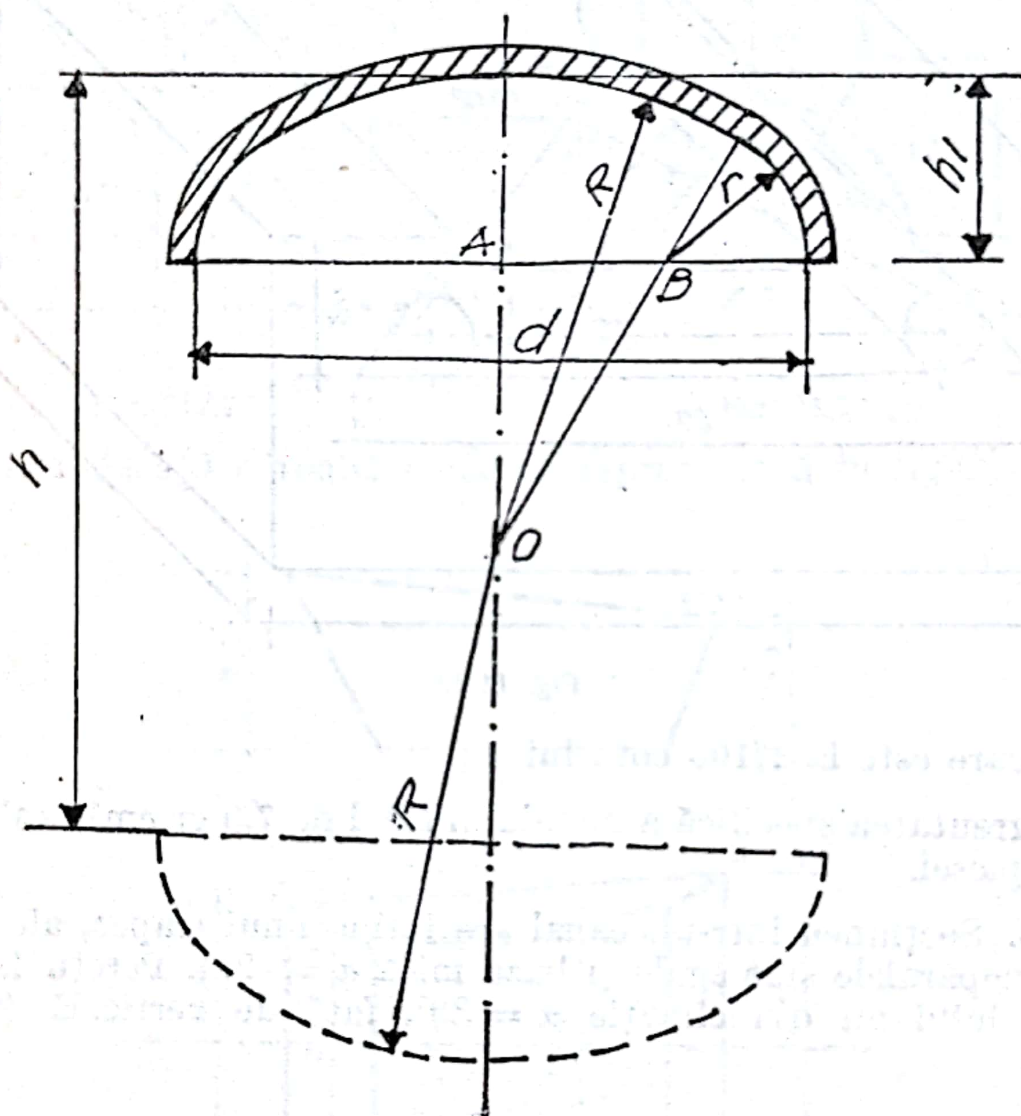


Fig. 11.42

105. Pentru proiectarea unei grinzi în consolă (fig. 11.43), lungimea l a fost împărţită în n părţi egale, construind astfel $(n - 1)$ traverse. Pentru a stabili greutatea grinzii proiectantul trebuie să cunoască suma lungimilor tuturor elementelor.

Găsiţi o formulă pentru stabilirea lungimii traverselor dacă lungimea BC este egală cu h.

Cu ajutorul formulei stabiliţi lungimea totală a traverselor dacă $h = 1$ m şi $n = 5$.

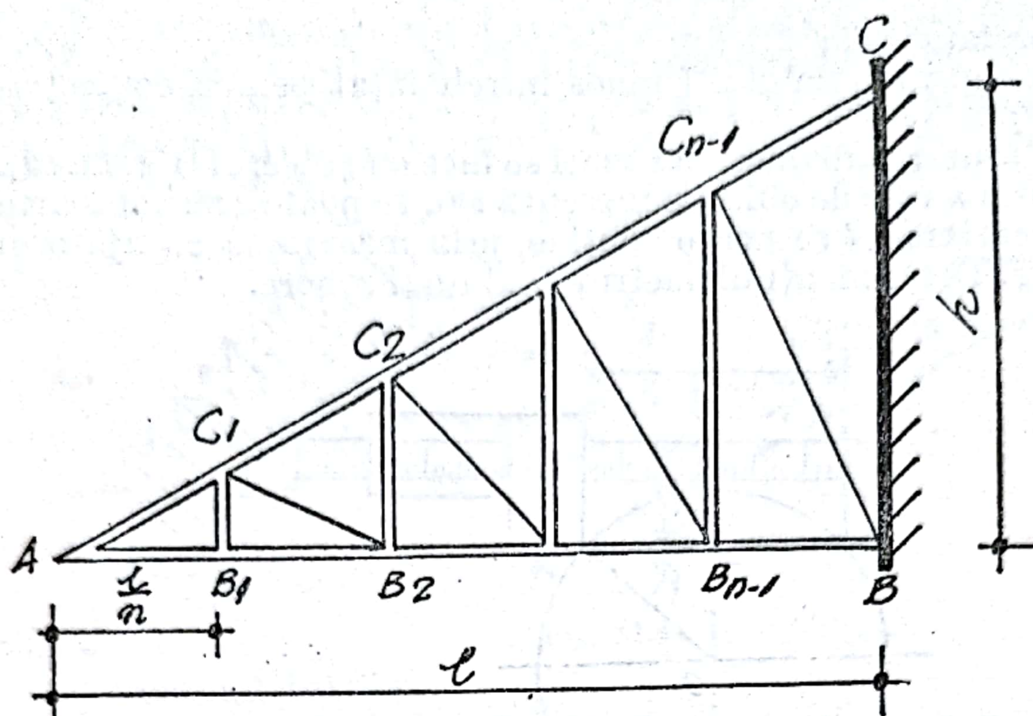


Fig. 11.43

106. O ușă este reprezentată în figura 11.44 și este confecționată din scînduri care au lățimea de 0,15 m și 0,18 m grosime. Scheletul acestei uși este constituit din două scînduri paralele și încă una în diagonală prinsă de ele. Știind că lungimea unei singure scînduri măsoară 2,5 m, calculați :

a) numărul de scînduri folosite ;

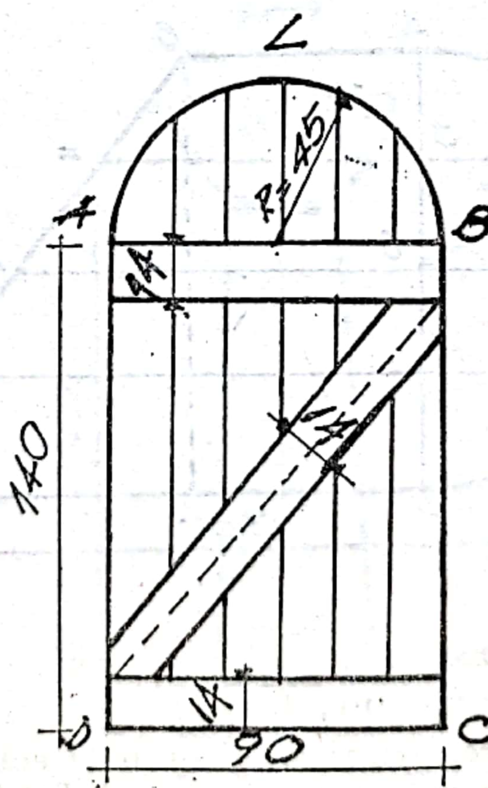


Fig. 11.44

b) suprafaţa uşii;

c) volumul materialului lemnos întrebuinţat pentru confecţionarea uşii;

107. Măsurarea diametrelor mari se face cu şublerul (fig. 11.45). Dimensiunea h este de obicei cunoscută sau se poate măsura foarte uşor. Dimensiunea l se poate obţine prin măsurarea cu ajutorul unui şubler. Determinaţi diametrul D al unui arbore.

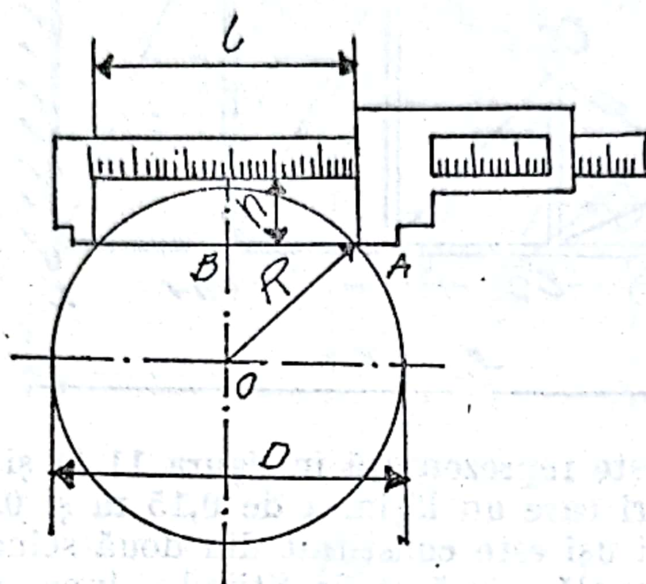


Fig. 11.45

108. Un planşeu are forma indicată în figura 11.46.

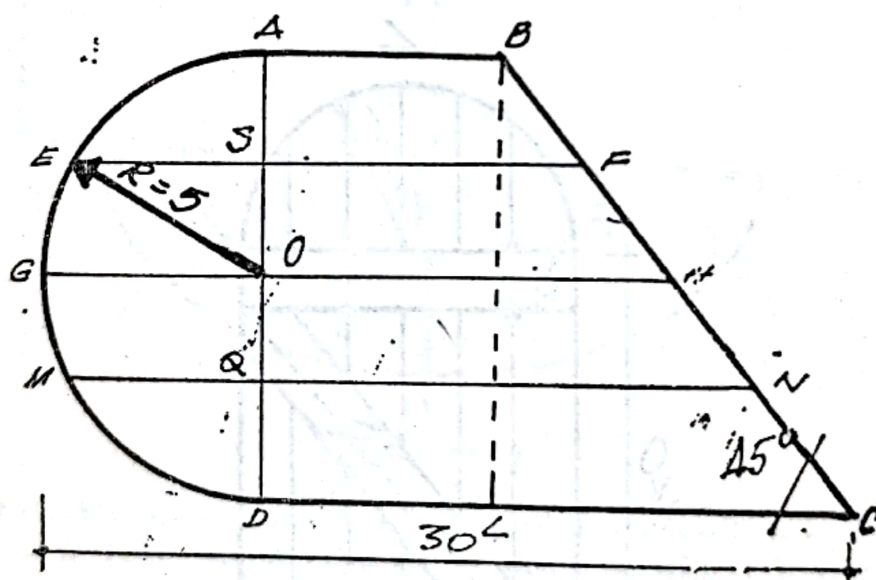


Fig. 11.46

Calculaţi:

a) suprafaţa planşeului;

b) perimetrul planşeului;

c) lungimile a trei grinzi longitudinale echidistante duse prin punctele F, H şi N care împart segmentul BC în patru părţi egale.

109. O rampă de scară din beton armat a cărei lungime este de 1 m, este constituită din nouă trepte, cu dimensiunile treptei și contratreptei de 0,30 × 0,15 m așezate pe un vang a cărui grosime este de 0,18 m (figura 11.47).

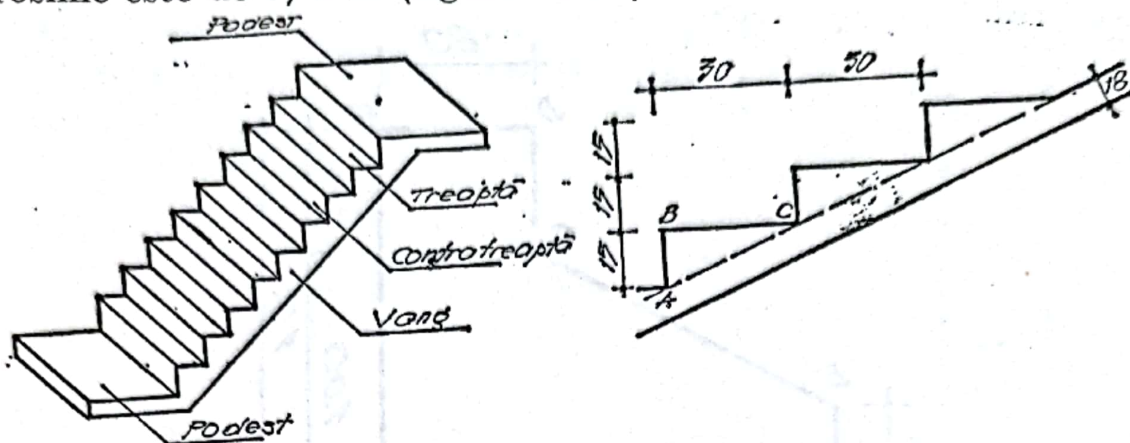


Fig. 11.47

Calculați:

a) volumul scării;

b) masa armăturii din oțel știind că vangul este armat în sensul lungimii cu fier beton de 10 mm, așezat la distanța de 10 cm și în sensul lățimii cu fier beton de 6 mm, distanțele de 10 cm, formînd astfel o rețea și că densitatea oțelului este de 7,8 kg/dm³.

110. Calculați masa unei bucăți dintr-un pilastru, reprezentată în figura 11.48. Densitatea pietrei folosite este de 1,8 kg/dm³.

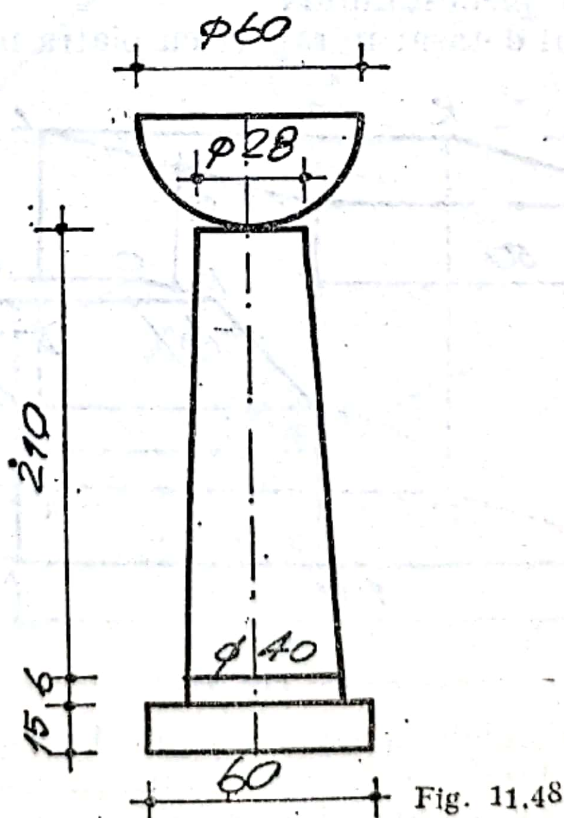


Fig. 11.48

111. Un zid din beton armat are o lungime de 30 m. Secţiunea transversală *P* prin zid este reprezentată în figura 11.49. Calculaţi volumul zidului.

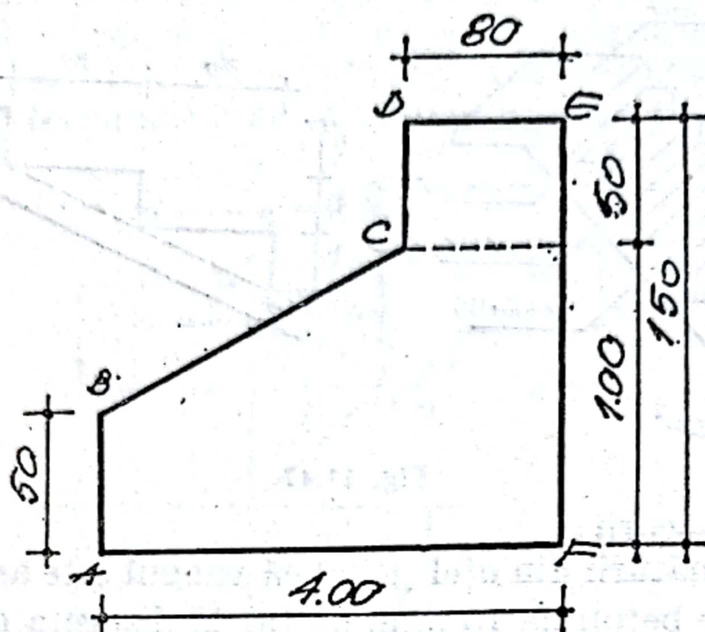


Fig. 11.49

112. Un piedestal din piatră are forma din figura 11.50. Calculaţi:

a) volumul pietrei netăiate;
b) volumul piedestalului;
c) procentul detaşat în raport cu piatra netăiată.

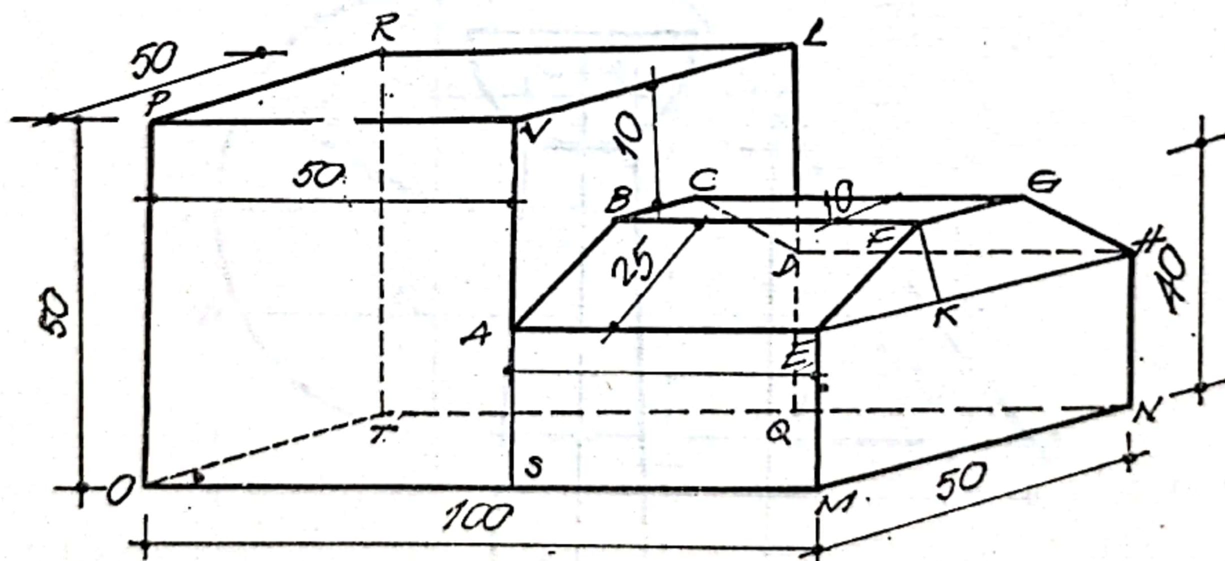


Fig. 11.50

113. Un tinichigiu a confecţionat dintr-o foaie de tablă din cupru o placă după următoarele indicaţii: pe cele două laturi ale unui dreptunghi se descriu două semicercuri ale căror diametre sînt

egale cu lățimea dreptunghiului. Figura astfel obținută are suprafața de 249 cm² și depășește cu 132 cm² pe cea a dreptunghiului. Determinați pe figura 11.51 :

a) lungimea coardei *AE*;
b) suprafața segmentului circular *AFE*;
c) lungimea și lățimea dreptunghiului.

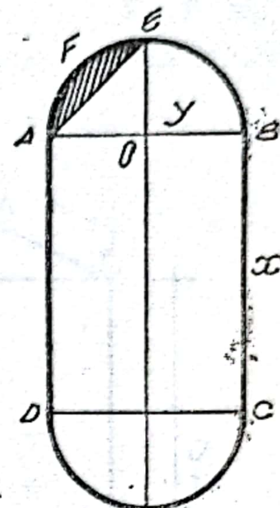


Fig. 11.51

114. Calculați volumul și masa piesei din fontă reprezentată în figura 11.52 știind că densitatea fontei este de 7,4 kg/dm ³.

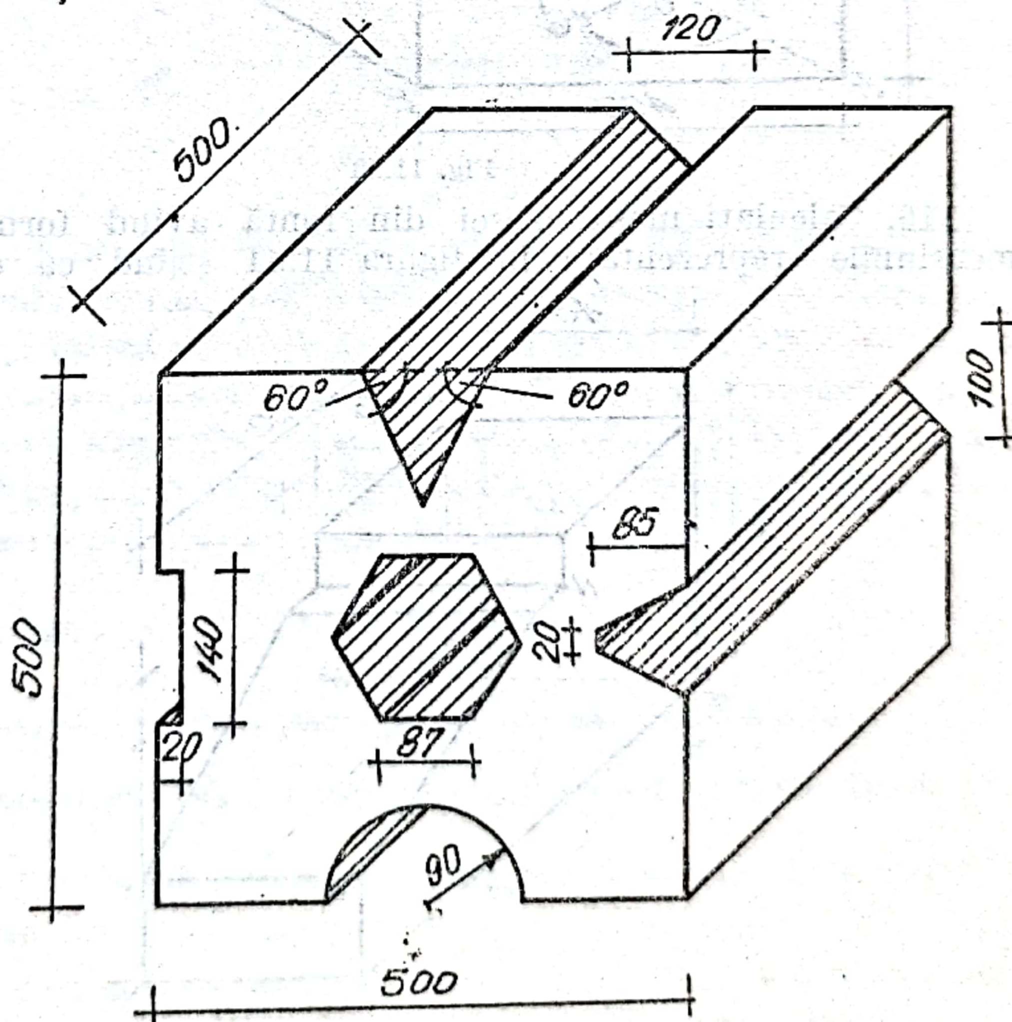


Fig. 11.52

19—c. 1782

115. Calculaţi masa piesei din oţel reprezentată în figura 11.53 ştiind că densitatea oţelului este de 7,8 kg/dm ^{3}.

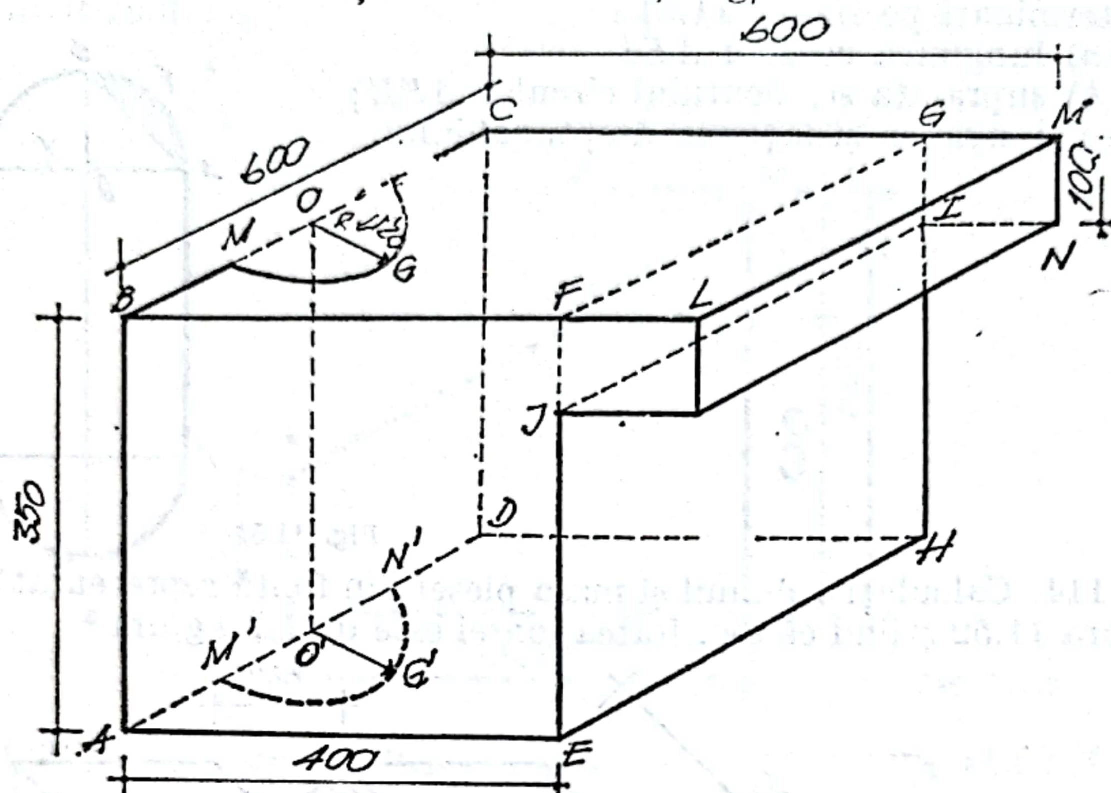


Fig. 11.53

116. Calculaţi masa piesei din fontă avînd forma şi dimensiunile reprezentate în figura 11.54 ştiind că densitatea

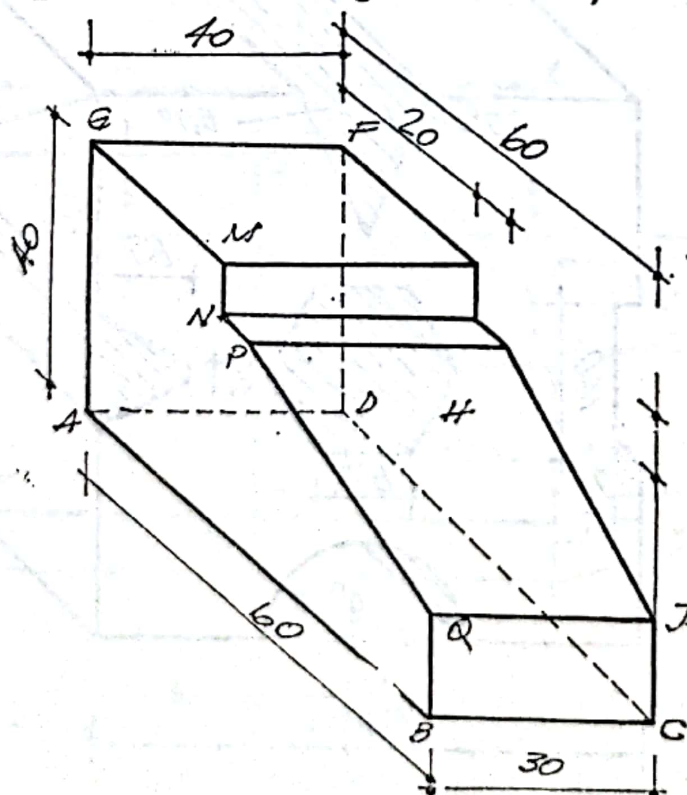


Fig. 11.54

fontei este 7,2 kg/dm [3]. Găsiţi cîte piese din acelaşi fel se pot fixa într-un vagon a cărei încărcătură maximă este de 10 360 kg.

117. Un forjor vrea să amplaseze o tablă la coşul forjei. Diferitele panouri aplicate pe construcţie au formele indicate în figura 11.55, avînd în totalitate patru panouri.

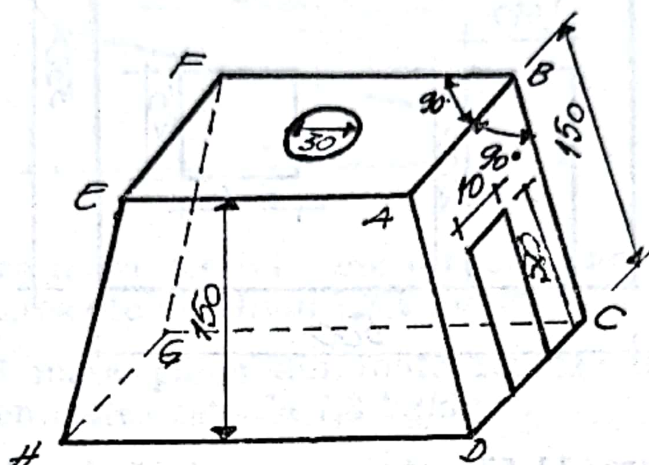


Fig. 11.55

Panoul superior este prevăzut cu o deschizătură de 0,30 m în diametru. Un alt panou lateral este prevăzut cu o deschizătură dreptunghiulară de 0,10 × 0,50 m. Figurile $ABFE$ şi $CDHG$ sînt dreptunghiuri iar figurile $ABCD$ şi $EFGH$ sînt trapeze egale. Se dau cîteva elemente: $AB = 1$ m; $CD = 1{,}5$ m; $AE = 2$ m; $DH = 3$ m; unghiurile ABC şi EFG sînt drepte. Panourile trapezoidale au o înălţime de 1,5 m.

Calculaţi:

a) suprafaţa tablei pe care trebuie să o aibă forjorul;

b) densitatea piesei confecţioante ştiind că tabla cîntăreşte 24 kg.

118. Un vopsitor are de vopsit faţada unei case, care are forma din figura 11.56.

Calculaţi cantitatea de vopsea care-i este necesară cunoscînd că pentru un metru pătrat sînt necesare 45 gr de vopsea.

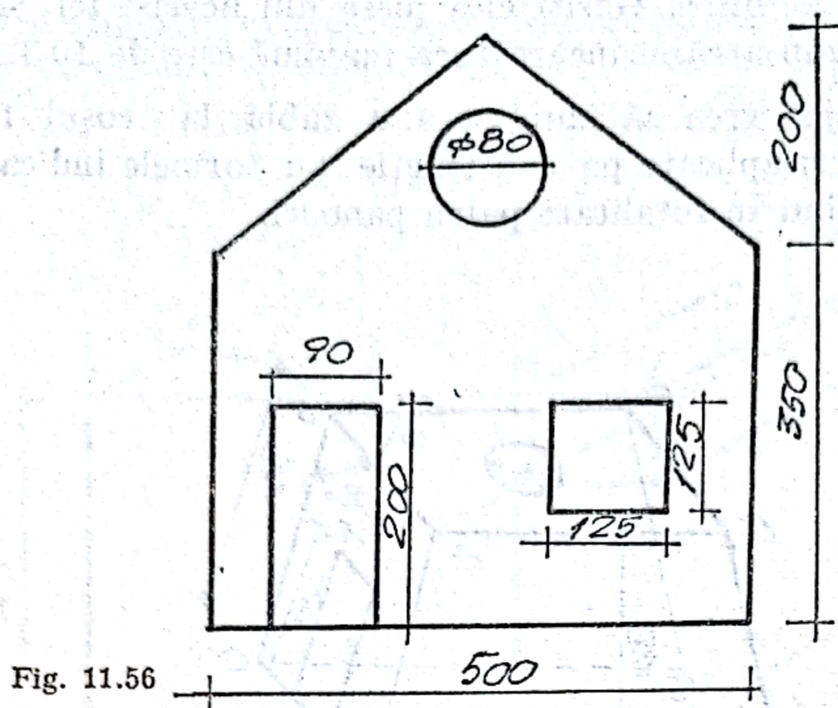


Fig. 11.56

119. În figura 11.57 este reprezentată fațada unei clădiri.

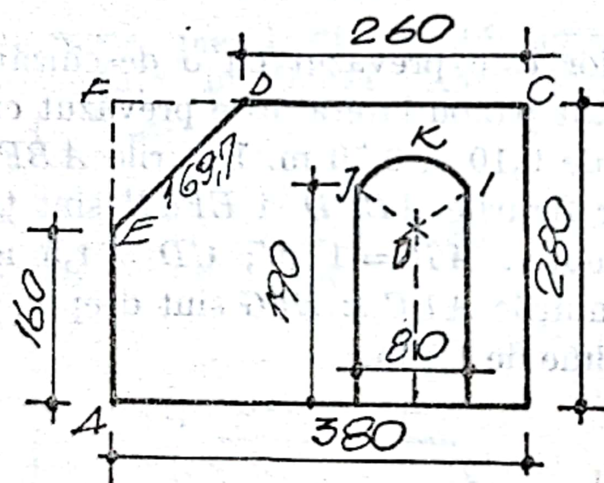


Fig. 11.57

Calculați:

a) *FD* și *FE* și verificați dacă latura *ED* este exactă;

b) raza arcului *KI*, suprafața sectorului *JKI* și suprafața ușii;

c) care este suprafața totală a acestei fațade.

120. Secţiunea transversală a unei piese de locomotivă Diesel hidraulică are forma din figura 11.58.

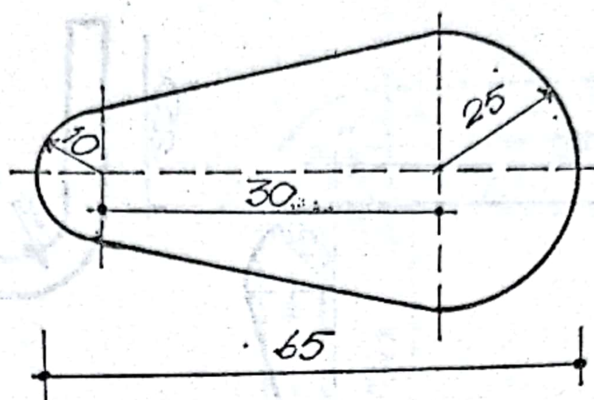


Fig. 11.58

Să se calculeze masa acestei piese din oţel care are grosimea de 20 mm, densitatea oţelului fiind 7,8 kg/dm³.

121. Calculaţi masa piesei din fontă reprezentată în figura 11.59 ştiind că densitatea este de 7,3 kg/dm³ .

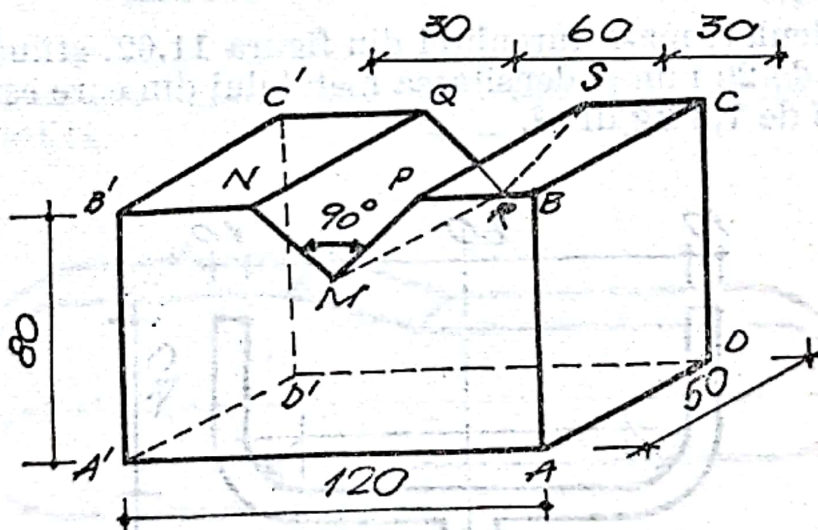


Fig. 11.59

122. O intreprindere de construcţii are de executat la o grădiniţă de copii montarea parchetului într-o sală de clasă, avînd forma şi dimensiunile indicate în figura 11.60.

Calculaţi suprafaţa de parchet necesară şi lungimea pervazului, ştiind că sînt existente două uşi de acces în sală, care au lăţimea de 90 cm.

Să se calculeze numărul de lamele de dimensiunile 300/40 mm pentru parchetarea sălii.

123. Calculați lungimea desfășurată și masa piesei din pulmb reprezentată în figura 11.61, știind că densitatea plumbului este, de 11,3 kg/dm ³.

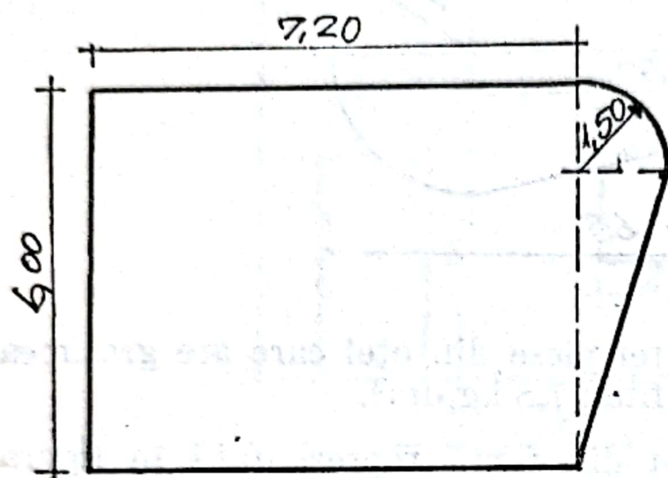


Fig. 11.60

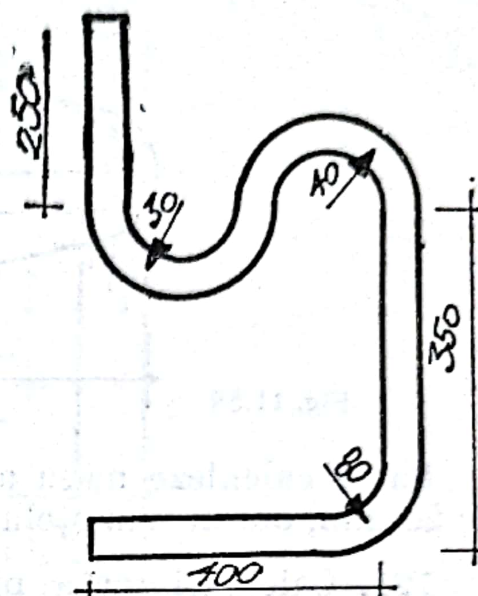


Fig. 11.61

124. Calculați masa furculiței din figura 11.62, știind că grosimea ei este de 20 mm și densitatea metalului din care este confecționată este de 7,8 kg/dm ³.

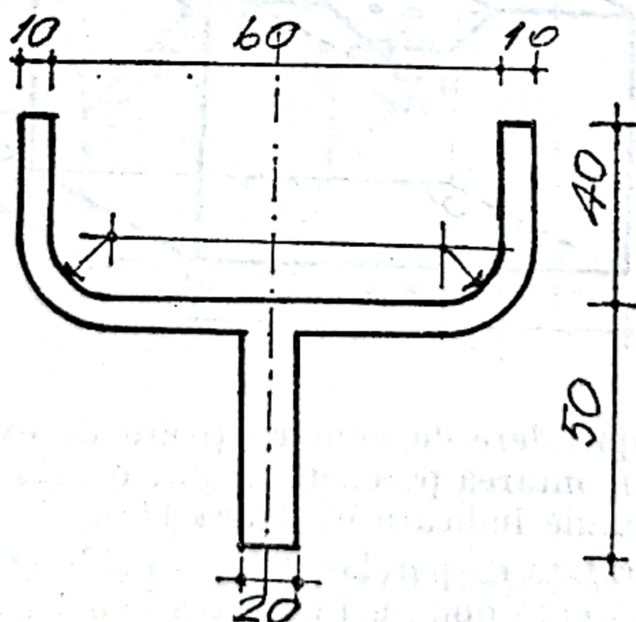


Fig. 11.62

125. Calculați lungimea desfășurată și volumul interior al țevii din oțel reprezentate în figura 11.63, știind că diametrul

exterior este de 35 mm şi cel interior de 30 mm iar densitatea oţelului este de 7,8 kg/dm ^{3}.

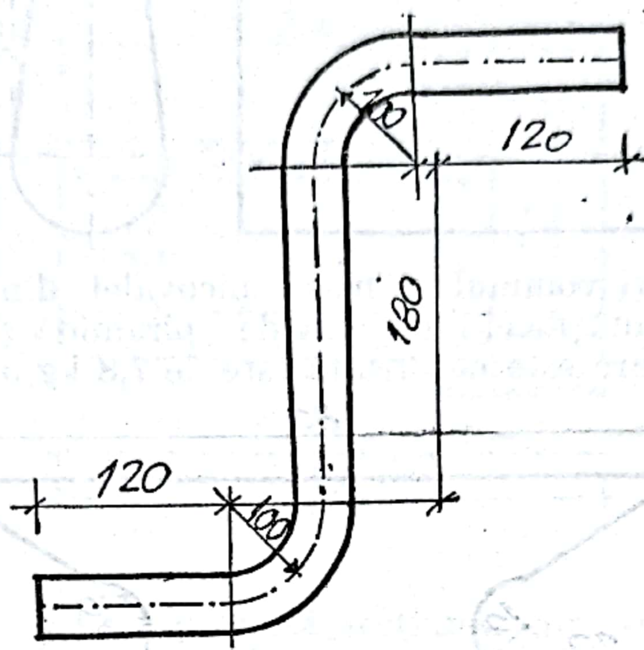


Fig. 11.63

126. Piesa din figura 11.64 este realizată prin forjare. Calculaţi volumul ei.

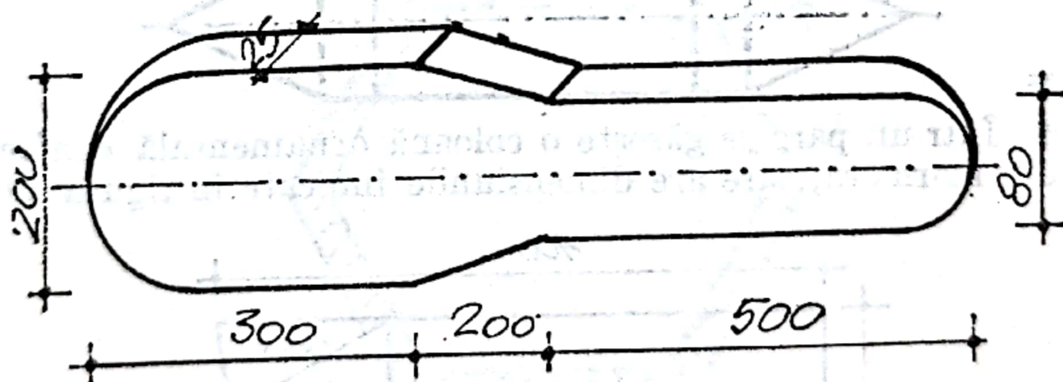


Fig. 11.64

127. Dintr-un bloc de piatră ale cărui dimensiuni sînt de 450 × 220 × 530 se realizează un alt bloc finisat cu dimensiunile din figura 11.65. Calculaţi volumul şi masa acestui bloc, ştiind că densitatea pietrei este de 2,5 kg/dm³.

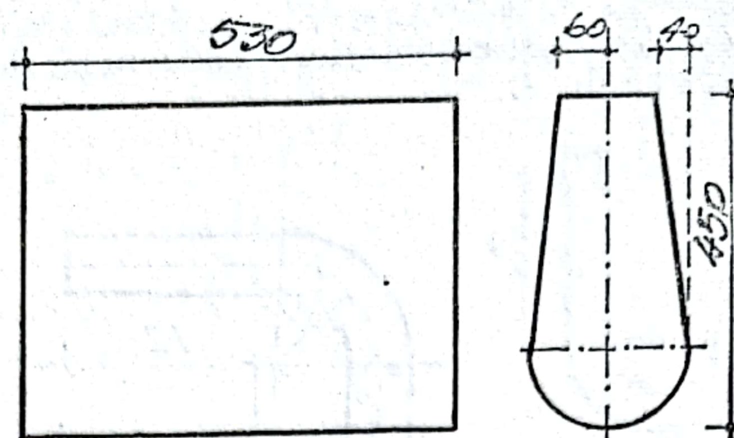


Fig. 11.65

128. Calculaţi volumul şi masa nicovalei din figura 11.66, ştiind că extremităţile ei au forma de piramidă şi că densitatea metalului din care este construită este de 7,8 kg/dm³.

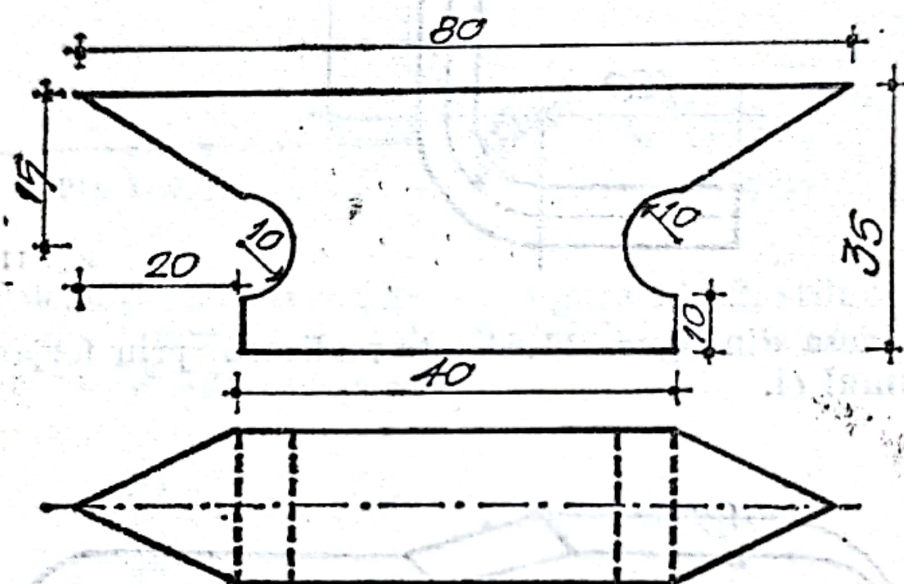


Fig. 1.66

129. Într-un parc se găseşte o coloană ornamentală confecţionată din marmoră, care are dimensiunile indicate în figura 11.67.

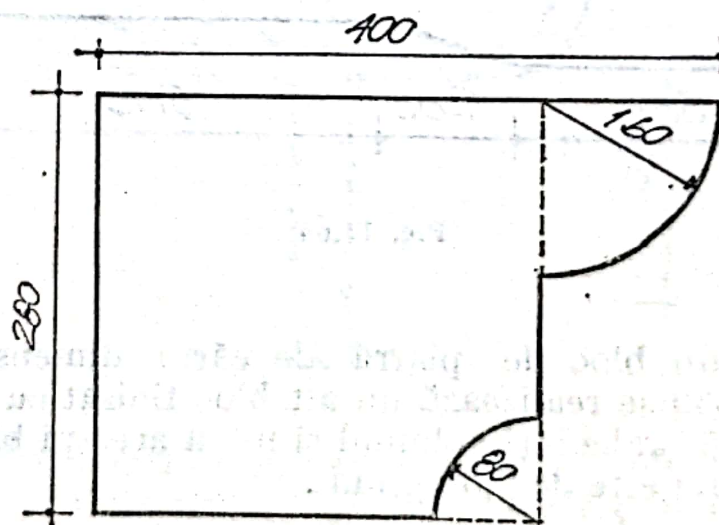


Fig. 11.67

Calculaţi volumul coloanei. ştiind că înălţimea ei este de 2,5m.

130. Calculaţi masa piesei din figura 11.68, ştiind că densitatea metalului este de 7,8 kg/dm ³, grosimea piesei este de 4,5 mm.

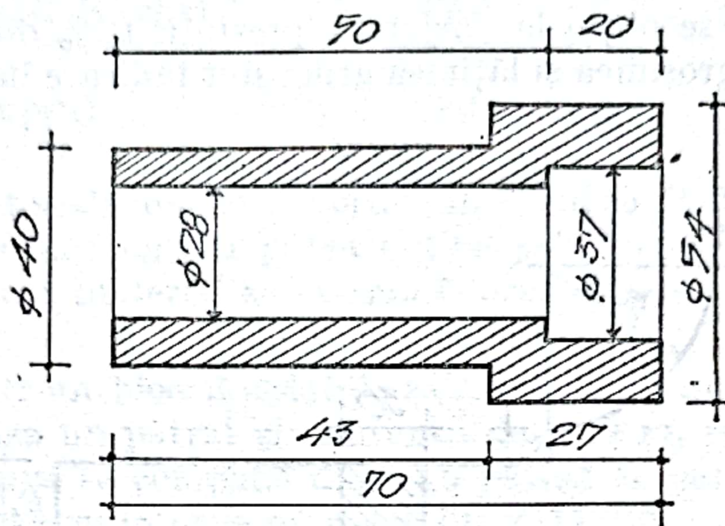


Fig. 11.68

131. Figura 11.69 reprezintă secţiunea dintr-un rezervor de forma unei piramide exagonale drepte, a cărei înălţime este de 6 m şi grosimea fundului rezervorului este de 60 mm.

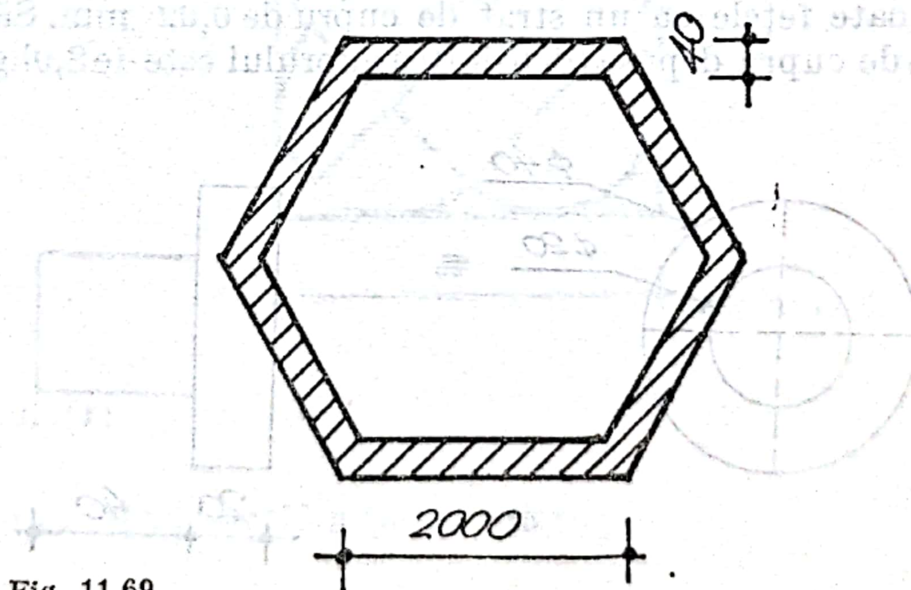


Fig. 11.69

a) Calculaţi dimensiunile interioare ale rezervorului şi capacitatea maximă a sa, exprimată în hl;

b) calculați cantitatea de material din care se confecționează rezervorul.

132. Calculați masa porțiunii dintr-o grilă reprezentată în figura 11.70, avînd, cotele date în mm iar densitatea metalului din care este confecționată este de 7,8 kg/dm³. Pierderile tehnologice ce se obțin la forjare reprezintă 17% din greutatea piesei finite. (grosimea și lățimea grilei sînt indicate în secțiune).

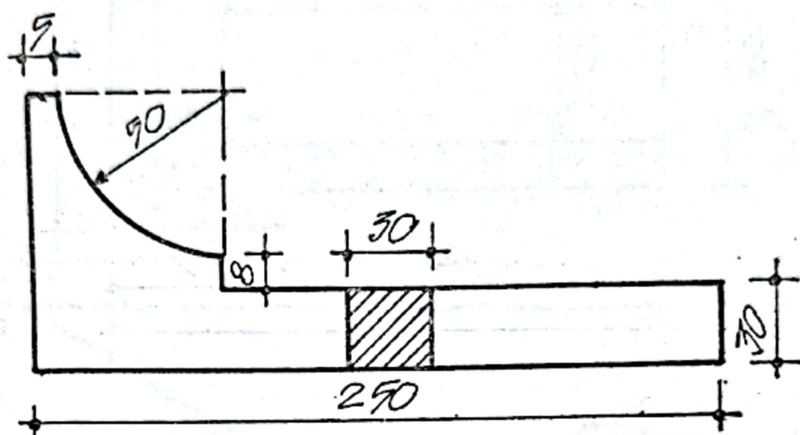


Fig. 11.70

133. Calculați masa piesei din fontă, reprezentată în figura 11.71, știind că densitatea fontei este 7,3 kg/dm³. Se acoperă piesa pe toate fețele cu un strat de cupru de 0,02 mm. Să se afle cantitatea de cupru depusă (densitatea cuprului este de 8,9kg/dm³).

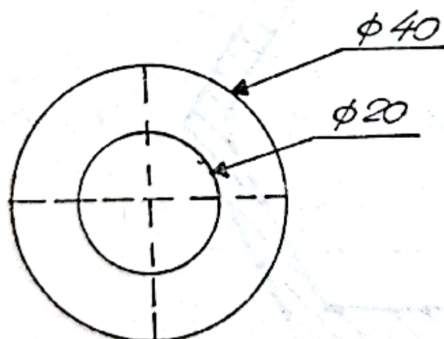


Fig. 11.71 *a*

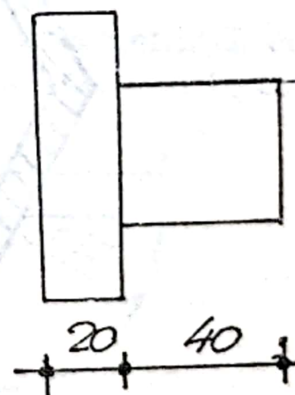


Fig. 11.71 *b*

134. Pe un ax de 400 mm diametru, se execută cu freza un plan de diferență de cota *a* = 300 cm. Calculați masa materialului

transformat în așchii. Materialul poate fi din :

— Fc (fontă cenușie) densitatea 7,3 kg/dm ^{3} ;

— OT (oțel turnat) „ 7,8 „ ;

— Cu (cupru) „ 8,9 „ ;

Dacă materialul este transformat în așchii topite într-un cuptor, cîte piese de 0,05 kg am putea obține prin turnare, știind că la topire 10% din material se consumă prin ardere.

135. Dintr-un bloc de piatră, avînd forma unui paralelipiped drept, cu baza un pătrat și înălțimea de 0,60 m, se taie o piesă a cărei secțiune se compune dintr-un pătrat și patru semicercuri avînd ca diametru laturile pătratului (fig. 11.72).



Fig. 11.72

Calculați :

a) suprafața laterală a piesei tăiate ;

b) masa piesei, știind că densitatea ei este de 2,1 t/m^3 ;

c) latura x, reprezentînd baza blocului de piatră.

136. Aleile unui parc — reprezentate în figura 11.73, trebuie acoperite cu beton. Calculaţi cantitatea de beton necesară acoperirii, ştiind că grosimea stratului este de 2 cm.

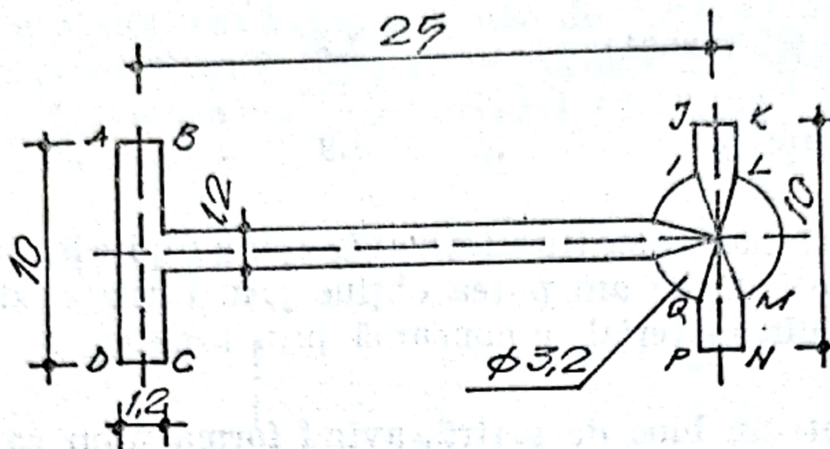


Fig. 11.73

137. Se cere controlarea unei cozi de rîndunică după metoda valţurilor, utilizînd valţuri de Ø 16 (figura 11.74). Calculaţi cota x în două cazuri :

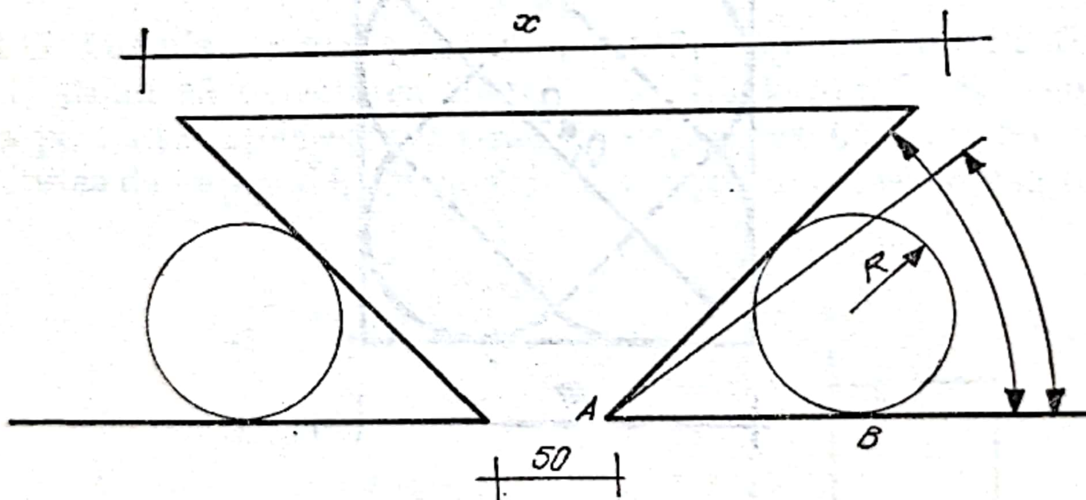


Fig. 11.74

— unghiul $A = 60°$;

— unghiul $A = 50°$;

138. Coşul unei locomotive cu aburi este constituit din trei părţi sudate între ele (fig. 11.75). Calculaţi suprafaţa tablei necesară pentru confecţionarea acestui coş.

Calculați greutatea metalului de la sudură știind că la un metru de sudură se utilizează 200 grame de metal.

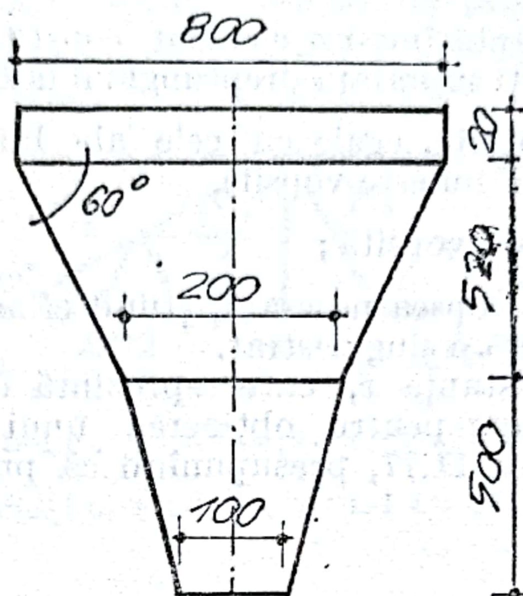


Fig. 11.75

139. Figura 11.76 reprezintă secțiunea într-un gard metalic ce se compune din 22 de elemenți. Calculați :

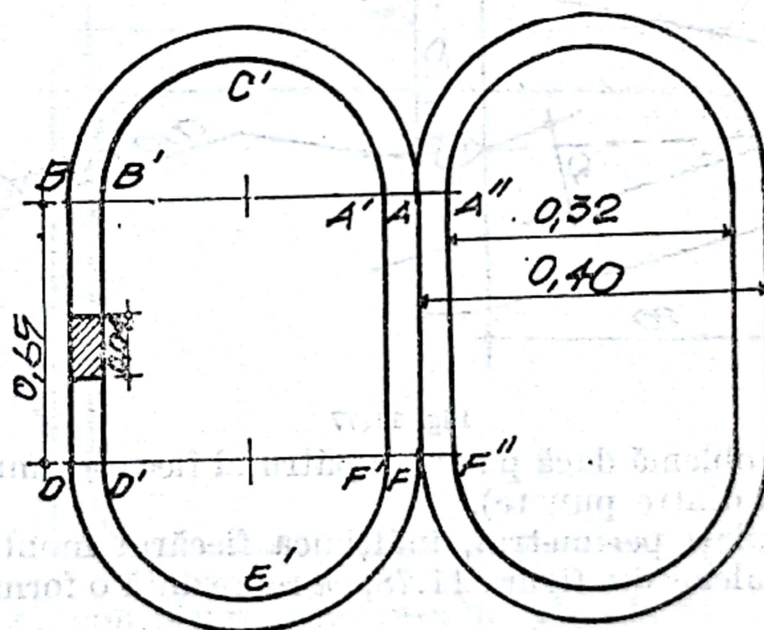


Fig. 11.76

a) suprafața cilindrică avînd ca baze două semicercuri interioare $A'C'B'$ și $D'E'F'$;

b) suprafața cilindrului avînd ca bază două semicercuri exterioare ABC și DEF ;

c) suprafața unei carcase circulare formată din reuniunea celor două semicercuri ACB, $A'C'B'$ și DEF, $D'E'F'$;

d) suprafaţa totală a părţii curbe a unui element şi deduceţi suprafaţa corespunzătoare pentru 22 elemenţi;

e) secţiunea dreaptă într-un element constituie un patrat de 4 cm latură. Calculaţi suprafaţa dreptunghiului *BDD'B*;

f) suprafeţele vopsite, egale cu cele ale lui *BDD'B* (o faţă comună, ştiind că *AF* nu este vopsit).

g) suprafaţa totală vopsită;

d) cantitatea de vopsea necesară, ştiind că un kg de vopsea acoperă 7 m ² pentru un singur strat.

140. Calculaţi distanţa x, care reprezintă dezaxarea contra-punctului unui strung pentru obţinerea unui trunchi de con reprezentat în figura 11.77, presupunînd că punctele axelor nu se întretaie.

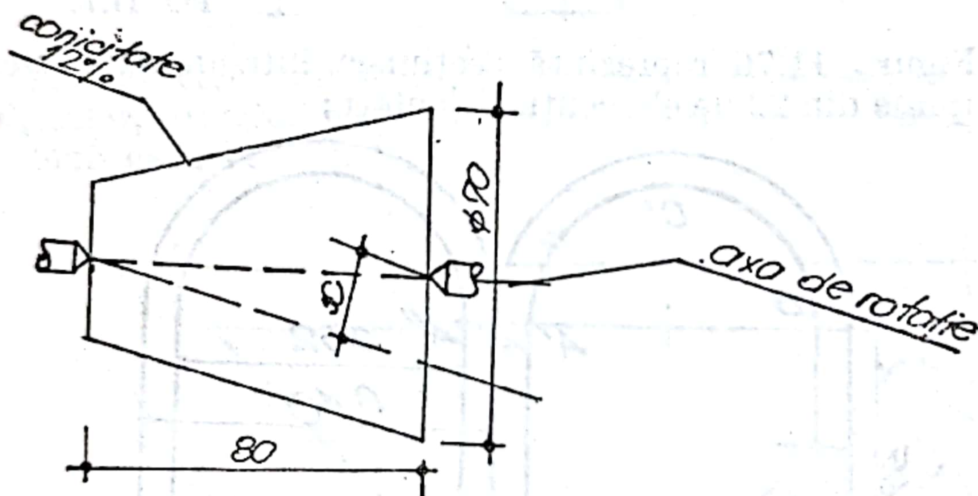


Fig. 11.77

Aceeaşi problemă dacă punctele pătrund fiecare 5 mm (calculaţi apoi distanţa dintre puncte).

141. Calculaţi perimetrul, înălţimea fiecărui montant şi lungimea diagonalelor din figura 11.78, ce reprezintă o formă metalică,

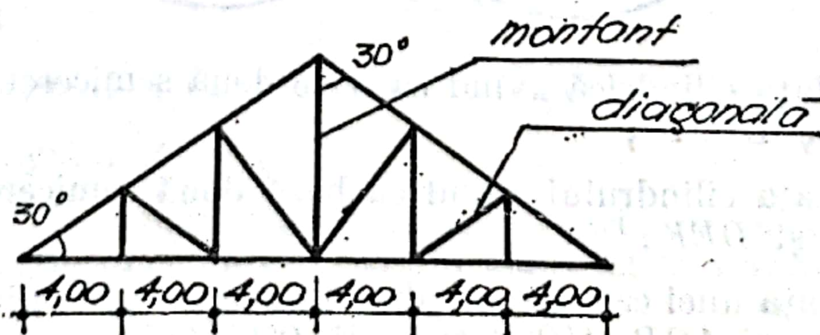


Fig. 11.78

calculînd şi cantitatea de profil laminat necesar realizării acestei grinzi.

142. Determinaţi lungimea totală de profile laminate ce se folosesc în construcţia fermelor metalice, reprezentate în figura 11.79, cotele fiind date în metri.

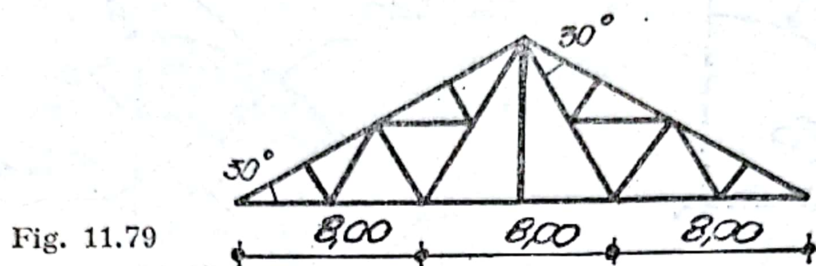


Fig. 11.79

143. Fundul unei cutii este reprezentat în figura 11.80.

a) Care este înălţimea cutiei, ştiind că ea are o capacitate de 100 litri;

b) Care este lungimea foii din tablă din care s-a decupat peretele său.

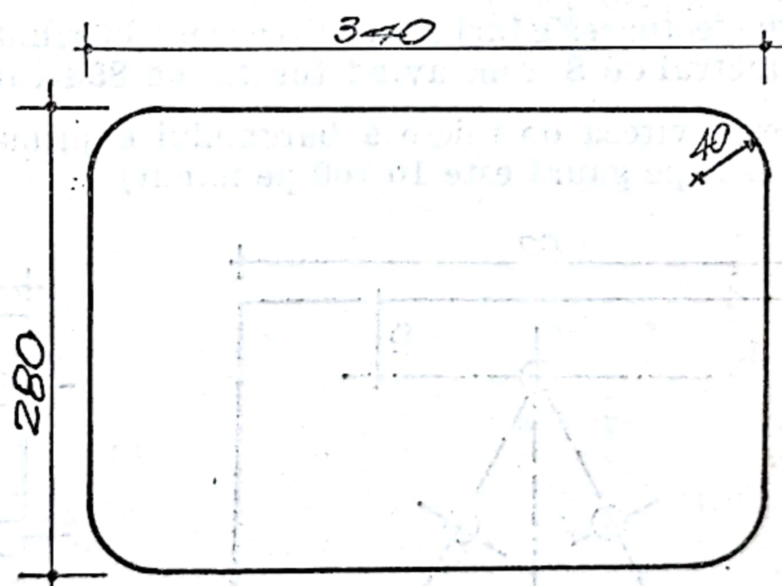


Fig. 11.80

144. Cotele consolei reprezentată în figura 11.81 sînt exprimate în mm. Calculaţi lungimea desfăşurată:

a) a sfertului de cerc cu centrul în O;

b) a cercului cu centrul în O'.

145. Calculaţi lungimea şi lăţimea piesei din lemn $ABCD$, obţinută dintr-un sfert de inel circular, aşa cum este indicat în figura 11.82.

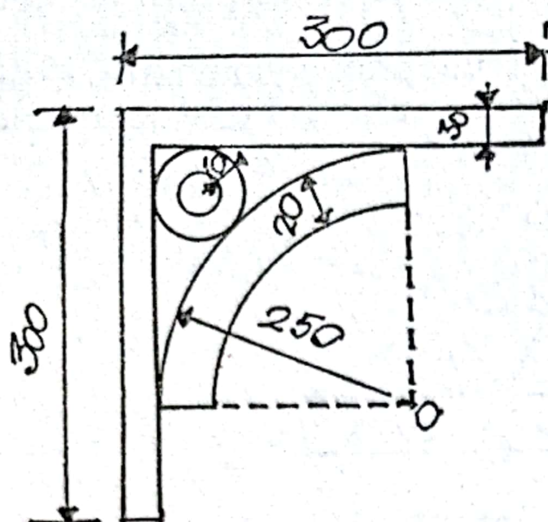


Fig. 11.81

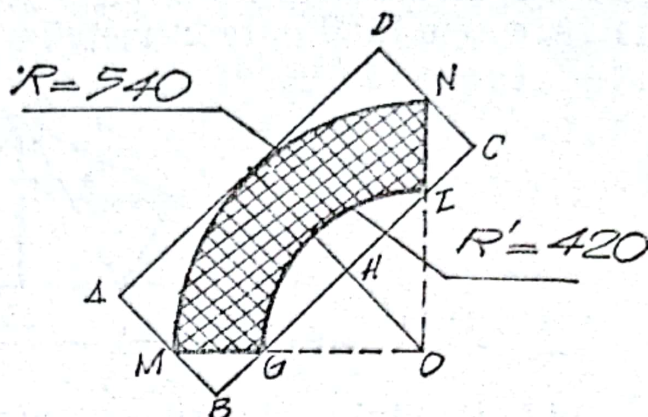


Fig. 11.82

146. Pe un bloc paralelipipedic din oţel aliat de grosime de 20 mm aveţi de efectuat străpungerea acesteia cu 6 găuri echidistante de 8 mm în diametru (fig. 11.83).

a) Pentru efectuarea găurii, se utilizează un burghiu din plăcuţe dure cu diametrul de 8 mm, avînd turaţia de 850 ture/minut.

b) Care este viteza de tăiere a burghiului exprimată în mm/ /minut (avansul pe gaură este 10/100 pe minut).

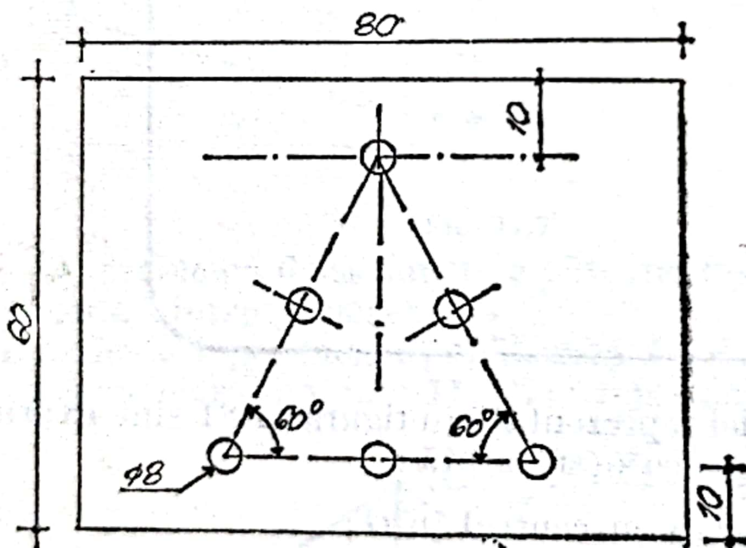


Fig. 11.83 *a*

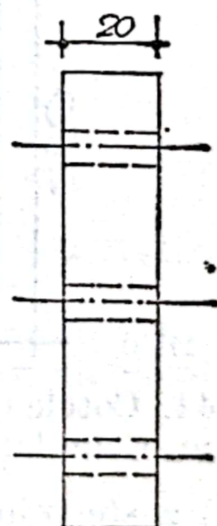


Fig. 11.83 *b*

147. Un panou dreptunghiular cu o lungime de 650 mm, este împărţit în 10 benzi de lăţimi egale, aşa cum este indicat în figura 11.84. Calculaţi:

a) lungimea unei diagonale a panoului;

b) lăţimea unei benzi;

c) lungimea totală a benzilor utilizate, ştiind că fiecare bandă este conţinută în panou;

d) procentajul pierderii de lemn rezultat prin tăiere, dacă pînza de fierăstrău are grosimea de 1 mm.

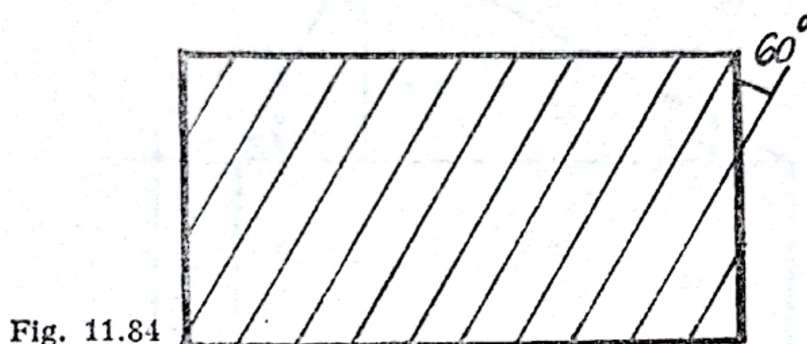


Fig. 11.84

148. O boltă în formă de semicerc este susţinută de doi stîlpi CE şi DF, aşa cum este arătat în figura 11.85. Ştiind că $AC = CD = DB$ şi că $AB = 6$ m, calculaţi lungimele CE şi DF.

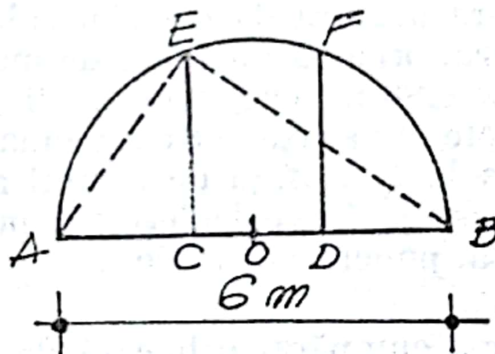


Fig. 11.85

149. Pe un panou ale cărui dimensiuni sînt de 4,2 × 0,70 m, un pictor are scris cuvîntul *cofetărie*. Ştiind că literele ce urmează a fi pictate au înălţimea de 50 cm, lăţimea de 25 cm şi că între două litere consecutive se lasă o distanţă de 10 cm, să se găsească la ce distanţă faţă de margini, pictorul stabileşte limitele înălţimii şi bazei literelor de la marginea exterioară a literei *C*.

150. Un muncitor trasează o linie care este perpendiculară pe bordurile unei şosele a cărei lăţime este de 10 m, urmînd să planteze semnalizatoare albe pentru marcarea trecerii pietonilor.

Ştiind că ele sînt egal depărtate, că au un diametru de 70 mm şi că axele consecutive sînt la 240 mm, să se afle ce lungime este între două axe consecutive şi cîte semnalizatoare plantează muncitorul.

151. Un acoperiş avînd două pante formează cu planul orizontal unghiurile de 45° şi 30°; ştiind că înălţimea clădirii este de 4 m şi coama acoperişului de 8 m de la sol, să se calculeze toate laturile clădirii (CD) (fig. 11.86).

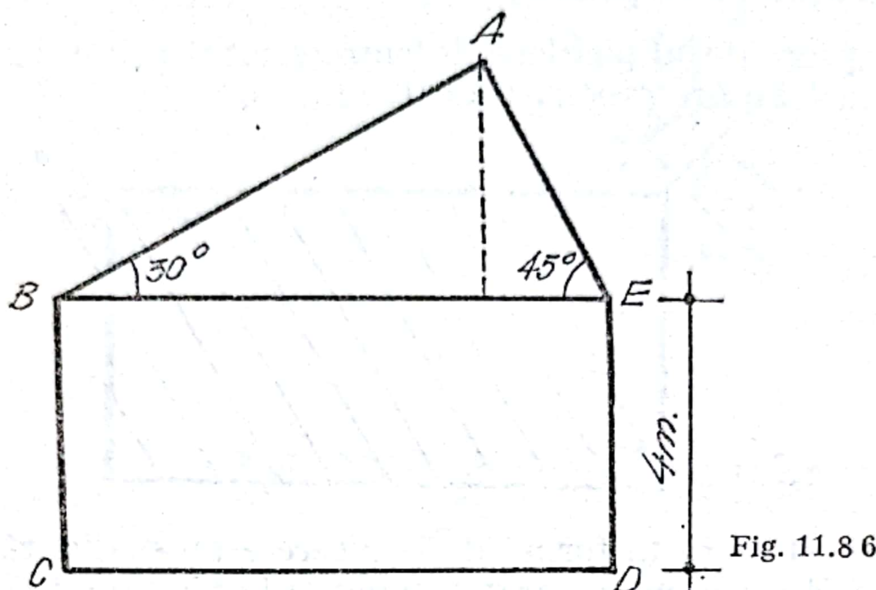


Fig. 11.86

152. O profesoară maistră dă elevelor sale, ca probă de lucru la sfîrşit de trimestru, ornarea unei feţe de masă (ale cărei dimensiuni sînt de 0,56 × 0,80 m) cu puncte roşii şi albastre. Ştiind că primul rînd de puncte se va fixa la 8 cm de marginea feţei de masă, celelalte se vor fixa la 4 cm faţă de primul rînd, la colţuri vor fi numai puncte albastre, să se calculeze cîte puncte roşii şi albastre sînt pe faţa de masă, punctele alternînd.

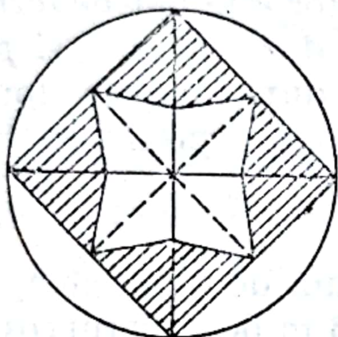
153. Un tapiţer a cumpărat o bucată de rips de 25 m pentru acoperirea a trei fotolii (necesitînd pentru fiecare în parte 3,5 m de rips). Preţul pe care-l cere pentru aceste huse este constituit din costul ripsului pe cantitatea utilizată, majorată cu 30%, procent pentru confecţionarea şi beneficiul său.

Restul materialului îl foloseşte pentru acoperirea unor scaune, pentru fiecare fiind necesari 2,2 m. Preţul cerut pentru husele de scaune este cel utilizat de la husele fotolii.

Calculaţi numărul de fotolii care se pot acoperi.

Determinaţi dacă prin vinderea celor două feluri de huse, tapiţerul este în cîştig sau pierdere, dacă pentru tot ripsul a plătit 1600 lei.

154. La sfîrşitul anului şcolar un profesor maistru fixează elevilor săi ca probă de lucru decuparea din tablă a unor piese necesare înzestrării laboratorului de matematică al şcolii.


Fig. 11.87 *a*

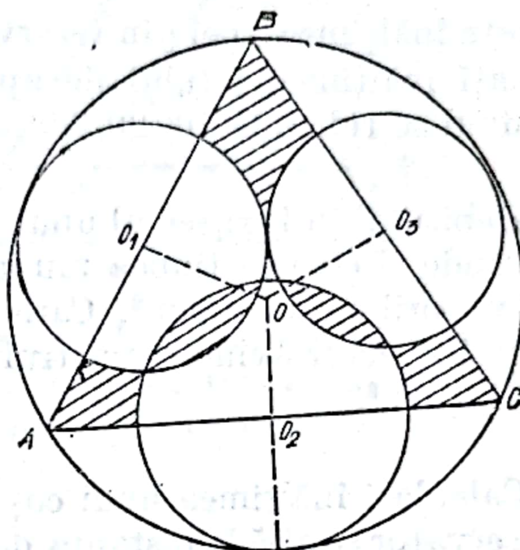


Fig. 11.87 *b*

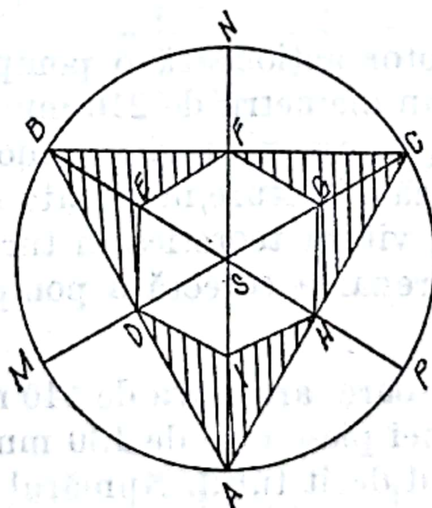


Fig. 11.87 *c*

Materialul oferit reprezintă deşeuri din tablă de formă rotundă provenite din matriţarea unor tole pentru motoare electrice (fig. 11.87). Se cere să se afle suprafaţa circulară maximă din care se pot executa piesele din figură cu pierdere minimă de material.

155. Înălţimea h a unui jet de apă este dată în formula:

$$h = H - \frac{H^2}{100}$$

unde H este înălţimea apei din rezervor deasupra ajutajului.

Calculaţi înălţimea jetului de apă alimentat de un rezervor unde lichidul se ridică la 10, 20, 30 m deasupra ajutajului jetului.

156. Debitul d în litri/sec al unui injector este dat de formula: $d = S p$, unde S este secţiunea minimă a duzei în cm ^{2} şi p este presiuna vaporilor în kg/cm ^{2}. Care este după această formulă, debitul unui injector avînd diametrul de 8 cm şi presiunea vaporilor de 12 kg/cm ^{2}.

157. Calculaţi înălţimea unui coş de fum de la o uzină, ştiind că un observator se află la distanţa de 15,6 m de piciorul coşului şi cu ajutorul teodolitului, el măsoară mărimea unghiului format pe orizontală de direcţia ochiului său şi a vîrfului coşului rezultînd un unghi egal cu 50°20′. Ochiul observatorului se află la 1,5 m deasupra solului.

158. Un electromotor acţionează o pompă centrifugă. Roata electromotorului are un diametru de 210 mm, viteza sa de rotaţie este de 1000 ture/min pentru un regim al motorului de 1500 ture/ /min. Pompa efectuează 1500 ture/min roata sa avînd un diametru de 140 mm. Calculaţi viteza teoretică în ture/min a roţii electromotorului pentru antrenarea corectă a pompei.

159. O sculă aşchietoare are cursa de 140 mm/min. Cursa totală pentru prelucrarea unei piese este de 130 mm. Returul sculei este de două ori mai rapid decît turul. Numărul de curse (du-te-vino) este de 30 ture/min. Care este viteza de aşchiere a uneltei.

160. Figura 11.88 indică modul de îmbinare a materialelor lemnoase prin nut şi feder. Calculaţi lungimea de intrare şi ieşire a federului, apoi calculaţi bc, ştiind că $ab = 20$. Cotele sînt date în mm.

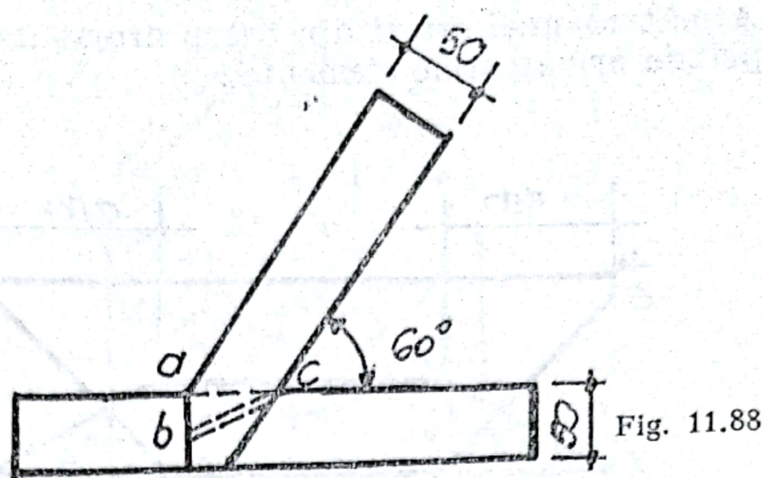


Fig. 11.88

161. Calculaţi greutatea piuliţei de formă exagonală reprezentată în desen ştiind că densitatea metalului din care este confecţionată este de 7,8 kg/dm ³ (fig. 11.89).

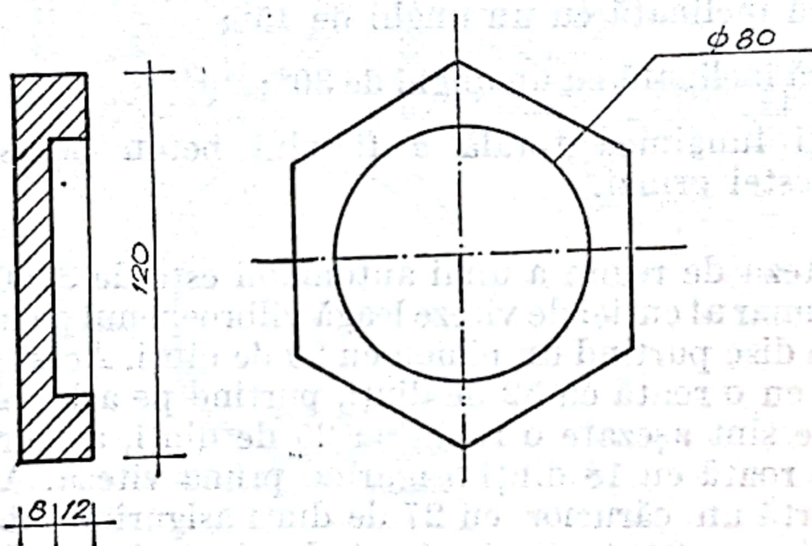


Fig. 11.89 *a* Fig. 11.89 *b*

162. Arborele cotit al unui automobil efectuează 3200 ture/min. Ştiind că o cursă a pistoanelor este egală cu 120 mm, calculaţi viteza medie a lor.

163. Într-un atelier se toarnă 40 de piese din fontă, unele cîntărind 35 kg şi altele 42 kg. Masa totală a pieselor este egală cu 1575 kg. Cîte piese se pot turna din fiecare fel?

164. Armătura unei grinzi din beton armat indicată în figura 11.90 cuprinde următoarele elemente :

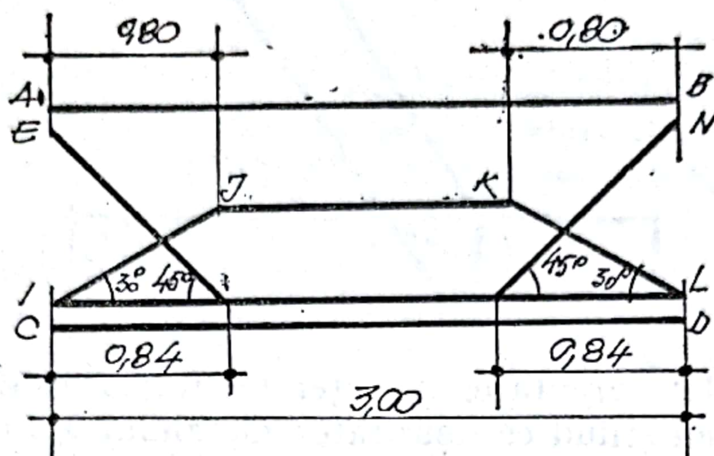


Fig. 11.90

— două bare de compresiune de 3 m lungime fiecare ;

— o bară înclinată cu un unghi de 45° ;

— o bară înclinată cu un unghi de 30° ;

Calculați lungimea totală a fierului beton necesar pentru armarea acestei grinzi.

165. Viteza de regim a unui automobil este de 3600 ture/min. Arborele primar al cutiei de viteze leagă vilbrochenul pe un ambreiaj în formă de disc purtînd un pinion cu 20 de dinți. Acest pinion este în legătură cu o roată cu 32 de dinți, purtînd pe arborele intermediar pe care sînt așezate o roată cu 25 de dinți, asigurînd viteza a doua și o roată cu 18 dinți asigurînd prima viteză. Arborele secundar poartă un cărucior cu 27 de dinți asigurînd viteza a treia și un cărucior cu 34 de dinți asigurînd prima viteză. Raportul de demultiplicare a diferențialului este de 16. Diametrul pneurilor este de 0,65 m.

Calculați :

a) Viteza de rotație a motorului în prima viteză și a doua viteză ;
b) Viteza în km/h a automobilului în viteza I și a II-a.

166. Să se stabilească excentricitatea unei țevi, dacă grosimea cea mai mică a peretelui este s_1, și grosimea cea mai mare a peretelui este s_2 (fig. 11.91).

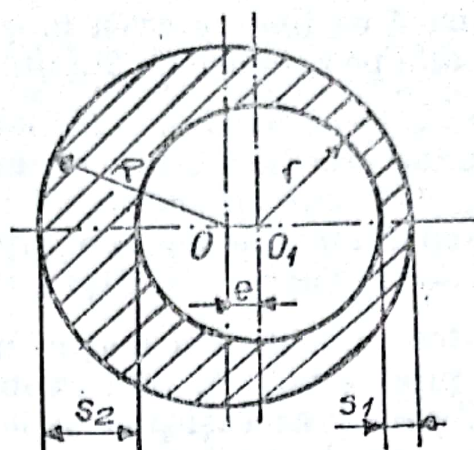


Fig. 11.91

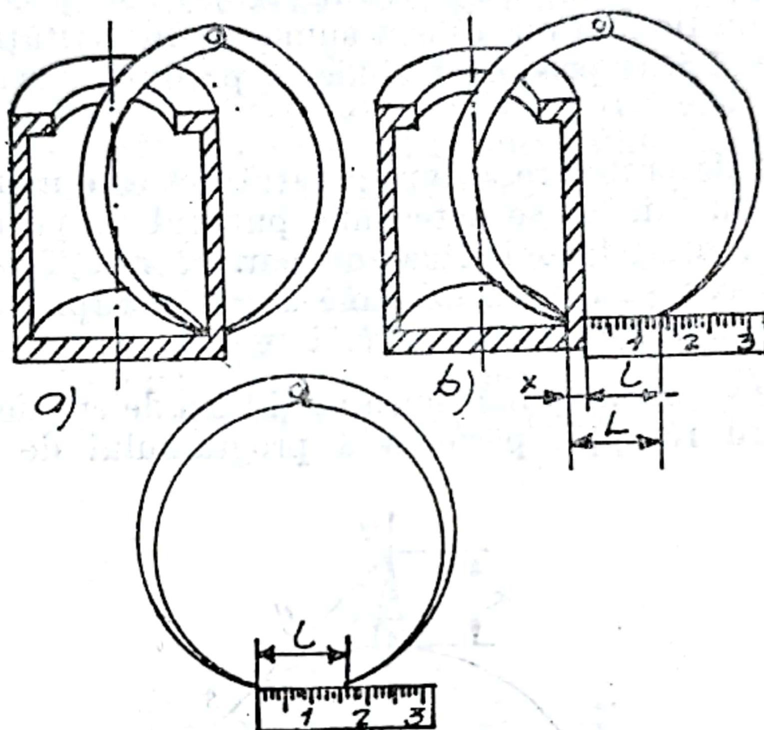


Fig. 11.92

167. La măsurarea grosimii peretelui la un utilaj cu compasul de grosime, este cîteodată imposibilă scoaterea compasului fără a mişca braţele compasului (fig. 11.92). În acest caz se adaugă la mărimea care trebuie măsurată o altă dimensiune l astfel încît să se obţină lungimea L care să rămînă neschimbată.

168. Viteza unui pendul depinde de perioada T care se poate exprima cu formula : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, unde l este lungimea pendulului şi g acceleraţia căderii libere ($g = 981$ cm s^{-2}). Să se stabilească cu cît trebuie scurtată lungimea pendulului (discul împins pe tija

pendiulului în sus), dacă ea înainte avea lungimea $l_0 = 20$ cm și ceasul rămînea cu 12 min pe zi în urmă. Admitem că discul este mai greu decît tija.

169. Să se determine grosimea peretelui unei țevi cu un diametru exterior de $d = 140$ mm, care se întrebuințează la construcția unei turle. Se știe că din motive de rezistență suprafața secțiunii țevii trebuie să fie $A = 25$ cm ^{2}.

170. Productivitatea muncii unei mașini unelte automatizată A, este p unități de produs pe oră. Să se construiască încă două mașini unelte, B și C pentru aceeași producție.

Se pun condițiile : productivitatea mașinii B să nu fie mai mică de m % din suma productivității A și C, iar productivitatea mașinii C să nu fie mai mică decît suma productivității mașinii B și A. Cîte unități de produse trebuie să producă mașinile B și C pe oră?

171. Raza de protejare a unui paratrăsnet este mai mică decît dublul înălțimii lui. Să se determine punctul de pe un acoperiș cu două pante unde trebuie fixat un paratrăsnet. Totodată să se stabilească și cea mai mică înălțime admisă. Suprafața de bază este un dreptunghi cu laturile a și b, date în metri.

172. Să se stabilească înălțimea unui turn de emisie (fig. 11.93) necesar pentru recepția perfectă a programului de televiziune

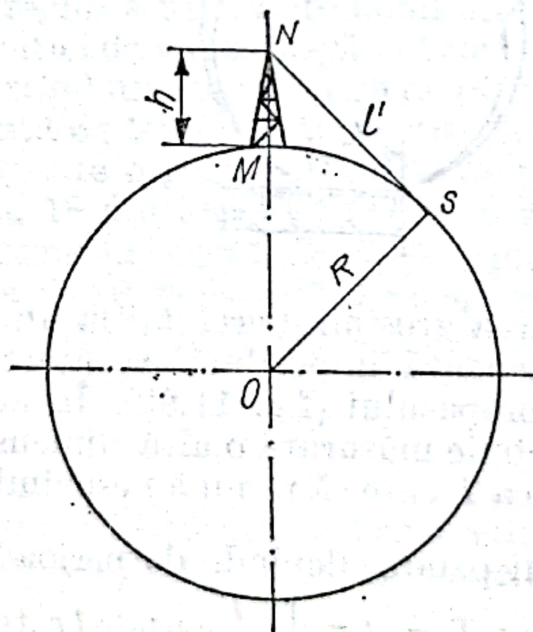


Fig. 11.93

de la București la Brașov. Să se arate că un asemenea proiect este imposibil. La soluție să se țină seama că undele ultrascurte, pe

care se face transmisia programului de televiziune, nu se acomodează curburii pămîntului. De aceea recepţia perfectă se obţine numai în zona vizibilităţii optice (ceea ce înseamnă că recepţionerul programului din Braşov trebuie să vadă teoretic vîrful turnului de emisie din Bucureşti). Presupunem că distanţa l' de la vîrful turnului pînă la Braşov este egală cu distanţa $l = 180$ km distanţă între Braşov şi Bucureşti. Raza pămîntului se consideră $R = 6368$ km.

173. Într-o secţiune curbă a unei porţiuni de cale ferată, raza de curbură nu trebuie să fie mai mică de 600 m.

Stabiliţi valorile pentru lungimile şinelor ştiind că unghiul la centru al arcului este mai mic de 180° iar coarda lui este de 156 m.

174. Pe suprafaţa de bază a unui cilindru se înscrie un cerc. Se trasează paralel cu axul o gaură cu diametrul egal cu diametrul cercului înscris. Arătaţi că şpanul rezultat din găurire nu reprezintă mai mult de 25% din greutatea corpului propriu-zis.

175. Un abajur are forma unui trunchi de con. Diametrul bazei mici este egal cu d şi diametrul bazei mari este egal cu D. Lungimea generatoarei este l. Abajurul se confecţionează dintr-o bucată dreptunghiulară de material. Să se determine dimensiunile minime ale bucăţii de material necesară pentru confecţionarea abajurului (fig. 11.94).

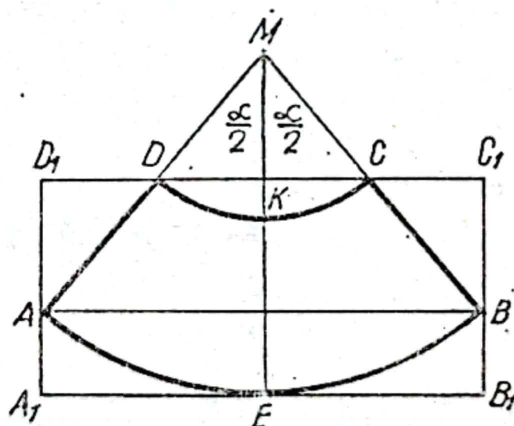


Fig. 11.94

176. La uzinele 23 August din Bucureşti se obţin două noi tipuri de oţel turnat. Prima calitate conţine 20% iar a 2-a calitate conţine 40% nichel.

Cîte tone de oţel din fiecare calitate sînt necesare pentru un aliaj al cărui conţinut de nichel să fie între 25% şi 30%?

177. Pe o parcelă în formă de triunghi echilateral cu latura de 75 m se face un parc astfel: cu o rază cît $\frac{2}{5}$ din latura triunghiului şi cu centrul în fiecare vîrf se duc 3 arce de cerc. Suprafeţele din colţuri se seamănă cu flori. Pe lîngă ele se face cîte o alee lată de 3 m. Aflaţi aria rămasă pentru a fi acoperită cu iarbă (Fig. 11.95).

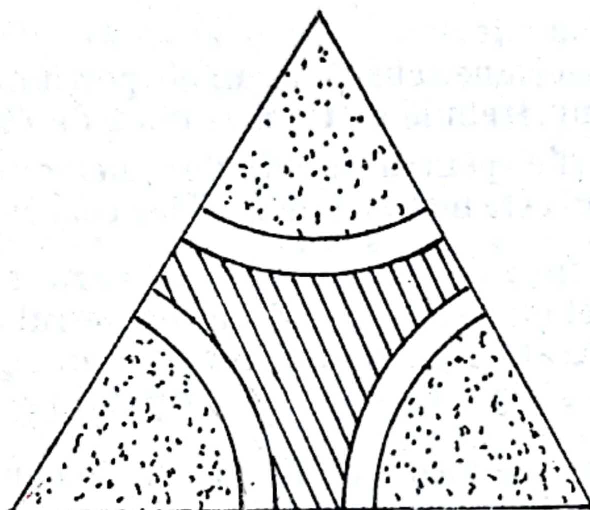


Fig. 11.95

Capitolul 12

EXERCIȚII ȘI PROBLEME DATE LA ADMITERE ÎN TREAPTA I



1. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E = \frac{x}{ax - 3a^2} - \frac{3}{x^2 + x - 3ax - 3a}\left(1 - \frac{4x - x^2}{x + 4}\right).$$

2. Să se determine a, b, c, astfel ca polinomul $P(x) = 12x^3 - 40x^2 + 27x - 5$ să poată fi pus sub forma:

$$P(x) = (3x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

Să se determine apoi mulțimea valorilor lui x pentru care $P(x) = 0$.

3. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} \dfrac{x}{a-b} + \dfrac{y}{a} = a \\[2ex] \dfrac{x}{b} - \dfrac{y}{a-b} = -b \end{cases}$

4. Să se determine un polinom $P(x)$ de gradul al treilea, cu coeficientul lui x^3 egal cu 1, știind că $P(x)$ împărțit prin $(x-1)$, $(x-2)$ și $(x-3)$ dă de fiecare dată un rest egal cu 6.

5. Un automobilist parcurge o distanță de 240 km cu o viteză mai mică cu 20 km/h decît și-a propus inițial și ajunge la destinație cu o oră mai tîrziu. Care a fost viteza automobilului?

6. Baza unei piramide este trapezul $ABCD$, cu unghiurile

$A \sphericalangle D = 90°$, iar piciorul înălţimii piramidei este mijlocul laturii BC. Dacă V este vîrful piramidei :

a) să se arate că muchiile VA şi VD sînt egale ;

b) să se afle volumul piramidei ştiind că înălţimea trapezului este de 6 cm, linia mijlocie a trapezului este de 4 cm, iar muchia $VA = 13$ cm.

7. Un triunghi isoscel are baza egală cu 30 cm, iar fiecare din laturile egale de 25 cm. Să se afle volumul corpului obţinut prin rotirea acestui triunghi în jurul uneia din laturile egale.



1. Să se rezolve ecuaţia :

$$(2x + 3) - 3(x+4) = 4\,(x + 5) - 6$$

2. Se dă ecuaţia :

$$\frac{20 + x}{2x - 2} - \frac{9\,x^2 + x + 2}{6\,x^2 - 6} = \frac{5 - 3x}{x + 1} - \frac{10 - 4x}{3x + 3}.$$

a) Să se determine valorile lui x, pentru care ecuaţia nu are sens.

b) Să se rezolve ecuaţia.

3. Să se construiască un polinom $P(x)$ de gradul II, astfel ca : $P(2) = P(3) = 0$ şi $P(0) = 6$.

4. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată, laturile bazelor şi apotema sînt (în cm) : $AB = 5$, $A'B' = 3$, ap $= 6$.

Se cere :

a) aria laterală a trunchiului de piramidă ;

b) volumul trunchiului de piramidă ;

c) volumul trunchiului de con înscris în trunchiul de piramidă.

5. Un con circular drept are raza bazei de 6 cm şi înălţimea de 8 cm. Să se afle :

a) volumul conului ;

b) aria laterală a conului ;

c) volumul sferei înscrise în con.



1. Se dă expresia :

$$E(a\,;b) = \left(\frac{2a+b}{a+b} - \frac{a-2b}{a-b} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right) : \frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

Să se arate că $E(a\,;b) = \dfrac{2}{a-b}$;

Să se calculeze valoarea ei numerică ştiind că a şi b sînt rădăcinile ecuaţiei :

$$\frac{3x+1}{x} - 1 = \frac{3}{2x-1}, \text{ iar } a > b.$$

Dacă $b = -1$, pentru ce valori ale lui a expresia $\dfrac{2}{a-b}$ este număr întreg ?

2. Un cerc O este înscris într-un trapez isoscel. Cunoscînd că baza mare a trapezului este de 25 cm şi baza mică de 9 cm, să se afle aria şi volumul corpului obţinut prin rotirea completă a trapezului în jurul bazei mari.

3. Fie $VABC$ un tetraedru regulat cu M mijlocul muchiei VC.
Să se demonstreze că dreapta VC este perpendiculară pe planul MAB;
Să se afle raportul dintre volumele piramidelor $VABM$ şi şi $MABC$.

4. Să se arate, fără a face împărţirea, că polinomul :

$$P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2,$$

este divizibil cu $x-2$ şi $x+1$.

5. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \dfrac{x+2y-3}{2} = \dfrac{2x+y+5}{3} \\[2ex] \dfrac{y-x}{7} = \dfrac{x+y+3}{4} \end{cases}$$

6. Se dau expresiile:

$$E_1 = x^4 - 4x^3 + 12x - 9$$

$$E_2 = \frac{(x-1)(x-3)}{x+2}.$$

a) Să se arate că E_1 este divizibilă cu $x-1$ și $x-3$;

b) Să se descompună în factori E_1;

c) Să se determine valorile lui $x \in N$ pentru care expresia E_2 ia valori numere întregi pozitive.

7. O foaie de tablă dreptunghiulară cu dimensiunile 4 dm și 6 dm reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru. Să se afle volumul cilindrului. Cîte soluții admite problema?

8. Se dă expresia:

$$E(x) = \left(\frac{4}{x^2-1} + \frac{2x+4}{x+1} - \frac{x^2+1}{1-x}\right) \frac{1-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x+2}}$$

a) Pentru ce valori ale lui x are sens expresia?

b) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

c) Pentru ce valoare a lui x, expresia ia valoarea $\frac{2}{1}$?

9. Se dau polinoamele:

$x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ și $x^3 + 3x^2 - 4$.

a) Să se arate (fără a face împărțirea) că sînt divizibile cu $(x-1)$.

b) Să se afle c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al polinoamelor date.

10. Într-un paralelipiped dreptunghic muchiile bazei sînt: $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, iar diagonala paralelipipedului face cu planul bazei un unghi de 45°.

a) Să se calculeze înălţimea şi diagonala paralelipipedului.

b) Să se calculeze aria totală şi volumul paralelipipedului.

11. O piesă metalică are forma unui con circular drept cu lungimea cercului de bază de 94,20 cm şi înălţimea de 0,2 m. Cîte bile cu raza de 5 cm se pot turna prin topirea acestei piese?



1. Se dă expresia:

$$E(x) = 13x(x+1)^2 + (2x^2 - 5x + 1)(x^2 + 2x + 3) -$$
$$- 5(x+2)(x-2) - 23.$$

a) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă;

b) Să se descompună expresia în factori ireductibili.

2. Fie ecuaţia: $\dfrac{x^2}{x^2-1} + \dfrac{6}{x+1} + \dfrac{4}{x-1} = 2$

a) Să se determine mulţimea valorilor lui x pentru care egalitatea are sens.

b) Să se rezolve ecuaţia şi apoi să se verifice rezultatul.

3. Să se reprezinte grafic funcţia $y = x^2$, pentru $x \in [-2, 4]$.

Aflaţi coordonatele punctelor de pe grafic care au abscisa egală cu ordonata.

4. Într-un trapez $ABCD$, înălţimea este de 5 cm, latura oblică este egală cu baza mică, iar unghiurile trapezului alăturate bazei mari sînt de 45°, respectiv de 30°.

Să se afle:

a) proiecţiile laturilor neparalele pe baza mare;

b) laturile trapezului;

c) volumul corpului obţinut prin rotirea trapezului în jurul bazei mari.

★

1. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{5x^2+3x+1}{x+3}=\frac{x+1}{3}.$$

2. Să se simplifice fracţia:

$$\frac{a^3+2a^2+2a+1}{a-1}.$$

3. Perimetrul unui dreptunghi este egal cu 84 m. Lungimea este cu 18 mai mare decît lăţimea. Să se afle dimensiunile dreptunghiului.

4. Într-un con cu raza 6 m şi generatoarea 7,5 m se face o secţiune cu baza la $\frac{2}{3}$ de vîrf. Să se afle raza, înălţimea şi generatoarea conului mic format.

★

1. Fiind dată expresia:

$$E(x)=\left(\frac{x+1}{2x-2}+\frac{8}{x^2-1}-\frac{x+3}{2x+2}\right):\frac{3}{4x^2-4}\cdot\frac{1}{4}.$$

Se cere:

a) Să se aducă expresia la cea mai simplă formă, arătînd că $E(x)=3+\frac{1}{3}$.

b) Să se rezolve ecuaţia:

$x^2+3x=\frac{22}{3}-E(x)$, unde $E(x)$ este forma cea mai simplă a expresiei date.

★

1. Se dă expresia:

$$E(x,y)=\frac{2y^2}{x^2-y^2}+\frac{x+y}{2(x-y)}-\frac{x-y}{2(x+y)}:\frac{x^2+y^2}{2xy}-$$

$$-1-\frac{3x^3-x^2y+9xy^2-3y^3}{3x+9y}$$

Se cere:

a) Să se aducă la forma cea mai simplă;

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei pentru

$$x = \frac{1}{4},\ y = \frac{4}{5}.$$

2. Secţiunea axială a unui trunchi de con este un trapez care are bazele de 8 cm şi 18 cm, iar unghiul format de o latură neparalelă cu baza mare este de 45°.

Se cere:

a) aria totală a trunchiului de con;

b) volumul trunchiului de con.



1. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x) = \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{2}{x^2 + 2x + 1} + \frac{1}{x^2 - 2x + 1}\right) : \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x + 1}\right)$$

2. Să se facă tabelul de variaţie şi să se reprezinte grafic funcţia:

$$y = \frac{1}{2x}.$$

3. Generatoarea unui con circular drept este cu 2 cm mai mică decît triplul razei bazei, iar înălţimea lui cu 2 cm mai mare decît dublul razei. Să se calculeze:

a) Dimensiunile conului;

b) Aria totală a conului.

4. Pe perpendiculara în A pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ia punctul M astfel încît $MB = 20$ cm, $MC = 5\sqrt{17}$ cm şi $MD = 13$ cm.

a) Să se demonstreze că triunghiurile MBC şi MDC sînt dreptunghice;

b) mărimea segmentului MA;

c) aria laterală a piramidei $MABCD$ (vîrful în M).



1. Să se efectueze:

$$\left(\frac{3a-b}{3a+b}-\frac{3a+b}{3a-b}\right)\cdot\left(\frac{9a}{b}-\frac{b}{a}\right)$$

2. Într-o localitate se amenajează două terenuri pentru sport cu aceeaşi arie; unul dreptunghiular, avînd lungimea cu 120 m mai mare decît lăţimea; altul de formă pătrată, avînd latura cu 4 cm mai mare decît lăţimea primului. Care sînt dimensiunile celor două terenuri?

3. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{x-1}{6}-\frac{x+2}{4}=\frac{1}{3}-\frac{x+5}{8}-2.$$

4. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are dimensiunile bazei de 10 cm şi 2 cm, iar apotema de 13 cm.

Se cere:

a) Aria laterală a trunchiului;

b) Volumul trunchiului.

5. Se dă expresia:

$$E(x, y) = (x-y)^2 + (2x+y)^2 - (2x+y)\cdot(2x-y)$$

Se cere:

a) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă;

b) Să se calculeze valoarea numerică a expresiei pentru:

$$x = 1 \text{ şi } y = 2.$$

6. O maşină consumă 8 l benzină la suta de kilometri, iar o alta consumă 12 l. Într-o zi ambele maşini cu făcut, în total, 2400 km şi au consumat 208 l benzină. Cîţi km a străbătut fiecare maşină.

7. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

8. Un bazin de înot are lungimea de 25 m şi lăţimea de 10 m. Din cauza evaporării apei nivelul a scăzut cu 5 cm. Cîţi hectolitri de apă s-au evaporat?



1. Se dă sistemul :

$$\begin{cases} x + my = 3m \\ 2x + (m+1)y = (2m+1) \end{cases}$$

a) Să se rezolve în cazul $m = 3$;

b) Să se rezolve în cazul general;

c) Cînd $m = 1$ sistemul are o infinitate de soluţii. De ce?

2. O piramidă patrulateră regulată are aria laterală egală cu 960 cm ² şi aria totală egală cu 1536 cm ². Să se afle :

a) Latura bazei;

b) Înălţimea piramidei;

c) Volumul piramidei.

3. Să se simplifice fracţia :

$$\frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{x^2 - 2xy + xz - 2yz}.$$



1. Se dă expresia :

$$E(a, b) = \left(a - \frac{4ab}{a+b} + b\right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2 - b^2}\right).$$

a) Să se arate că forma cea mai simplă a expresiei este $a - b$;

b) Să se calculeze valoarea numerică a expresiei $E(a, b)$ pentru

$$a = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right), b = 5\frac{1}{5} : 0{,}26 : 20.$$

2. Să se afle aria şi volumul corpului din figura 12.1 (un cilindru terminat cu o emisferă şi un con). Dimensiunile sînt cele de pe figură.

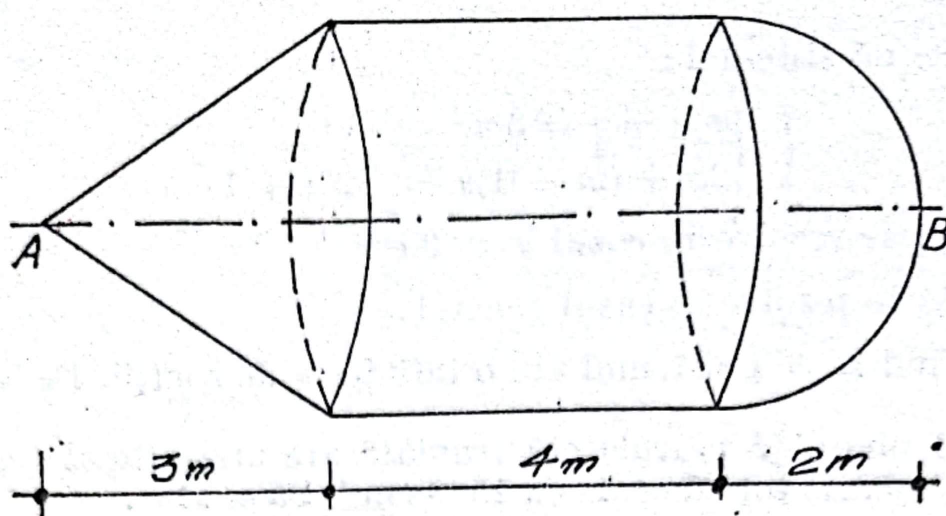


Fig. 12.1



1. Să se rezolve ecuaţia :

$$\frac{5x-2}{2}=2x-1.$$

2. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases}3x-2y=4\\2x+y=5\end{cases}$$

3. Care este latura pătratului cu aria 842 m^2?

4. Într-o curte sînt găini şi iepuri care împreună au 36 capete şi 114 picioare. Cîte găini şi cîţi iepuri sînt?

5. Un triunghi dreptunghic ABC, $(\hat{A}=90°)$, se roteşte în jurul ipotenuzei. Dacă $AB=6$ cm şi $AC=8$ cm, să se afle aria totală şi volumul corpului născut.



1. Un triunghi isoscel ABC $(AC=BC)$ este aşezat cu latura $AB=6$ cm în planul $P(C \notin P)$, iar unghiul diedru format de planul triunghiului cu planul P este de 30°. Fie $CD=4$ cm înălţimea triunghiului ABC $(D \in AB)$ iar C' proiecţia lui C pe planul P.

Să se calculeze:

a) Aria triunghiului ABC';

b) Volumul corpului $CC'AB$;

c) Aria totală a corpului $CC'AB$;

d) Distanţa de la C' la planul triunghiului ABC;

e) Desenaţi prisma avînd ca bază triunghiul ABC' şi înălţimea $C'C$ şi apoi calculaţi-i volumul.

$$\left(\text{Consideraţi } \sin 30° = \frac{1}{2}\right)$$

2. Fie expresiile:

$$F_1(x, y) = 2x - 3y \frac{2x}{2x - 3y} + 2y\left(\frac{3x}{2x - 3y} - 2\right)$$

$$F_2(x, y) = \left(\frac{y^2}{x - 2y} + \frac{x}{2} + \frac{y^2}{4y - 2x}\right) \cdot \frac{1}{(x - y)^2}.$$

a) În condiţiile de existenţă, să se arate că:

$$F_1(x, y) = 2x - 4y$$

$$F_2(x, y) = \frac{1}{2x - 4y}.$$

b) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} F_1(x, y) + 2F_1(x, y) \cdot F_2(x, y) = 0 \\ x\,F_2(x, y) + F_1(x, y) \cdot F_2(x, y) = 2\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Să se găsească mulţimea:

$$M = \{(x, y) \mid x, y \in Z \text{ şi } F_1(x, y) = 3\}.$$

3. Să se arate că pentru orice $m \in R - \{0\}$ ecuaţia:

$$\frac{x + 1}{x} = m^2(x + 1)$$

admite o rădăcină independentă de m şi o rădăcină pozitivă.



1. Se dau polinoamele $P_1(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$; $P_2(x) = 2x^2 - 3x + 1$; $P_3(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2$.

Să se calculeze:

a) valorile numerice ale polinomului $P_3(x)$ pentru

$$x = -2 \text{ şi pentru } x = 0;$$

b) $P_1(x) - P_2(x) + P_3(x)$;

c) $P_1(x) \cdot P_2(x)$.

2. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{x}{x-2} - \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{3}{4} = 0$$

3. Un con circular drept are aria bazei egală cu 36 cm² şi generatoarea egală cu 10 cm. Să se afle aria laterală şi volumul conului.

4. Un dreptunghi $ABCD$, avînd laturile $AB = CD = a$ ş $AD = BC = b$, se roteşte în jurul laturilor AB şi BC obţinîndu-se două corpuri. Să se afle:

a) raportul ariilor celor două corpuri;

b) raportul volumelor celor două corpuri.



1. Se dă sistemul:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

Se cere:

a) Să se rezolve sistemul;

b) Să se verifice soluţia găsită;

c) Să se reprezinte grafic prima ecuaţie a sistemului;

d) Să se stabilească dacă punctul P (3;1) se află pe dreapta reprezentată la punctul *c*.

2. O piramidă patrulateră regulată are latura bazei de 8 cm iar înălţimea de 3 cm.

Să se calculeze:

a) Volumul piramidei;

b) Apotema piramidei;

c) Aria laterală a piramidei.

3. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{x-2}{3}+\frac{x-1}{2}=3$$

4. Se dă sistemul:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ ax-y=a \end{cases}$$

a) Să se rezolve sistemul;

b) Să se determine a astfel ca $x=3$.

În acest caz să se găsească y.

c) Să se reprezinte grafic: $x-y=1$

5. *a*) Să se simplifice fracţia:

$$\frac{5a^2+5ax}{a^2-x^2},\ x\in R-\{-a,a\}.$$

b) Să se afle valoarea fracţiei de la punctul *a* pentru:

$$a=\frac{1}{5};\ x=\frac{1}{6}.$$

6. Înălţimea unui con este de 8 m, iar generatoarea sa de 10 m.

Să se afle:

a) Volumul conului;

b) Raportul dintre volumul conului și volumul sferei înscrise în con.



1. Fie expresia:

$$E(a) = \left(\frac{\frac{a^2-1}{a+1}}{a+1} + \frac{a+1}{\frac{a^2-1}{a+1}}\right)\cdot\left(\frac{2a^3+2a}{4a^2}+1\right)\cdot\frac{2a}{2a^2+2}$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă și să se găsească valorile lui a pentru care expresia inițială are sens;

b) pentru ce valori ale lui a, expresia:

$$E(a) = \frac{a+1}{a-1}, \text{ este pozitivă?}$$

c) Să se rezolve ecuația:

$$\frac{a+1}{a-1} + \frac{1}{\frac{a+1}{a-1}} = \frac{4}{a^2-1}.$$

2. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC ($A = 90°$), ale cărui catete sînt $AB = 20$ cm, $AC = 15$ cm, iar pe perpendiculara în A la planul triunghiului se ia punctul M, astfel ca segmentul AM să fie egal cu mediana AA_1 a triunghiului ABC.

a) Să se afle aria totală și volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului ABC în jurul catetei AB;

b) Să se calculeze volumul piramidei $MABC$;

c) Să se afle aria laterală a acestei piramide;

d) Să se calculeze distanța de la punctul A la planul (MBC).

3. Fie ecuația: $\frac{x}{x-2} = \frac{6}{x-1}$. Rădăcinile ecuației sînt, în cm, catetele unui triunghi dreptunghic. Să se afle aria și volumul corpului generat prin rotirea triunghiului în jurul unei drepte

care trece prin vîrful unghiului drept şi este paralelă cu ipotenuza triunghiului.

4. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E = \left(1 - \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right) : \left(1 - \frac{y}{x}\right) : \left(\frac{x-y}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right).$$

3. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2 \\ \dfrac{x}{x+b} + \dfrac{y}{a-b} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}. \end{cases}$$

★

1. Se dă expresia:

$$E(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}.$$

a) Să se stabilească valorile lui x pentru care expresia are sens;

b Să se aducă la forma cea mai simplă;

c) Să se calculeze $E\left(-\frac{1}{2}\right)$.

2. Într-un con circular drept se cunosc raza bazei de 3 cm şi înălţimea de 4 cm.

Se cere:

a) Volumul conului;

b) Aria totală a conului;

c) Să se afle aria figurii obţinute prin secţionarea conului cu un plan paralel cu baza, situat la 2 cm de vîrf.

3. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{2y}{3} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{3x}{2} + 2y = 0. \end{cases}$$

a) Să se arate că polinomul :

$P(x) = x^4 - 6x^2 + 4x + 8$ este divizibil cu

$Q(x) = x - 2$ şi $R(x) = x + 2$

b) Folosind, eventual, rezultatul de la punctul *a* să se simplifice fracţia :

$$F(x) = \frac{x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8}{x^4 - 16}; \; x \in R - \{-2,2\}$$

4. Într-o piramidă triunghiulară $ABCD$ muchia CD este perpendiculară pe planul ABC. Se dă :

$$AB = CD = 4 \text{ cm}, \; AC = 3 \text{ cm şi } BC = 5 \text{ cm}.$$

a) Să se arate că $AD = BC$;

b) Să se afle aria totală şi volumul piramidei.

★

1. Să se rezolve ecuaţia :

$$\frac{x-1}{6} - \frac{x+2}{4} + \frac{1}{3} = \frac{x+5}{8} - 2. \text{ (Verificare)}$$

2. Se dă fracţia algebrică raţională :

$$F(x) = \frac{28x + a + 1}{2x - 3a + 7}.$$

a) Să se determine *a* ştiind că pentru $x = 1$ fracţia nu este definită.

b) Înlocuind în expresia lui $F(x)$ pe *a* cu valoarea găsită, să se determine valoarea lui *x* pentru care $F(x) = 0$

3. Să se rezolve prin metoda substituţiei sistemul de ecuaţii :

$$\begin{cases} p^2x + py + 1 = 0 \\ q^2x + qy + 1 = 0 \end{cases}$$ (necunoscutele sînt *x* şi *y*) Verificare.

4. Punctele A_1 şi A_2 avînd ordonatele egale cu $\frac{3}{16}$, sînt situate pe graficul funcţiei $y = 3x^2$.

a) Să se determine abscisele punctelor A_1 şi A_2.

b) Să se determine mulţimea valorilor lui a ştiind că punctul $M\left[3, \frac{1}{3}a(a-3)\right]$ este situat pe graficul funcţiei $y = \frac{2}{3}$.

5. Un trapez isoscel cu bazele de 7 cm şi 17 cm şi aria de 144 cm² se roteşte în jurul bazei mari. Să se afle volumul corpului de rotaţie obţinut.



1. Să se rezolve ecuaţia:

$$6x^2 - 5x + 1 = 0.$$

2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ \dfrac{2x}{3} + \dfrac{y}{2} = 5. \end{cases}$$

3. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1} : \frac{x-1}{x+1} - \frac{2x-2}{x+1} + 1.$$

4. Fără a efectua împărţirea, să se afle restul împărţirii polinomului:

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \quad \text{la} \quad (x+1).$$

5. Într-o piramidă patrulateră regulată latura bazei este de 10 dm, iar înălţimea piramidei este de 12 dm.

a) Să se afle aria totală şi volumul piramidei;

b) Tăiem piramida cu un plan paralel cu baza, a cărui distanţă de la vîrful piramidei este de 6 dm. Să se afle volumul şi aria laterală a trunchiului de piramidă care se formează.



1. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x, y) = \left(\frac{x^2+y^2}{x} + y\right)\left(y - \frac{y^2}{x-y}\right) : \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}.$$

Ce valoare are expresia pentru $x = 5$ şi $y = 2$?
Dar pentru $x = 7$ şi $y = 2$?

2. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{3}{4}(5x - 2) - \frac{1}{2}(3x + 4) = 1.$$

3. Într-un dreptunghi, o latură este de cinci ori mai mare decît cealaltă, iar aria dreptunghiului este de 80 cm ^{2}.
Se cer laturile dreptunghiului.

4. Ce diametru trebuie să aibă un copac, ca prin cioplire să se poată scoate din el un stîlp prismatic cu baza un pătrat, a cărei latură să fie de 3 dm?

5. Un cort are forma unei prisme patrulatere regulate, iar deasupra o piramidă regulată. Latura bazei este de 4 m, înălţimea prismei de 3,2 m şi înălţimea piramidei de 1,5 m. Pînza folosită pentru acest cort are lăţimea de 0,80 m.
Cîţi metri de pînză se vor folosi?



1. Să se simplifice fracţia algebrică:

$$F(x, y) = \frac{4x^2 - 1}{y(2x + 1) - 4x - 2}.$$

2. Să se rezolve ecuaţia:

$$F(x, 4) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

3. Să se determine mulţimea valorilor lui x pentru care:

$$F(x, 4) > \frac{1}{2}$$

4. Se consideră o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei de 6 cm şi înălţimea de 4 cm. Se cere:

a) Apotema piramidei;

b) Aria laterală a piramidei;

c) Aria totală a piramidei;

d) Volumul piramidei.

5. Să se simplifice fracţia algebrică:

$$F(x, y) = \frac{x^3 + x^2y - x - y}{(x^2 + 2xy + y^2)(x - 1)}.$$

6. Să se rezolve ecuaţia:

$$F(x, 2) = 0.$$

7. Să se determine mulţimea valorilor lui x pentru care:

$$\frac{x+1}{x+2} \leqslant 3.$$

8. Într-o sferă cu raza 45 cm se face o secţiune cu un plan situat la 3 cm de centrul sferei. Să se afle:

a) Baza cercului de secţiune;

b) Volumul conului care are vîrful în centrul sferei, iar ca bază cercul de secţiune.

9. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{x-1} : \dfrac{4}{y-1} = 25 : 24 \\[2ex] \dfrac{2}{x+1} : \dfrac{3}{y+1} = 7 : 12 \end{cases}$$

10. Să se simplifice fracţia:

$$F(a, x) = \frac{ax - 6 + 3x - 2a}{ax + 6 - 3x - 2a}.$$

11. Să se determine valorile întregi ale lui a pentru care $F(a, x)$ este un număr întreg.

12. Să se determine valorile lui a pentru care:

$$F(a, x) < 3.$$

13. Se consideră un cilindru circular drept cu raza de 3 cm şi înălţimea de 4 cm.

a) Să se afle raza sferei ce are acelaşi volum cu al cilindrului dat.

b) Să se afle volumul prismei patrulatere regulate înscrise în cilindrul dat.



1. Să se determine m, astfel ca polinomul:
$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x + m$, să fie divizibil cu binomul $(x - 3)$.

2. Se dă expresia $E(x) = \dfrac{x^3 - 8 - 6x^2 + 12x}{x^2 + 4 - 4x}$. Se cere:

a) să se aducă la forma cea mai simplă;

b) pentru ce valoare a lui x, $E(x) = 0{,}27$.

3. Stabiliţi pe cale grafică natura sistemului:

$$\begin{cases} y = 14x \\ \dfrac{1}{2}y - 3x = 2 \end{cases}$$

În caz de compatibilitate aflaţi soluţia.

4. Un tetraedru regulat are muchia de 3 cm. Se cere:

a) Înălţimea tetraedrului;

b) Volumul tetraedrului;

c) Volumul conului circumscris.



1. Se consideră expresia:

$$E(x) = \left(x - \frac{4x}{x+1} + 1\right) : \left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1}\right)$$

a) Să se stabilească mulţimea valorilor lui x pentru care expresia dată are sens.

b) Să se arate că forma cea mai simplă la care poate fi adusă expresia este $E(x) = x - 1$.

c) Să se găsească mulţimea numerelor reale negative pentru care avem:

$$E(x) \geqslant -5$$

2. Un con circular drept şi o piramidă patrulateră regulată au acelaşi vîrf iar baza piramidei este înscrisă în cercul de bază al conului. Ştiind că raza conului este $R = 3$ cm iar generatoarea este $G = 5$ cm, se cere:

a) Figura corespunzătoare enunţului;

b) Aria laterală a conului;

c) Aria totală a conului;

d) Volumul conului;

e) Latura pătratului bază;

f) Volumul piramidei.



1. Se dă expresia:

$$E(x) = \left[\left(\frac{125x^3+1}{5x+1} - \frac{15x - 75x^2}{5x-1} - 20x\right) + 2(5x-1)\right] \cdot \frac{1}{5x-1}.$$

Să se arate că forma cea mai simplă a expresiei este:

$$E(x) = 5x + 1$$

2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2(x+1) = 3(y-1) + 14 \\ 4x - 3 \cdot (2x + y - 1) = 2(-x + y) + 8. \end{cases}$$

3. Să se rezolve ecuaţia:

$$(x-a)^2 + (x-b)^2 = a^2 + b^2.$$

4. Raportul dintre aria laterală şi cea totală a unui cilindru circular drept este $\frac{4}{7}$, iar diametrul bazei cilindrului este cu 4 centimetri mai mare ca generatoarea.

Să se afle aria totală şi volumul cilindrului.



1. Se dau expresiile:

$$E(x, y) = \frac{6x^2 + 5xy + y^2}{2x + y}$$

$$F(x, y) = \frac{3x^2 + 2xy + y^2}{3x - y}.$$

a) Să se aducă expresiile date la forma cea mai simplă atît prin simplificarea fracţiilor cît şi prin împărţirea directă a numărătorilor la numitori;

b) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} E(x, y) = 4 \\ F(x, y) = 2 \end{cases}$$

2. Un trapez dreptunghic $ABCD$ ($A = 90°$, $B = 90°$) este aşezat cu baza AD în planul P, care face un unghi diedru de 60° cu planul trapezului.

a) Ce fel de patrulater este proiecţia $AB'C'D$ a patrulaterului dat în planul P;

b) Să se afle aria şi volumul corpului $ABB'CC'D$ cunoscînd: $AB = 10$ cm, $AD = 18$ cm, $BC = 12$ cm; B' şi C' sînt proiecţiile lui B şi C pe planul P.

3. Se dă expresia :

$$E(x) = \frac{x - 2a}{a^2x + 2ax - 2a^3 - x^2}$$

a) Să se aducă $E(x)$ la forma cea mai simplă ;

b) Să se rezolve ecuaţia : $E(x) = \frac{a^2 - x}{a^4}$.

4. Se dă un triunghi dreptunghic ABC ($A = 90°$) cu o catetă de 8 cm şi proiecţia ei pe ipotenuza de 6,4 cm. Să se afle aria şi volumul corpului obţinut prin rotaţia triunghiului dat în jurul unei drepte paralele cu ipotenuză şi care trece prin vîrful A.



1) Dacă $x^2 = a$; $y^2 = b$, $x + y = c$, fără a calcula pe x şi y, să se calculeze $x-y$; xy; $\frac{x}{y}$ ($a \neq 0$; $b \neq 9$; $c \neq 0$).

2) Se dă o prismă dreaptă cu baza un trapez dreptunghic $ABCD$ ($\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$) cu diagonala AC perpendiculară pe latura neparalelă CD. Linia mijlocie a trapezului, MN, taie diagonalele AC şi BD respectiv în P şi Q ($M \in AB$). Ştiind că $PQ = 4$ cm, $BC = 8$ cm, ce cer:

a. Linia mijlocie a trapezului şi baza mare a acestuia.

b. Celelalte două laturi ale trapezului şi aria sa.

c. Aria şi volumul prismei, dacă înălţimea ei este 10 cm.

3) Dacă $P = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz$, să se arate că $2P$ este o sumă de 3 pătrate.

4). Se consideră un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu laturile bazei $AB = a$ şi $BC = b$. Să se demonstreze că, dacă înălţimea paralelipipedului este $AA' = \sqrt{2ab}$, diagonala paralelipipedului este egală cu suma a două laturi alăturate ale bazei.

5) Să se rezolve ecuaţia :

$$\frac{\left[\left(4{,}625 - \frac{13}{8} \cdot \frac{9}{26}\right) : x + (2{,}5 : 1{,}25) : 6{,}75\right] : 1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2} - 0{,}375\right) : 0{,}125 + \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12}\right) : (0{,}358 - 1{,}4796 : 13{,}7)} = \frac{17}{27}$$



1). O brigadă de tractorişti a arat 180 ha mai mult decît o altă brigadă, iar $\frac{2}{5}$ din terenul arat de prima brigadă fac cît

22 – c. 1782

$\frac{4}{9}$ din terenul arat de cealaltă brigadă. Cîte hectare a arat fiecare brigadă?

2). Un trunchi de con are generatoarea de 26 cm, raza bazei mari de 15 cm şi înălţimea de 24 cm.

a). Să se determine volumul şi aria totală a trunchiului de con.

b). Să se calculeze volumul conului din care provine trunchiul de con.

c). Să se determine raza sferei circumscrise conului din care provine trunchiul de con.

3). Se dă expresia

$$E=\left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+1+\frac{2x-2}{x+1}\right]\cdot\frac{x^3+1+3x+3x^2}{16x^2}.$$

a). Să se arate că forma cea mai simplă la care poate fi adusă E este $\frac{x+1}{4}$.

b). Pentru ce valori ale lui x, numere întregi, expresia devine număr întreg.

c). Să se determine mulţimea valorilor lui x astfel încît expresia $\frac{x+1}{x-1}$ să ia valori pozitive.



1). Într-un cerc O se consideră două diametre perpendiculare AB şi CD. Fie E un punct oarecare situat pe OB (între O şi B). Dreapta CE intersectează cercul a doua oară în punctul F. Tangenta în F la cerc taie dreapta AB în G şi dreapta CD în H.

a) Să se arate că unghiurile OCE şi EFG sînt complementare.

b) Să se demonstreze că triunghiul EFG este isoscel.

c) Ce măsură trebuie să aibă unghiul OCE pentru ca triunghiul EFG să fie echilateral?

2) Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{(2,7-0,8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5,2-1,4):\frac{3}{7}}+x+8\frac{9}{11}-\frac{(1,6+154,66:70,3):1,9}{\left(2\frac{2}{5}-1,3\right):4,3}=2,625$$

PARTEA A DOUA

Capitolul 13

LOGICA MATEMATICĂ

13.1. LOGICA PROPOZIŢIILOR

Notăm cu litera A şi uneori cu 1 valoarea unei propoziţii simple adevărate şi cu F sau cu 0 valoarea unei propoziţii false (1 şi 0, ca şi A sau F, sînt aici doar semne convenţionale).

Din mai multe propoziţii simple $p, q, r, s, t, \ldots$ putem forma cu ajutorul operaţiilor $\wedge, \vee, -, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ propoziţiile compuse:

$$p \wedge q, p \vee q, \bar{p}, p \Rightarrow q, p \Leftrightarrow q.$$

Din aceste propoziţii aplicînd din nou operaţiile: „$\wedge, \vee, -, \Rightarrow, \Leftrightarrow$" se pot obţine noi propoziţii compuse ca de exemplu:

$$\overline{(p \wedge q)} \Rightarrow (p \vee q); p \Rightarrow q \vee (p \wedge q).$$

13.2. ORDINEA OPERAŢIILOR LOGICE

O propoziţie compusă poate fi redusă la o formă mai simplă dacă se aplică anumite reguli convenţionale referitoare la ordinea în care se efectuează anumite operaţii logice precum şi anumite convenţii de suprimare a parantezelor efective. Convenţia este: Negaţia leagă mai tare decît conjuncţia şi disjuncţia, iar conjuncţia leagă mai tare decît disjuncţia.

Ca urmare a acestei convenţii, într-o formulă logică unele paranteze pot fi suprimate, ţinînd însă seamă ca ordinea termenilor să respecte convenţia precedentă.

De exemplu în loc de a scrie: $((\bar{p} \Rightarrow q) \wedge r) \vee s$, vom scrie: $(\bar{p} \Rightarrow q) \wedge r \vee s$, înţelegînd că avem o disjuncţie ai cărei termeni

sînt propoziţia compusă $(\bar{p} \Rightarrow q) \wedge r$ şi propoziţia elementară s. Vom reaminti pe scurt tabelele de adevăr ale conjuncţiei, disjuncţiei, negaţiei, implicaţiei şi echivalenţei, care au fost date cu valorile A şi F în prima parte a lucrării.

Disjuncţia

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Conjuncţia

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Implicaţia

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Negaţia

p	$\bar{p}$
0	1
1	0

Echivalenţa

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

13.3. IMPLICAŢIA LOGICĂ

Într-o implicaţie de forma $p \Rightarrow q$ (vezi partea întîi), propoziţia p se numeşte *ipoteză* iar propoziţia q se numeşte *concluzie* sau consecventul implicaţiei.

Dacă implicaţia $p \Rightarrow q$ este adevărată atunci p se mai numeşte condiţie suficientă pentru q, iar q se numeşte condiţie necesară pentru p.

În matematică teoremele sînt enunţate sub forma unei implicaţii.

Dată fiind o implicaţie $p \Rightarrow q$ care poate fi adevărată sau falsă putem forma şi altă implicaţie folosind negaţia şi schimbînd locul propoziţiilor din implicaţie.

Să considerăm propoziţia compusă:

$$(p \wedge q) \Rightarrow r$$

Să presupunem că valoarea logică a propoziţiei p este A, a propoziţiei q este F şi a lui r este A.

Valoarea logică a propoziţiei de mai sus poate fi scrisă sub forma:

$$(A \wedge F) \Rightarrow A \text{ sau } (1 \wedge 0) \Rightarrow 1.$$

Ţinînd seamă de valorile logice ale conjuncţiei, disjuncţiei şi implicaţiei de mai sus, valoarea logică a propoziţiei compuse este 1, deoarece valoarea logică a propoziţiei $1 \wedge 0$ este 0, iar a propoziţiei $0 \Rightarrow 1$ este 1.

Se numeşte formulă, orice propoziţie compusă formată din propoziţiile iniţiale simple $p, q, r, s, \ldots$ prin aplicarea de un număr finit de ori a operatorilor: $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ şi $-$.

13.4. FORMULE IDENTIC ADEVĂRATE ŞI IDENTIC FALSE

1. Se numeşte identic adevărată o formulă care este adevărată oricare ar fi valorile logice ale propoziţiilor componente.

O formulă identic adevărată se mai numeşte tautologie.

Exemplu: $x \vee \bar{x}$, $(x \vee y) \Rightarrow x$.

Propoziţia $x \vee \bar{x}$ este adevărată oricare ar fi valoarea logică a propoziţiei x. Dacă valoarea logică a lui x este A atunci valoarea logică a lui $\bar{x}$ este F şi prin urmare valoarea logică a propoziţiei $x \vee \bar{x}$ poate fi scrisă:

$A \vee F$ şi are valoarea logică A.

Dacă valoarea lui x este F, atunci valoarea lui $\bar{x}$ este A şi, prin urmare, valoarea propoziţiei $x \vee \bar{x}$ poate fi scrisă $F \vee A$ şi are valoarea logică A.

Prin urmare valoarea logică a propoziţiei $x \vee \bar{x}$ este A.

2. O formulă este realizabilă dacă este adevărată pentru unele valori logice ale propoziţiilor componente.

Exemple: $(\bar{x} \wedge \bar{y}) \Rightarrow z$, $xy \vee zy$.

3. Se numeşte identic falsă o formulă care este falsă oricare ar fi valorile logice ale propoziţiilor componente.

Exemple: $(x \wedge \bar{x}) \vee (y \wedge \bar{y})$, $(\bar{x} \vee x) \Rightarrow (x \wedge \bar{x})$.

Dacă valoarea logică a propoziţiei x este adevărul atunci valoarea logică a propoziţiei $\bar{x}$ este falsul. Prin urmare valoarea logică a propoziţiei $x \wedge \bar{x}$ poate fi scrisă

$$A \wedge F$$

şi are valoarea logică F.

Valoarea logică a propoziţiei $y \wedge \bar{y}$ este falsul, F, oricare ar fi valorile logice ale propoziţiei y.

Fie formulele:

$$\overline{x \wedge y} \text{ şi } \bar{x} \vee \bar{y}.$$

Să alcătuim tabelele lor de adevăr.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x \wedge y$	$\overline{x \wedge y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1

Prin urmare formulele $\overline{x \wedge y}$ şi $\bar{x} \vee \bar{y}$ primesc aceleaşi valori de adevăr.

Observaţie. Într-o formulă propoziţiile simple pot fi constante, adică avînd o valoare logică determinantă, sau variabile. Dacă vom atribui valori logice tuturor propoziţiilor variabile, atunci formula va lua o valoare logică determinantă.

Definiţie. Două formule notate S şi Q, formate din propoziţiile simple variabile $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, se numesc echivalente, dacă pentru orice valori de adevăr ale lui $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ aceste formule iau aceleaşi valori de adevăr. Se notează $S \Leftrightarrow Q$, se citeşte „formula S este echivalentă cu formula Q".

Formulele $x \Leftrightarrow y$ şi $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$ au aceleaşi valori de adevăr pentru orice valori de adevăr ale propoziţiilor simple componente. Prin urmare putem scrie:

$$(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y).$$

În mod asemănător avem relaţiile:

$$\overline{x \wedge y} \Leftrightarrow \bar{x} \vee \bar{y},$$

$$\overline{x \vee y} \Leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y},$$

cunoscute sub denumirea de **legile lui De Morgan.**

Alte exemple:

1) $p \Leftrightarrow p$;

2) $(p \wedge \bar{p}) \vee y \Leftrightarrow y$;

3) $(p \vee \bar{p}) \wedge p \Leftrightarrow p$;

4) $(\overline{x \vee \bar{x}}) \Leftrightarrow \bar{x} \wedge x$.

Dacă într-o formulă înlocuim o parte a ei cu o formulă echivalentă, obţinem o formulă echivalentă cu cea iniţială.

Exemplu :

1. Să considerăm formula :

$$S \Leftrightarrow \overline{(x \wedge \bar{y})} \vee \overline{(\bar{x} \wedge y)} \Leftrightarrow x \vee \bar{x}.$$

Să observăm că : $\overline{(x \wedge \bar{y})} \Leftrightarrow \bar{x} \vee y,$

$$\overline{(\bar{x} \wedge y)} \Leftrightarrow x \vee \bar{y}.$$

Înlocuim în formula S şi obţinem formula :

$$S' \Leftrightarrow (\bar{x} \vee y) \vee (x \vee \bar{y}) \Leftrightarrow \bar{x} \vee x.$$

Formulele S şi S' sînt adevărate pentru orice valori de adevăr atribuite variabilelor x şi y.

2. Să se arate că propoziţiile $(x \wedge \bar{x}) \vee (y \wedge \bar{y})$, $(x \vee \bar{x}) \Rightarrow (x \wedge \bar{x})$ au valoarea F.

Valoarea logică a propoziţiei $(x \wedge \bar{x}) \vee (y \wedge \bar{y})$ poate fi scrisă

$$F \vee F.$$

Prin urmare propoziţia $(x \vee \bar{x}) \wedge (y \wedge \bar{y})$ are valoarea logică F oricare ar fi valorile logice ale propoziţiilor componente.

Propoziţia $x \wedge \bar{x}$, aşa cum s-a arătat mai sus, are valoarea logică F, oricare ar fi valoarea logică a propoziţiei x.

Propoziţia $\bar{y} \vee y$ are valoarea logică A, oricare ar fi valoarea logică a propoziţiei y. Valoarea logică a propoziţiei $(\bar{x} \vee x) \Rightarrow (y \wedge \bar{y})$ poate fi scrisă

$$A \Rightarrow F.$$

Prin urmare valoarea logică a propoziţiei $(\bar{x} \vee x) \Rightarrow (y \wedge \bar{y})$ este F oricare ar fi valorile logice ale propoziţiilor x şi y.

13.5. TABELE DE ADEVĂR

În cele ce urmează folosim formule ce conţin numai operaţiile : $\wedge$, $\vee$, pentru a alcătui tabele de adevăr ale unor propoziţii mai complicate.

Tabelul de adevăr al unei propoziţii arată pentru ce valori ale termenilor propoziţia este adevărată sau falsă.

Exemplul 1

Să se construiască tabelele de adevăr ale propoziţiilor :

$$x \Leftrightarrow y \text{ şi } (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x).$$

Folosind tabelele de adevăr se constată că cele două propoziţii au aceleaşi valori de adevăr:

$$(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x).$$

x	y	$x \Leftrightarrow y$	x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \vee y$	$\bar{y} \vee x$	$(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x)$
1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0

Exemplul 2.

Să se construiască tabelele de adevăr ale propoziţiilor :

1. $\overline{(x \wedge y)}$ şi $\bar{x} \vee \bar{y}$

2. $\overline{(x \vee y)}$ şi $\bar{x} \wedge \bar{y}$

13.6. FORME NORMALE

Operaţiile logice $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $-$, nu sînt indepedente. Ele pot fi exprimate una în funcţie de alta, astfel încît se obţin formule care sînt exprimate numai prin semnele operaţiilor $\wedge$, $-$ sau $\vee$.

Dacă o formulă conţine numai operaţiile $\wedge$, $\vee$, $-$ atunci, folosind regulile lui De Morgan, vom putea aduce această formulă la o formă echivalentă, astfel încît operaţia de negaţie să fie aplicată numai propoziţiilor simple.

Să considerăm formula :

$$\overline{(x \wedge y)} \wedge \overline{(x \wedge y \wedge z)}.$$

Aplicînd formula lui De Morgan obţinem :

$$(\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge \overline{(x \wedge y} \vee \bar{z}) = (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

Se numeşte produs elementar (respectiv sumă elementară) o formulă care conţine operaţia „$\wedge$" (respectiv „$\vee$") între variabilele simple şi negaţiile lor.

Exemple:

1. $\bar{p} \wedge q \wedge r \wedge \bar{s}$;

2. $\bar{q} \vee q \vee \bar{r} \vee s$.

Un produs elementar care conţine cel puţin o pereche de factori dintre care unul este negaţia celuilalt reprezintă o contradicţie.

Definiţie. Se numeşte forma normală conjunctivă a unei formule date, o formulă echivalentă cu ea, care este un produs de sume elementare.

Se numeşte formă normală disjunctivă a unei formule date, o formulă echivalentă cu ea şi care este o sumă de produse elementare.

Aducerea unei expresii la formă normală se numeşte normalizare.

Exemplu:

Să se găsească forma normală disjunctivă a formulei:

$$(x \wedge y) \vee (y \Rightarrow x).$$

Se elimină mai întîi semnul $\Rightarrow$ folosind echivalenţa:

$$(y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (\bar{y} \vee x).$$

Obţinem:

$$(x \wedge y) \vee (y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (\bar{y} \vee x) \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee \bar{y} \vee x.$$

Pe baza relaţiei: $(x \wedge y) \vee x \Leftrightarrow x$, putem scrie:

$(x \wedge y) \vee (y \Rightarrow x) \Leftrightarrow x \vee \bar{y}$, care este o formă normală disjunctivă.

13.7. PRINCIPII LOGICE

Algebra propoziţiilor este legată de regulile care guvernează actele gîndirii umane.

Dată fiind o implicaţie $P \Rightarrow Q$ care poate fi adevărată sau falsă, putem forma următoarele implicaţii derivate, de asemeni adevărate sau false, schimbînd între ele propoziţiile componente şi folosind negaţia: $Q \Rightarrow P$, $\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$ şi $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$.

Implicaţia $Q \Rightarrow P$ se numeşte reciproca implicaţiei $P \Rightarrow Q$, implicaţia $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$, se numeşte contrapoziţia implicaţiei $P \Rightarrow Q$.

Observăm că este posibil ca implicaţia iniţială să fie adevărată, dar reciproca ei să fie falsă. Avem însă următorul rezultat important, folosit adesea în matematică.

13.7.1. LEGEA CONTRAPOZIŢIEI

Orice implicaţie are aceeaşi valoare logică ca şi contrapoziţia ei. Datorită acestui fapt este permis ca, pentru demonstrarea unei teoreme date sub forma unei implicaţii, să demonstrăm contrapoziţia implicaţiei.

13.7.2. TAUTOLOGII

Unele propoziţii compuse sînt adevărate oricare ar fi valorile logice ale componentelor lor. De exemplu: $p \vee \bar{p}$, $\overline{p \wedge \bar{p}}$, $\bar{p} \vee (p \vee q)$ etc. Astfel de propoziţii compuse se numesc tautologii.

13.7.3. CONSECINŢE LOGICE

Principala problemă a logicii este stabilirea metodelor corecte de demonstrare, adică de obţinere a unor propoziţii adevărate din alte propoziţii, despre care ştim că sînt adevărate sau admitem că sînt adevărate.

Fiind date propoziţiile compuse $A_1, A_2, \ldots, A_n$, care depind de propoziţiile simple $P_1, P_2, \ldots, P_m$, spunem că propoziţia compusă B, care depinde şi ea de propoziţiile simple $P_1, P_2, \ldots, P_m$, este consecinţa logică a propoziţiilor $A_1, A_2, \ldots, A_n$, dacă, pentru orice sistem de valori logice atribuite propoziţiilor $P_1, \ldots, P_m$, pentru care propoziţiile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ să fie toate adevărate, propoziţia B este adevărată. În această situaţie, propoziţiile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se numesc premise şi la un loc ele formează ipoteza, propoziţia B se numeşte concluzie. Se numeşte raţionament operaţia prin care o anumită concluzie B se constată a fi consecinţa logică a unor premise date, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sau utilizarea unei astfel de constatări.

Faptul că B este consecinţă logică a propoziţiilor compuse $A_1, A_2, \ldots, A_n$, se notează:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B.$$

13.7.4. MODUS PONENS

Este un mod de raţionament corect, bazat pe următoarea consecinţă logică:

$$P \Rightarrow Q, \quad P \models Q,$$

şi se poate enunţa astfel: dacă P implică Q şi dacă P este adevărată, atunci Q este adevărată.

13.7.5. MODUS TOLLENS

Este un mod de raţionament corect bazat pe următoarea consecinţă logică:

$$P \Rightarrow Q, \quad \bar{Q} \models \bar{P}$$

şi se poate enunţa astfel: dacă P implică Q şi dacă Q nu este adevărată, atunci P nu este adevărată.

13.7.6. ECHIVALENŢA LOGICĂ

Două propoziţii compuse A şi B, care depind de propoziţiile simple $P_1, P_2, \ldots, P_n$, sînt logic echivalente dacă, pentru orice atribuire de valori logice propoziţiilor simple $P_1, P_2, \ldots, P_n$, propoziţiile A şi B au aceeaşi valoare logică (adică sînt ambele adevărate sau ambele false). Scriem: $A \Leftrightarrow B$.
Propoziţiile compuse $\overline{(P \vee Q)}$ şi $\bar{P} \wedge \bar{Q}$ sînt echivalente, adică:

$$\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow |\bar{P}| \wedge |\bar{Q}|.$$

Propoziţiile compuse $\overline{(P \wedge Q)}$ şi $\bar{P} \vee \bar{Q}$ sînt şi ele echivalente, $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}$. Aceste două echivalenţe poartă numele lui De Morgan (matematician englez, 1806—1873). Se poate arăta cu ajutorul tabelelor de valori logice, că echivalenţele de mai sus au loc întradevăr.

13.7.7. DEMONSTRAŢIA PRIN ABSURD

Implică şi principiul „tertium non datur" după care o propoziţie este sau adevărată sau falsă. O altă situaţie nu este luată în considerare.

De multe ori, în matematică mai ales, se demonstrează adevărul unei propoziţii P arătînd că dacă ea nu este adevărată, adică dacă $\overline{P}$ este adevărată, se obţine o contradicţie, adică o propoziţie R, despre care se arată că atît ea, cît şi negaţia ei $\overline{R}$, sînt ambele adevărate. De aici se trage concluzia că P este adevărată. Acest mod corect de raţionament se obţine combinînd observaţia că formula:

$$(\overline{P} \Rightarrow (R \wedge \overline{R})) \Rightarrow P,$$

este o tautologie cu modus ponens; îndată ce am reuşit să demonstrăm că propoziţia $\overline{P} \Rightarrow (R \wedge \overline{R})$ este adevărată, modus ponens ne arată că P este adevărată.

Conjuncţia şi disjuncţia a două propoziţii corespund legăturilor logice ale operaţiilor exprimate prin „sau" şi „şi", iar operaţia de negare a unei propoziţii, negaţiei logice.

13.8. LOGICA PREDICATELOR

13.8.1. GENERALITĂŢI

Să considerăm următorul raţionament:

„Toţi oamenii sînt muritori",
„Marin este om"

„Marin este muritor"

Să notăm prima propoziţie cu p, a doua cu q şi a treia cu s. Dacă am încerca să găsim o formulă corespunzătoare pentru acest raţionament, atunci vom scrie:

$$(p \wedge q) \Rightarrow s \tag{1}$$

Corectitudinea raţionamentului de mai sus nu depinde însă numai de înlănţuirea logică a propoziţiilor date, ci şi de structura lor logică internă. De aceea formula (1) nu este satisfăcătoare pentru a descrie raţionamentul de mai sus. Să analizăm structura logică a propoziţiilor date.

Propoziţia p „Toţi oamenii sînt muritori", se compune din următoarele părţi:

1) Subiectul „oameni";

2) Cuvîntul „muritori";

3) Cantitatea „toţi";

4) Verbul „sînt".

Structura acestei judecăţi poate fi redată schematic astfel:

$T \cdot S \rightarrow P$.

T — este prescurtarea cuvîntului toţi;

S — este prescurtarea cuvîntului subiect;

$\rightarrow$ (săgeata) — este prescurtarea verbului sînt;

P — este prescurtarea cuvîntului muritori.

În propoziţia „oamenii sînt muritori", noţiunea om este subiect, iar noţiunea muritori este predicat logic. În acest caz avem o proprietate *muritori* care este afirmaţia despre ceva. Vom spune că proprietatea este desemnată de un predicat logic, iar cea despre care este afirmată proprietatea respectivă se numeşte subiect logic.

Dacă notăm subiectele cu literele $x, y, z, \ldots$ şi însuşirile cu $P, Q, R, \ldots$, atunci atribuirea unei însuşiri P obiectului sau individului x, va fi notată $P(x)$. În exemplul nostru predicatul P este *muritor* iar x, subiectul logic, este *om*. Vom spune că $P(x)$ este o funcţie de o variabilă individuală, x.

Prin urmare cu $P(x)$ se notează o funcţie logică despre subiectul x. Valoarea de adevăr a acestei funcţii depinde în mod evident de valoarea concretă a subiectului.

Funcţia logică $P(x)$ ia numai două valori de adevăr: adevărul, notat cu A, şi falsul, notat cu F.

Dar, spre deosebire de algebra propoziţională, vom considera aici că valorile A şi F sînt puse în corespondenţă cu anumite obiecte.

Să considerăm funcţia:

„x este un număr prim" pe care-o putem desemna simbolic $P(x)$.

$P(x)$ reprezintă F dacă este pus în corespondenţă cu numărul 6.

$P(x)$ reprezintă A dacă este pus în corespondenţă cu numărul 3.

Să considerăm funcţia:

$f(x, y)$: „x este multiplu al numărului y".

Valoarea de adevăr a acestei propoziţii o putem stabili numai după ce cunoaştem ce numere sînt x şi y.

Dacă x este numărul 6, iar y numărul 3, atunci $f(6, 3)$: „6 este multiplul numărului 3", este o propoziţie determinată care are valoarea A.

Fie M o mulţime arbitrară nevidă, iar x un anumit obiect din această mulţime.

Expresia $P(x)$ este o funcţie logică care devine o propoziţie determinată atunci cînd x se înlocuieşte cu un element din M.

Un predicat logic $P(x)$ este o funcţie logică definită pe o mulţime dată M, care ia valori în domeniul valorilor de adevăr (adevărul A sau falsul F).

Exemple de predicate:

$(3x + 5y = 3) \wedge (9x + 15y = 9)$,

$(2x + 3y = 5) \wedge (6x - y = 5)$,

$(2x + 4y = 1) \wedge (4x + 2y = 6)$.

13.8.2. CUANTIFICATORII „ORICARE" ŞI „EXISTĂ"

Din explicaţiile precedente rezultă că este uneori o necesitate logică să arătăm că *există* valori dintr-o mulţime M dată pentru care o anume propoziţie este adevărată sau, eventual, că pentru *orice* valori din M propoziţia este adevărată. Pentru prima situaţie folosim semnul $\exists$, pentru a doua semnul $\forall$.

1. Să considerăm predicatul:

$F(x)$: „x este un număr real pozitiv", definit pe mulţimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Avem: $F(1)$ este adevărată, $F(2)$ este adevărată, $F(3)$ este adevărată. Cu alte cuvinte conjuncţia: $F(1) \wedge F(2) \wedge F(3) \wedge F(4) \wedge F(5) \ldots$ este adevărată.

Formula aceasta devine foarte dificil de transcris dacă x primeşte o mulţime mare de valori. Pentru a evita aceasta vom scrie: $\forall x, F(x)$ şi se citeşte „oricare ar fi (pentru toţi) $x, F(x)$", care arată faptul că $F(x)$ este întotdeauna adevărată oricare ar fi x, aparţinînd unei mulţimi.

2. Să considerăm predicatul:

$F(x)$: „x este un număr prim", definit pe mulţimea:

$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 13\}$.

Dacă înlocuim pe x pe rînd cu elementele lui M, putem obţine o propoziţie determinată care poate fi adevărată sau falsă.
Aceasta înseamnă că cel puţin una din propoziţiile:

$F(1), F(2), F(3), F(4), \ldots, F(13)$ este adevărată şi prin urmare propoziţia:

$F(1) \vee F(2) \vee F(3) \vee \ldots \vee F(13)$ este adevărată.

Pentru a simplifica această scriere se foloseşte relaţia: $\exists x, F(x)$ şi se citeşte „există un $x \in M$ pentru care $F(x)$ este adevărată".

3. Prin aplicarea consecutivă a operaţiilor $\exists$ şi $\forall$ se pot obţine propoziţii adevărate sau false.

Fxemple:

a. Să considerăm predicatul $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$; $x,y \in R$.
$\forall x, \forall y, (x + y)^2 = (x^2 + 2xy + y^2)$.

Pentru orice x şi pentru orice y, $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Această propoziţie este adevărată.

b. $\forall a, \exists x, x + a = 5$, este o propoziţie adevărată dacă domeniul, de definiţie al predicatului $x + a = 5$ este mulţimea numerelor reale.

a) *Definiţie.* Fie $f(x)$ un predicat care ia valoarea A sau F pentru fiecare element x al unei mulţimi M.

Expresia $\forall x, f(x)$ este o propoziţie adevărată atunci cînd $f(x)$ este adevărat pentru orice element $x \in M$ şi falsă în caz contrar. Simbolul $\forall x$ se numeşte *cuantificator universal.*

b) *Definiţie.* Fie $f(x)$ un predicat care ia valoarea A sau F pentru fiecare element x al unei mulţimi M.

Dacă expresia $\exists x, f(x)$ este o propoziţie adevărată, simbolul $\exists x$ se numeşte *cuantificator existenţial.*

Cuantificatorii $\forall$, $\exists$ se numesc duali.

Cuantificatorii definiţi în acest paragraf se referă la elementele unei mulţimi determinate M.

Vom spune că în formulele $\forall x, f(x)$ şi $\exists x, f(x)$ variabila x este legată prin cuantificatorul respectiv.

Se numeşte variabilă liberă, o variabilă individuală care nu este legată prin nici un cuantificator.

Logica predicatelor include atît propoziţiile elementare, considerate ca luînd două valori de adevăr, operaţiile din calculul propoziţional, dar şi raportarea propoziţiilor la obiecte.

13.8.3. NOŢIUNEA DE FORMULĂ ÎN LOGICA PREDICATELOR

Să introducem următoarele specificări:

1) $x, y, z, \ldots$ desemnează elementele nedeterminate ale unei mulţimi variabile individuale.

2) $a, b, c, \ldots$ desemnează elementele determinate ale mulţimii şi se numesc constante individuale.

3) $A, B, C, \ldots$ sînt propoziţii variabile care iau două valori logice (A sau F).

4) $F(x), G(x), \ldots$ desemnează predicate, adică funcţii.

Se numesc propoziţii elementare, propoziţiile variabile, constantele, precum şi expresiile $F(a)$, $G(b)$, ... unde F şi G sînt predicate, iar a şi b obiecte individuale.

Se numesc formule elementare variabilele care iau două valori A şi F şi predicatele de obiecte izolate cît şi variabilele individuale.

Două sau mai multe predicate pot fi legate între ele prin semnele operaţiilor logice $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$.

Exemple

Dacă considerăm predicatele $A(x)$, $F(x)$, $B(x, y)$, $G(x, y)$, atunci, aplicînd operaţiile $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $-$, se pot obţine noi predicate:

$$A(x) \vee F(x), \quad B(x, y) \Rightarrow G(x, y).$$

Se demonstrează că toate echivalenţele care au loc în logica propoziţiilor se transferă şi în logica predicatelor.

Exemple:

Dacă $S(x)$ şi $G(x)$ sînt predicate, atunci:

$$(S(x) \Rightarrow G(x)) \Leftrightarrow (\overline{S(x)} \vee G(x)).$$

Dacă $A(x)$ şi $B(y)$ sînt două predicate, atunci avem echivalenţa:

$$\exists\, x(A(x) \Rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \exists\, x(\overline{A(x)} \vee B(x)).$$

Se citeşte: Propoziţia „există x pentru care $A(x)$ implică pe $B(x)$" este echivalentă cu propoziţia „există x pentru care avem non $A(x)$ sau $B(x)$".

13.8.4. NEGAŢIA CUANTIFICATORILOR EXISTENŢIALI ŞI UNIVERSALI

Să considerăm propoziţia:

„$\forall\, x$, $S(x)$ este falsă", care este echivalentă cu propoziţia „$\exists\, y$, $S(y)$ este falsă"

Propoziţia „$\forall\, x$, $S(x)$ este falsă" este echivalentă cu propoziţia

„există un element y pentru care $S(y)$ este falsă“ ceea ce este echivalent cu propoziţia „există un element y pentru care $\overline{S(y)}$ este adevărată“. Prin urmare, putem scrie echivalenţele :

$$\overline{\forall x, S(x)} \Leftrightarrow \exists y, \overline{S(y)}$$

$$\overline{\exists x, S(x)} \Leftrightarrow \forall y, \overline{S(y)}$$

Semnul negaţiei poate fi introdus sub semnul cuantificatorului înlocuindu-l pe acesta cu dualul său.

Exemple :

Să se aducă la forma normală formula :

$$\overline{\forall x, S(x) \Rightarrow \forall y, Q(y)}.$$

Vom elimina la început semnul implicaţiei şi vom obţine :

$$\overline{\overline{\forall x, S(x)} \vee \forall y, Q(y)} \Leftrightarrow \overline{\overline{\forall x, S(x)}} \wedge \overline{\forall y, Q(y)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x, S(x) \wedge \overline{\forall y, Q(y)} \Leftrightarrow \forall x, S(x) \wedge \exists y, \overline{Q(y)}.$$

13.8.5. SCHEME CU CONTACTE ŞI SEMNIFICAŢIA LOR LOGICĂ

Un contact electric poate avea două stări : închis sau deschis (fig. 13.1).



Fig. 13.1

Vom face să corespundă acestor două stări două valori : 1 (adevărul), dacă contactul este închis, şi 0 (falsul), dacă contactul este deschis.

Se numeşte sumă a două contacte, $a+b$, circuitul care se obţine prin legarea în paralel a celor două contacte a şi b (fig. 13.2).

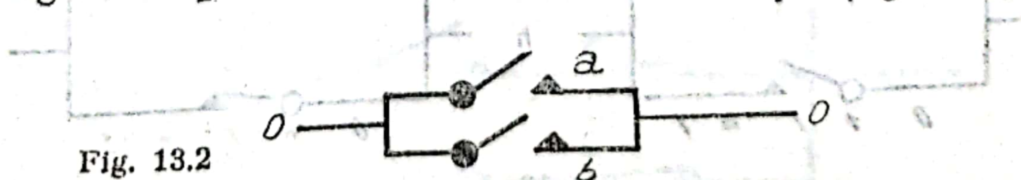


Fig. 13.2

23 – c. 1782

Se numeşte produsul a două contacte $a \cdot b$ circuitul ce se obţine prin legarea în serie a celor două contacte (fig. 13.3).

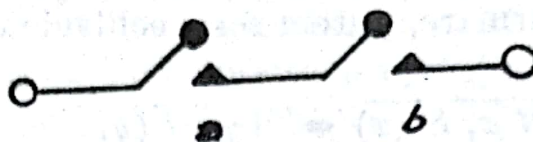


Fig. 13.3

Se verifică uşor următoarele relaţiile din figura 13.4 :

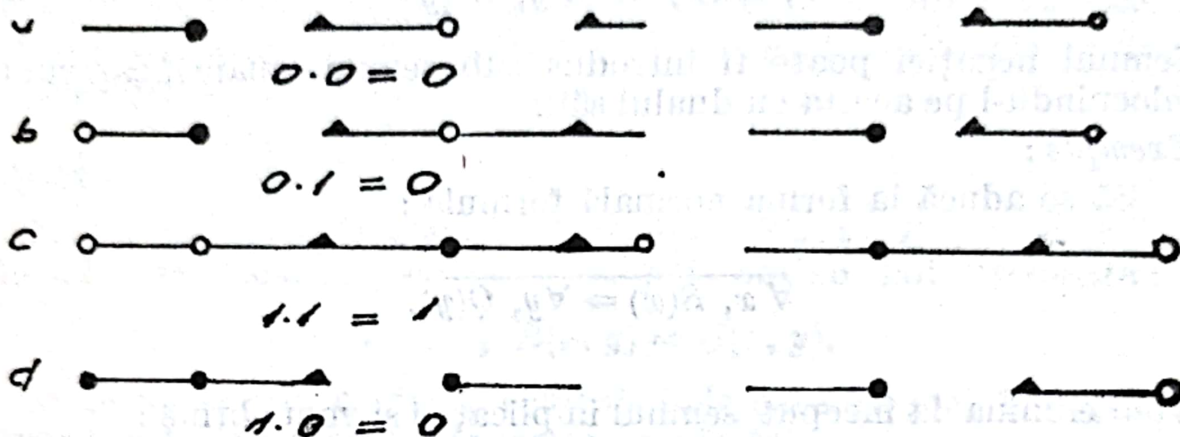


Fig. 13.4

a — un contact deschis, legat în serie cu un contact deschis este echivalent cu un contact deschis ;

b — un contact deschis, legat în serie cu un contact închis, este echivalent cu un contact deschis ;

c — un contact închis, legat în serie cu contact închis, este echivalent cu un contact închis ;

d — un contact închis, legat în serie cu un contact deschis, este echivalent cu un contact deschis.

Folosind acelaşi procedeu se verifică şi relaţiile (fig. 13.5) :

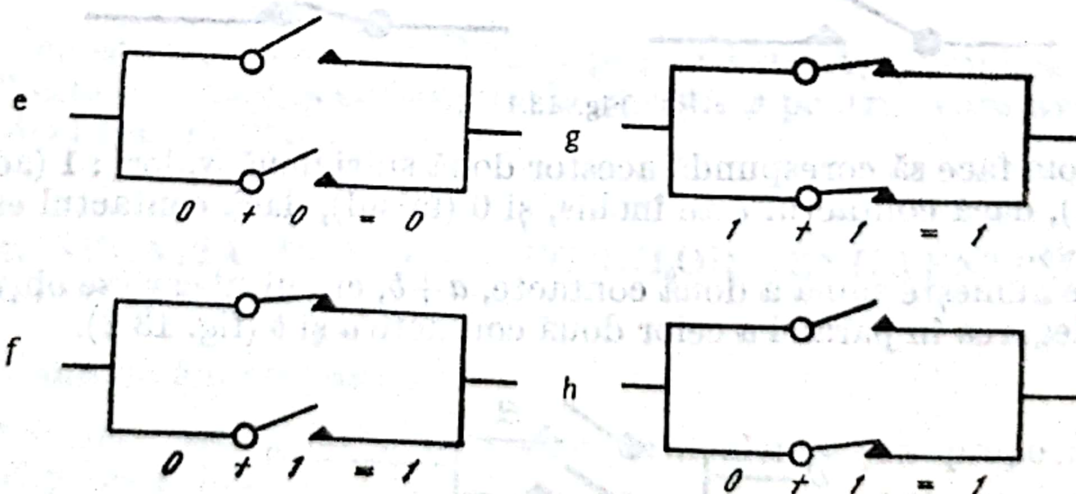


Fig. 13 .5

e — un contact deschis legat în paralel cu un contact deschis este echivalent cu un contact deschis;

f — *h* — un contact închis, legat în paralel cu un contact deschis, este echivalent cu un contact închis;

i — un contact închis legat în paralel cu un contact închis este echivalent cu un contact închis.

Există o corespondență strînsă între algebra contactelor și algebra propozițiilor logice.

Schema cu contacte în serie poate fi reprezentată prin conjuncția logică, iar schema cu contacte în paralel prin disjuncție.

Corespondența dintre algebra propozițiilor și algebra contactelor ne permite să modelăm propoziții compuse cu ajutorul circuitelor, făcînd să corespundă unei propoziții un contact, disjuncției a două propoziții $p \vee q$ suma contactelor p și q, conjuncției a două propoziții produsul contactelor p și q, iar negației unei propoziții p contactul, notat $\bar{p}$, care este închis cînd p este deschis și deschis cînd p este închis.

Exemplu

Să se alcătuiască o schemă cu contacte care să modeleze propoziția compusă $p \wedge (q \vee s)$.

Soluție:

Să notăm cu p', q', s', contactele corespunzătoare acestor propoziții și vom avea: $p'(q' + s')$. Contactul p' este legat în serie cu suma contactelor q' și s'. Contactele q' și s' sînt legate în paralel (fig. 13.6).

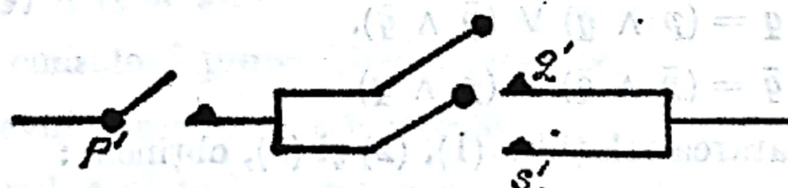


Fig. 13.6

În cele ce urmează vom nota propozițiile și contactele corespunzătoare prin aceleași litere.

13.8.6. EXERCIȚII REZOLVATE

1. Să se simplifice circuitul din figura 13.7.

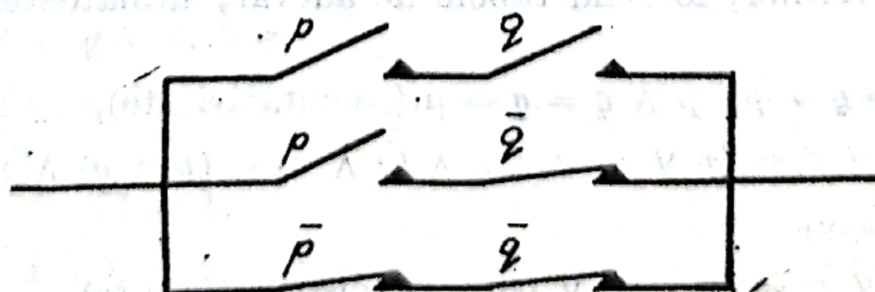


Fig 13.7

Soluție:

Formula realizată la ieșire este:

$x = (p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$.

Aplicăm proprietatea de distributivitate a conjuncției față de disjuncție și obținem:

$x = p \wedge (q \vee \bar{p}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$,

$x = (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) = p \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$,

$x = (p \vee \bar{p}) \wedge (p \vee \bar{q}) = p \wedge \bar{q}$.

2. Se consideră operația logică, notată $\oplus$, dată prin formula:

$p \oplus q = (\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q})$.

Să se demonstreze relația:

$\overline{p \oplus \bar{q}} = \bar{p} \oplus q = p \oplus \bar{q}$.

Soluție:

$$p' = \overline{p \oplus q} = \overline{(\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q})} = \overline{(\bar{p} \wedge q)} \wedge \overline{(p \wedge \bar{q})} =$$
$$= (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q) = [(p \vee \bar{q}) \wedge \bar{p}] \vee [(p \vee \bar{q}) \wedge q] =$$
$$= (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q). \quad (1)$$

$$p'' = \bar{p} \oplus q = (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}). \quad (2)$$

$$p''' = p \oplus \bar{q} = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q). \quad (3)$$

Din compararea relațiilor (1), (2) și (3), obținem:

$p \oplus q = \bar{p} \oplus q = p \oplus \bar{q}$.

13.8.7. EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Să se verifice, folosind tabele de adevăr, următoarele echivalențe:

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$, $p \wedge q = q \Leftrightarrow p$ (comutativitate),

$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r, p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ (asociativitate),

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributivitate),

$p \vee p \Leftrightarrow p, \quad p \wedge p \Leftrightarrow p,$

$p \wedge A \Leftrightarrow p, \quad p \wedge F \Leftrightarrow F,$

$p \vee A \Leftrightarrow A, \quad p \vee F \Leftrightarrow p.$

2. Să se arate că următoarele formule sînt tautologii:

a) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$

b) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

c) $\overline{(p \wedge \bar{p})}$

d) $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

e) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$

3. Să se arate folosind operațiile logice că următoarele formule sînt tautologii:

$\overline{\bar{p} \vee \bar{q}} \Leftrightarrow p \wedge q,$

$\overline{p \wedge q \vee r} \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge \bar{r}.$

4. Să se găsească forma normală a formulelor:

$\overline{(x \wedge (y \wedge \bar{z}))} \Rightarrow \overline{(\bar{y} \wedge z)},$

$((\bar{x} \Rightarrow y) \Rightarrow \bar{z}) \Rightarrow \overline{(\bar{x} \wedge y)},$

$(x \Leftrightarrow y) \wedge (y \Leftrightarrow z).$

5. Se consideră propozițiile următoare:

p : Elevul A este bun la matematică;

$\bar{q}$: Elevul A cîntă în corul școlii.

Să se formuleze propozițiile următoare:

$p \vee q, p \wedge q, \quad \overline{p \vee q}, \quad \overline{p \wedge q}.$

6. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:

$p \vee 1, \; q \vee 1, \; 0 \Rightarrow p.$

7. Să se determine valoarea de adevăr a fiecăreia din propozițiile:

$1 \wedge 1 \wedge 1 \Rightarrow 1,$

$1 \vee 1 \vee 0 \Rightarrow 1,$

$((1 \wedge 0) \vee (0 \Rightarrow 1)) \Leftrightarrow ((1 \vee 0) \Rightarrow (1 \wedge 0))$,

$((1 \Rightarrow 0) \Rightarrow 1 \Rightarrow 1) \Rightarrow 0$,

$(((1 \vee 0) \wedge 0) \Rightarrow 1) \vee 0$.

$((1 \Rightarrow 0) \Rightarrow 1) \Rightarrow (1 \Rightarrow 0)$,

$(0 \wedge 0) \Rightarrow 1$,

$(1 \Rightarrow (0 \wedge 1)) \Leftrightarrow (\overline{1 \vee 0})$.

$((1 \wedge 1) \vee 0) \vee 1 \vee 0$.

8. Se consideră predicatele:

$S(x)$: x este un pătrat perfect;

$P(x)$: x este un număr par;

definite pe mulţimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Să se afle mulţimea valorilor variabilelor pentru care următoarele formule sînt adevărate:

$S(x) \vee P(x) \qquad S(x) \Rightarrow P(x)$,

$S(x) \wedge P(x) \qquad S(x) \Leftrightarrow P(x)$.

9. Se consideră următoarele predicate:

$S(x)$: x este un pioner;

$P(x)$: x cîntă în corul şcolii;

$Q(x)$: x locuieşte în Bucureşti;

în care toate variabilele se referă la mulţimea elevilor unei clase. Să se scrie expresiile simbolice pentru următoarele propoziţii:

Elevul x locuieşte în Bucureşti şi este pionier.

Elevul x locuieşte în Bucureşti şi cîntă în corul şcolii.

Elevul x nu este pionier şi nu cîntă în corul şcolii.

Elevul x este pionier şi nu locuieşte în Bucureşti.

10. Se consideră predicatul:

$S(x) : 2x + 3 < 18$, definit pe mulţimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiei: $\forall\, x, S(x)$.

11. Se dă mulţimea $M = \{1, 2, 3, 4\}$ şi predicatele:

$S(x, y) : (x + y = 3)$

$P(x, y) : (3x + y = 5)$ $\quad (x, y) \in M \times M$

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiei:

a) $\forall x, \forall y, S(x, y)$; b) $\exists x, \exists y \quad x + y = 3$;

c) $(\forall x, y, S(x y)) \wedge (\forall x, y, P(x, y))$.

12. Dacă în exerciţiul care urmează variabilele au valori în mulţimea numerelor reale, să se stabilească valorile de adevăr ale propoziţiilor:

a) $\forall x, \forall y \quad (x + y = y + x)$;

b) $\exists x, \forall y \quad (x - y = 5)$;

c) $\exists x, \forall y \quad (x^2 - 3xy = 4)$;

d) $\forall x, \forall y \quad (x + y = 4 \Rightarrow (5 < 6))$.

13. Să se aducă la forma normală formulele:

$(\exists x, S(x) \Rightarrow \forall x, P(x) \Rightarrow (\forall x, S(x) \vee \forall x, P(x))$,

$(\forall x, S(x) \wedge \forall x, P(x)) \Rightarrow (\forall x, P(x))$.

14. Să se stabilească valorile de adevăr ale propoziţiilor:

a) $\exists a, \exists b, \exists c, \forall x, (a x^2 + b x + c = 0)$,

b) $\forall a, \exists b, \exists x, (x^2 + a x + b = 0)$.

15. Se consideră formula:

$((\exists x, S(x) \Rightarrow \forall x, P(x)) \vee ((\exists x, P(x)) \Rightarrow (\forall x, S(x)))$.

Să se găsească o formulă echivalentă care să nu conţină semnul implicaţiei logice.

16. În exerciţiul care urmează variabilele au valori în mulţimea numerelor reale şi se consideră predicatele:

$S(x, y) : 2x + y = 8$,

$P(x, y) : 3x - y = 7$.

Să se scrie sub formă simbolică sistemul:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 3x - y = 7. \end{cases}$$

17. Se consideră predicatele:

$S(x, y) : 4x^2 - y^2 = 0,$

$Q(x, y) : 2x + y = 0,$

$R(x, y) : 2x - y = 0.$

Să se stabilească valoarea de adevăr a formulelor:

a) $S(x, y) \Leftrightarrow Q(x, y) \vee R(x, y),$

b) $S(x, y) \Rightarrow Q(x, y) \vee R(x, y),$

c) $S(x, y) \Leftrightarrow Q(x, y) \wedge R(x, y).$

18. Se consideră predicatele:

$P(x, y) : (x^2 - y^2 = 0),$

$S(x, y) : (x + y = 0),$

$Q(x, y) : (x - y = 0).$

Să se exprime sub formă simbolică, cu ajutorul disjuncției, legătura dintre predicatele $P(x, y)$, $S(x, y)$, $Q(x, y)$.

19. Se consideră predicatele:

$S(x, y): (x^2 - y^2 = 0).$

$Q(x, y): (5x + y = 0),$

$R(x, y): (x - y = 0)$

$P(x, y): (x + y = 0).$

Să se exprime simbolic cu ajutorul operațiilor logice $\wedge$, $\vee$ sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 5x + y = 0. \end{cases}$$

20. În exercițiul precedent, folosind distributivitatea conjuncției logice față de disjuncție, să se demonstreze echivalența sistemelor:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 5x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 5x + y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - y = 0 \\ 5x + y = 0. \end{cases}$$

21. Să se alcătuiască schemele logice cu contacte pentru verificarea următoarelor propoziții compuse:

$(p \wedge q) \vee r, \quad (p \wedge q) \wedge r, (p \vee q) \vee r.$

22. Să se alcătuiască schemele cu contacte pentru verificarea echivalenţelor:

$p \wedge \bar{p} \Leftrightarrow 0, \quad \bar{p} \vee p \Leftrightarrow 1,$

$p \wedge p \Leftrightarrow p; \quad p \vee p \Leftrightarrow p;$

$(p \wedge q) \wedge s \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge s);$

$(p \vee q) \vee s \Leftrightarrow p \vee (q \vee s);$

$p \wedge (q \vee s) = (p \wedge q) \vee (p \wedge s).$

23. Să se alcătuiască schemele pentru verificarea următoarelor echivalente logice:

$\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q},$

$\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}.$

24. Să se alcătuiască schema a formulei:

$(p \vee q) \wedge (c \vee d)$

25. Să se arate ce formulă logică corespunde schemei desenate în figura 13.8.

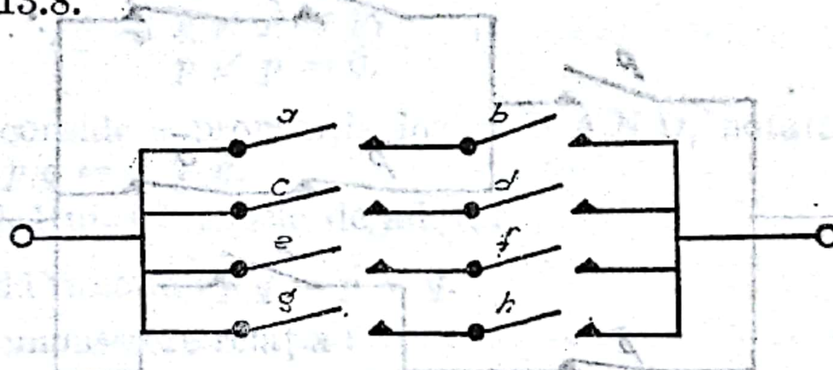


Fig. 13.8

26. Să se arate ce formulă logică corespunde schemei desenate în figura 13.9.

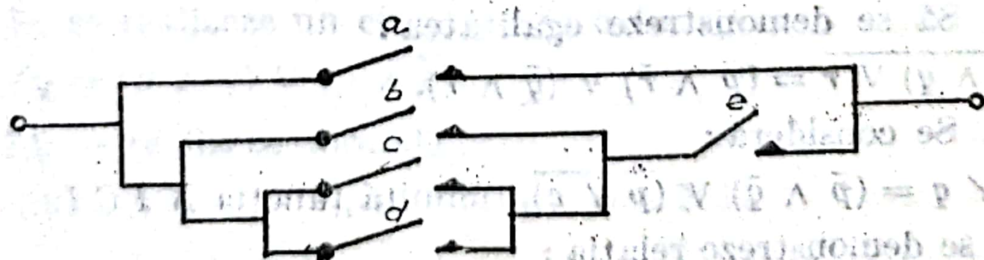


Fig. 13.9

27. Să se scrie formula logică care corespunde schemei din figura 13.10.

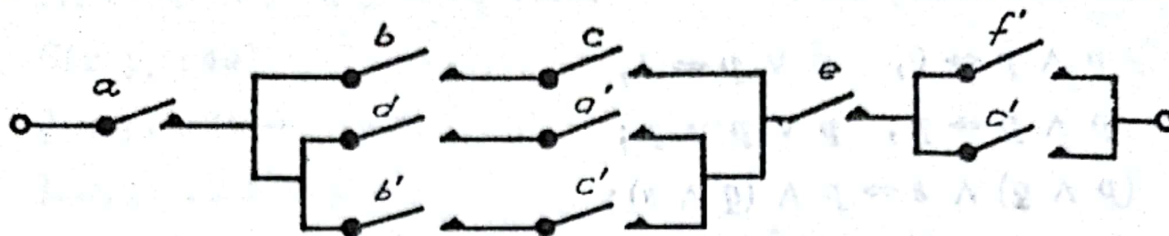


Fig. 13.10

28. Să se demonstreze echivalenţa:

$(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z) \Leftrightarrow (x \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y)$.

Să se alcătuiască apoi o schemă cu contacte care corespunde acestei formule.

29. Să se alcătuiască o schemă cu contacte care corespunde propoziţiilor compuse:

$(p \vee q) \wedge (r \vee s)$, $(p \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{q} \wedge r)$,
$(\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r})$,

30. Să se simplifice circuitul din figura 13.11.

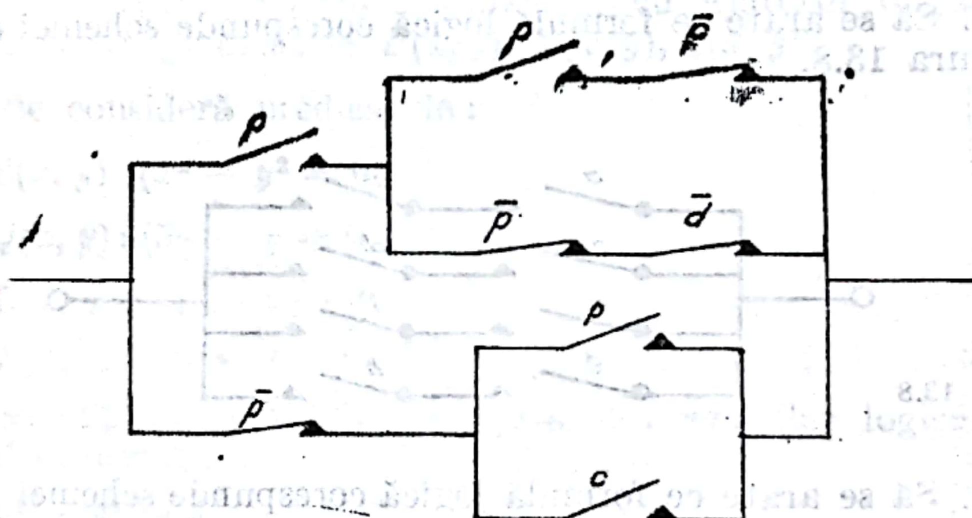


Fig. 13.11

31. Să se simplifice formula: $x = (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge q)$.

32. Să se demonstreze egalitatea:

$\overline{(p \wedge q) \vee r} = (\bar{p} \wedge \bar{r}) \vee (\bar{q} \wedge \bar{r})$.

33. Se consideră:

$p \swarrow q = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee \overline{(p \vee q)}$, numită funcţia *NICI*.

Să se demonstreze relaţia:

$p \vee q = (p \swarrow q) \swarrow (p \swarrow q)$.

34. Se consideră funcţia:
$p \swarrow q = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee \overline{(p \vee q)}$.
Să se alcătuiască tabela de adevăr.

35. Se consideră funcţia:
$p \swarrow q = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee \overline{(p \vee q)}$.
Să se demonstreze relaţiile:

$0 \swarrow 0 = 1,$
$0 \swarrow 1 = 0,$
$1 \swarrow 0 = 0,$
$1 \swarrow 1 = 1.$

36. Se consideră funcţia:
$p \swarrow q = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee \overline{(p \vee q)}$.

Să se demonstreze relaţiile:

$p \swarrow 0 = \bar{p},$
$p \swarrow 1 = 0,$
$p \swarrow p = \bar{p},$
$p \swarrow p = 0.$

37. Se consideră propoziţia logică N A N D, notată p/q, dată de relaţia $p/q = \bar{p} \vee \bar{q}$.
Să se alcătuiască tabela de adevăr.

38. Se dă funcţia: $p/q = \bar{p} \vee \bar{q}$.
Să se demonstreze relaţia:
$p/q = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (p \vee \bar{q})$.

39. Să se realizeze un circuit pentru funcţia
$p/q = \bar{p} \vee \bar{q}$.

40. Să se realizeze un circuit pentru funcţia:
$p \swarrow q = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee \overline{(p \wedge q)}$.

41. Să se realizeze formula:
$x = (p \vee q) \wedge (r \vee s)$, în circuite N A N D.

Indicaţie: $x = \overline{\overline{(p \swarrow q)} \vee \overline{(r \swarrow s)}} = \overline{\overline{(p \swarrow q)}} \swarrow \overline{\overline{(r \swarrow s)}} =$
$= (p \swarrow q) \swarrow (r \swarrow s)$.

Capitolul 14

MULŢIMI

14.1. NOŢIUNI GENERALE. DEFINIŢII. NOTAŢII

Mulţimea este o noţiune primară care nu se defineşte.
Dacă un element a aparţine mulţimii A, se scrie $a \in A$.
Negaţia propoziţiei $a \in A$ este propoziţia $a \notin A$.

Definiţia 14.1. Vom spune că mulţimile A şi B sînt egale, şi vom scrie $A = B$, dacă ele sînt formate din aceleaşi elemente:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall z) \quad (z \in A \Leftrightarrow z \in B).$$

Egalitatea mulţimilor are următoarele proprietăţi:

1. Reflexivitatea: $A = A$;

2. Simetria: $A = B \Rightarrow B = A$;

3. Tranzitivitatea: $A = B$ şi $B = C \Rightarrow A = C$, oricare ar fi A, B, C.

Definiţia 14.2. Se numeşte mulţimea vidă şi se notează cu $\emptyset$, mulţimea care nu conţine nici un element.

Definiţia 14.3. Spunem că mulţimea A este inclusă în mulţimea B şi scriem $A \subset B$, cînd orice element al mulţimii A este şi element al mulţimii B.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x) \, (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Spunem că A este o submulţime a lui B sau A este inclusă în B. Incluziunea are următoarele proprietăţi:

1. Reflexivitatea: $A \subset A$, pentru orice A;

2. Antisimetria: $A \subset B$ şi $B \subset A \Rightarrow A = B$;

3. Tranzitivitatea: $A \subset B$ şi $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Definiția 14.4. Fie o mulțime A. Mulțimea tuturor submulțimilor lui A se numește mulțimea părților lui A și se notează $\mathfrak{P}(A)$.

$$\mathfrak{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}.$$

14.2. OPERAȚII CU MULȚIMI

14.2.1. REUNIUNEA

Definiția 14.5. Reuniunea a două mulțimi A și B se numește mulțimea:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B.$$

14.2.2. PROPRIETĂȚILE REUNIUNII:

1. Reuniunea este comutativă:

$$A \cup B = B \cup A;$$

2. Reuniunea este asociativă:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

3. Reuniunea este idempotentă:

$$A \cup A = A;$$

4. Mulțimea vidă are rol de element neutru pentru reuniune:

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A;$$

5. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B;$

6. Reuniunea este izotonă:

$$A \subset B \wedge C \subset D \Rightarrow A \cup C \subset B \cup D.$$

14.2.3. INTERSECȚIA

Definiția 14.6. Fiind date două mulțimi A și B se numește intersecția mulțimilor A și B mulțimea:

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ și } x \in B\},$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B.$$

14.2.4. PROPRIETĂȚILE INTERSECȚIEI:

1. Intersecția este comutativă:

   $A \cap B = B \cap A$;

2. Intersecția este asociativă:

   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

3. Intersecția este idempotentă:

   $A \cap A = A$;

4. Mulțimea vidă este un element absorbant pentru intersecție:

   $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$.

5. Dacă $A \subset B$, atunci $A \cap B = A$;

6. $A \subset B$ și $C \subset D$, atunci $A \cap C \subset B \cap D$;

7. Proprietățile de absorbție:

   $A \cap (A \cup B) = A$,

   $A \cup (A \cap B) = A$.

14.3. LEGI DISTRIBUTIVE

1. Reuniunea este distributivă față de intersecție:

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

2. Intersecția este distributivă față de reuniune

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Definiția 2.7. Mulțimile A și B se numesc disjuncte dacă $A \cap B = \emptyset$.

14.4. DIFERENȚA

Definiția 2.8. Se numește diferența mulțimilor A și B mulțimea formată din elementele lui A care nu aparțin lui B.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B.$$

Proprietăți:

1) $A \setminus B \subset A$;
2) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$;
3) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$;
4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
5) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
6) $A \setminus \emptyset = A$; $\emptyset \setminus A = \emptyset$; $A \setminus A = \emptyset$.

14.5. DIFERENȚA SIMETRICĂ

Definiția 2.9. Se numește diferență simetrică a mulțimilor A și B, mulțimea:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B).$$

Proprietățile diferenței simetrice:

1. Diferența simetrică este comutativă:

$$A \triangle B = B \triangle A;$$

2. Diferența simetrică este asociativă:

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C);$$

3. Mulțimea vidă este un element neutru față de diferența simetrică:

$$A \triangle \emptyset = \emptyset \triangle A = A;$$

4. Intersecția este distributivă față de diferența simetrică:

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C),$$
$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C).$$

14.6. COMPLEMENTARA

Se numește complementara mulțimii A în raport cu mulțimea E ($A \subset E$), mulțimea:

$$C_E A = \{x \mid x \notin A \text{ și } x \in E\}.$$

$$x \in C_E A \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \in E.$$

Proprietăţi

1) Formulele lui De Morgan:

$$C(A \cap B) = CA \cup CB,$$
$$C(A \cup B) = CA \cap CB;$$

2) Complementara este descrescătoare:

$$A \subset B \Rightarrow CA \supset CB;$$

3) Complementara este involutivă:

$$CCA = A;$$

4) $A \cap CA = \emptyset$ şi $A \cup CA = E$.

14.7. PRODUS CARTEZIAN

Definiţia 14.11. Se numeşte produs cartezian al mulţimilor A şi B şi se notează $A \times B$, mulţimea tuturor perechilor ordonate (a, b), unde $a \in A$ şi $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, \quad b \in B\}.$$

Proprietăţi

1) Produsul cartezian este izoton:

$$A \subset B \text{ şi } C \subset D \Rightarrow A \times C \subset B \times D;$$

2) Produsul cartezian este distributiv faţă de reuniune:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C);$$

3) Produsul cartezian este distributiv faţă de intersecţie:

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C);$$

4) Produsul cartezian este distributiv faţă de diferenţă:

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$

Exerciţiu

1) Fie $M = \{x \mid x \in Q \text{ şi } x = \dfrac{n+6}{n+2}, n = 1, 2, 3\}$.

Să se determine submulţimea:

$$A = \{x \mid x \in M \text{ şi } x \text{ este întreg}\}.$$

Soluție

$x = \frac{n+6}{n+2} = \frac{n+2+4}{n+2} = 1 + \frac{4}{n+2}$, numărul x este întreg dacă $n+2$ este un divizor al numărului 4. Deoarece n este un număr natural, îi corespunde lui $n+2$ valoarea 4 și obținem $n = 2$. Prin urmare avem : $A = \{2\}$.

14.8. EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Să se determine mulțimile :

$$A = \{x \mid x \in N \text{ și } n \in N, \quad x = -n^2 + 5n - 6\},$$

$$B = \{x \mid x \in N \text{ și } n \in N, \quad x = -2n^2 + 12n - 16\}.$$

2. Să considerăm mulțimile :

$$A = \{x \mid x \in Z \text{ și } x = 3m + 5n, \ m, n \in N\}$$

$$B = \{x \mid x \in Z \text{ și } x = 4m + 7n, \ m, n \in N\}.$$

Să se determine mulțimile :

a) $C = \{x \mid x \in N \text{ și } x \notin A\}$,

b) $D = \{x \mid x \in N \text{ și } x \notin B\}$.

3. Să se determine mulțimea X care satisface simultan condițiile :

$X \subset \{1, 2, 3, 4\}$

$X \subset \{1, 3, 5\}$ și $\{1, 3\} \subset X$.

4. Să se determine mulțimea X, cunoscînd că :

$\{1, 2, 3\}$ și $\{2, 3, 7\}$ sînt submulțimi ale lui X și că $X \subset \{1, 2, 3, 7\}$.

5. Se dă mulțimea $M = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Să se scrie mulțimile A, B, C definite mai jos, precizînd de fiecare dată care sînt elementele lor :

$A = \{x \mid x \in M \text{ și } 2x \in M\}$,

$B = \{x \mid x \in M \text{ și } y \in M, \ x + y = 6\}$,

$C = \{x \mid x \in M$ și oricare ar fi $y \in M$ și $y \neq x$, împărțind x la y obținem restul $1\}$.

6. Să se compare mulţimile:

$$A = \{x \mid x \in Q \text{ şi } x = \frac{3n^2+1}{n^2+n},\ n \in N\}$$

$$B = \{x \mid x \in A \text{ şi } 2 \leqslant x \leqslant 3\}.$$

7. Să se determine mulţimile A şi B care satisfac condiţiile:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3\}$,

b) $A \cap B = \emptyset$,

c) $\forall x \in A, \exists y \in B$, astfel încît $x - y = 1$ şi
$\forall x \in B, \exists y \in A$, astfel încît $y - x = 1$.

8. Să se determine mulţimile A şi B care satisfac condiţiile următoare:

1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

2) $A \cap B = \{1, 2\}$,

3) $A - B = \{5\}$.

9. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\{1, 2\} \triangle X = \{1, 2, 3\}$,

b) $A \triangle X = B$.

10. Să se demonstreze următoarele egalităţi:

a) $(\bar{A} \cup B) \cap A = A \cap B$,

b) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$,

c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,

d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,

e) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

11. Să se demonstreze:

a) $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ şi $B \subseteq C$,

b) $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq \bar{B} \cup C$,

c) $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$,

d) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$.

12. Să se demonstreze egalitățile:

a) $A \triangle B = B \triangle A$,

b) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$,

c) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$,

d) $A \triangle (A \triangle B) = B$,

e) $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$,

f) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$,

g) $A \triangle \emptyset = A$,

h) $A \triangle A = \emptyset$,

i) $A \cup B = (A \triangle B) \cup (A \cap B)$.

13. Să se demonstreze egalitatea:

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

14. Să se arate că dacă:

a) $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$,

b) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = A \triangle B$,

c) $A \triangle B = C \Leftrightarrow B \triangle C = A \Leftrightarrow C \triangle A = B$.

15. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases} \qquad B \subseteq A \subseteq C.$$

16. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases} \qquad B \subseteq A; \quad A \cap C = \emptyset.$$

17. Funcția caracteristică a unei mulțimi E ($E \subseteq A$) se numește următoarea aplicație a mulțimii A pe mulțimea numerelor 0 și 1.

$$f(x) = 0, \text{ dacă } x \notin E$$
$$f(x) = 1, \text{ dacă } x \in E$$

Dacă e și f sînt funcțiile caracteristice ale mulțimilor $E \subset A$ și $F \subset A$ să se afle ce submulțimi ale mulțimii A au funcțiile caracteristice

$$1 - e; \; ef; \; e + f - ef;$$

18. Să se arate folosind rezultatele din exemplul precedent că avem relațiile:

$$(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G),$$
$$(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G).$$

19. Fie mulţimile: $A = \{1, 2, 3, x, y\}$ şi $B = \{5, 6, x, z\}$.

Să se determine x, y şi z, cunoscînd că:

$$\{4, 5\} \times \{2, 4\} \subset A \times B.$$

20. Să se determine mulţimile X şi Y, ştiind că ele satisfac în mod simultan condiţiile:

$$X \times Y \subset \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}.$$

Să se demonstreze egalităţile:

$$A \cap (A \cup B) = A, \qquad (A - B) \cap B = \emptyset,$$

$$(A - B) \cup B = A \cup B, \qquad A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cup C),$$

$$A - (B \cup C) = (A - B) - C.$$

22. Să se demonstreze egalităţile:

$$\overline{(\bar{A} - B) - C} = \overline{(\bar{A} - B) \cap C} = (A \cup B) \cup C,$$

$$(A \cap B) - A = \emptyset.$$

23. Să se demonstreze egalităţile:

$$A - B = A \triangle (A \cap B),$$

$$\overline{A \triangle B} = (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{B} \cup A),$$

$$(A \triangle B) \cup B = (A \cup B) \cup (B - A) = A \cup B.$$

24. Să se demonstreze egalitatea:

$$(A \cup \bar{B}) \triangle A = \overline{A \cup B}.$$

25. Să se calculeze expresiile:

$$A - (B \cap C), \quad A \cup (\overline{B \cup C}), \quad \bar{A} \cap (\overline{B \cup C}),$$

dacă $A \subset B \subset C$.

26. Să se arate că dacă

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

atunci

$$(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \bar{C} = (\bar{A} \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap \bar{C}).$$

27. Să se demonstreze că mulţimile:

$$A \setminus B, \quad B \setminus C, \quad C \setminus A,$$

sînt disjuncte două cîte două.

28. Să se demonstreze egalitățile:

$$A \cap B = A \cup (B - (A \cap B)),$$

$$A \cup (\overline{B \cup C}) = (\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap C}).$$

29. Să se demonstreze relația:

$$(A \cap (\overline{A \cap B})) \cap (B \cap (\overline{A \cap B})) = \emptyset.$$

30. Să se verifice egalitatea:

$$A \cup B \cup C = (A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) \cup (A \cap B) \cap C.$$

31. Să se determine elementele mulțimii:

$$A = \{(x, y, z) \in R^3 | 6x = 3y = 2z \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 11\}.$$

32. Fie $A = \{(x, y) | 2x + y = 9, x \in N, y \in N\}$ și o mulțime M astfel ca diagonala produsului cartezian $M \times N$ să fie $\triangle M = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), 7,7)\}$.

a) Să se determine mulțimile A și M.

b) Să se determine $A \cap \triangle M$.

33. Să se determine elementele mulțimii:

$$A = \{(x, y) \in Q \times Q / 13x^2 + 45y^2 + 24xy - 28x - 84y + 40 = 0\}.$$

34. Să se determine elementele mulțimii:

$$A = \{x \in Q / 2(m - 2)x^2 = (m + 3)(2x - 1); m \in Z\}.$$

35. Se consideră mulțimea:

$$A = \{(x, y) \in R^2; x^5y^3 = 81 \wedge 10x + 6y = 27\}.$$

Să se arate că $A = \emptyset$

36. Să se determine mulțimile A și B care îndeplinesc condițiile:

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Mulțimile $A \setminus B$, și $B \setminus A$ au același număr de elemente.

$A = \{x | x \in N$ și x sînt numere consecutive$\}$.

37. Să se determine numerele x care îndeplinesc simultan condițiile:

$$x \in A \text{ și } x \in N,$$

$$A \cap B = \{3, 4\}, \ A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, x\}.$$

Mulţimea A şi B au acelaşi număr de elemente.

Sumele numerelor care reprezintă elemente necomune din cele două mulţimi (A şi B) sînt egale.

38. Să se determine E şi mulţimea părţilor sale A şi B ştiind că:

$$C_E A = \{1, 3, 5, 7\},$$

$$C_E B = \{24, 7, 8\},$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}.$$

39. Se dau mulţimile:

$$A = \left\{x \in N \,\middle|\, \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} \in Z\right\}.$$

$$B = \left\{x \in N \,\middle|\, \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} \in N\right\}.$$

Să se calculeze $A \cap B$, $A \setminus B$.

40. Se dau mulţimile:

$$A = \{x | x = 3n - 4 ; n \in N\}$$

$$B = \{x | x = 401 - 4m ; m \in N\}$$

$$C = \{x | x = 401 - 12p ; p \in N, p \leqslant 33\}.$$

Să se arate că $A \cap B = C$.

41. Se dă mulţimea:

$$A = \{x \in Z | 8x^3 - 6x + 1 = 0\}.$$

Să se arate că $A = \emptyset$.

42. Se consideră mulţimea:

$$A = \left\{x \in R | \sin^3 x \cos^5 x = \frac{1}{5}\right\}$$

Să se arate că $A = \emptyset$.

43. Să se determine elementele mulţimii:

$$A = \left\{(x, y) \in [0, \pi]; \frac{16}{\sin^4 2x} = 15 + \sin y\right\}.$$

44. Să se determine mulţimea:

$$A = \{(x, y) \in R^2;\ 3 + 2|1 + x| = |1 - 2y| \text{ şi }$$
$$3|y| + 2|1 + x| = |2 - y|\}.$$

45. Se dau mulţimile:

$$A = \{x | x = 20k - 4;\ k \in N\},$$
$$B = \{x | x = 796 - 20k;\ k \in N;\ k \leqslant 39\}.$$

Să se arate că $A = B$.

46. Se dau mulţimile:

$$A = \{(x, y),\ x \in N,\ y \in N | x^2 - xy - 3x + 3y = 1\}.$$
$$B = \{(x, y),\ x \in N,\ y \in N | xy - 2x - 3y = -5\}.$$

Să se arate că $A = B$.

47. Se dau mulţimile:

$$A = \{(x, y);\ x \in Z,\ y \in Z |\ 2xy - 3x + 5y = 7\}.$$
$$B = \{(x, y);\ x \in Z,\ y \in Z \mid 3xy - 5x + 7y = 1\}.$$

Să se arate că $A = B$.

48. Se consideră mulţimile:

$$M = \left\{y \mid y = \frac{2x^2 + 5x + 9}{2x + 3},\ x \in Q^+\right\}.$$

Să se determine mulţimea $M \cap Z$, unde Q^+ este mulţimea numerelor raţionale pozitive, iar Z mulţimea numerelor întregi.

49. Se dau mulţimile:

$$A = \{x \in R | x^2 - 2|1 - x| - 6 = 0\},$$
$$B = \{x \in R | x^2 - 2|3 - x| - 10 = 0\}.$$

Să se calculeze mulţimile $A \cup B$, $A - B$.

50. Se dau mulţimile:

$$A = \{(x, y),\ x, y \in Z | 9x + 10y ⋮ 3\};$$
$$B = \{(x, y),\ x, y \in Z | 6x + 7y ⋮ 3\}.$$

Să se arate că $A = B$.

51. Să se determine mulţimea:

$$A=\{(x, y), x \in N, y \in N \mid 4x^3-4x^2y+y^2x-4x^2+4xy-y^2=0\}.$$

52. Să se determine mulţimea:

$$A=\{(x, y) \in N^2 \mid x^5-xy^2+y^2-1=0\}.$$

53. Să se detemine mulţimea:

$$A=\{(x, y, z) \in Z^3 ; x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-6z+9=0\}.$$

54. Se dă mulţimea:

$$A=\{x \in R, m \in R ; x^4-2x^2m^2+m^4+x^2+2mx+m^2+2=0\}.$$

Să se arate că $A=\varnothing$.

55. Se consideră mulţimile:

$$A=\left\{x \in N \,\middle|\, \frac{x^5+5}{4x} \in Z\right\}.$$

$$B=\left\{x \in N \,\middle|\, \frac{x^5+4}{5x} \in Z\right\}.$$

Să se arate că $A=B$.

56. Să se determine mulţimea:

$$A=\{(x, y) \in Z^2 \mid 6x^2-13xy+6y^2=19\}.$$

57. Să se determine mulţimea:

$$A=\left\{x \in R ; \lg \frac{x-2}{x-3}>\lg \frac{x-1}{x-4}\right\}.$$

58. Să se determine mulţimea:

$$A=\{(x, y) \in Z^2 \mid (x-2y)(x+3)=0\}.$$

59. Să se afle mulţimea:

$$A=\{x \in N \mid x=\overline{aabb} \wedge x=p^2, p \in N\}.$$

Capitolul 15

RELAȚII

Se dau două mulțimi A și B, distincte sau egale, și o proprietate $\mathcal{R}_0(x, y)$ referitoare la perechile ordonate (x, y) ale mulțimii $A \times B$. O relație binară între mulțimile A și B este determinată de mulțimea $X \times Y$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, a perechilor $(x, y) \in A \times B$ pentru care $\mathcal{R}_0(x, y)$ este adevărată. Vom nota $G = \{(x, y), x \in X, y \in Y\}$.

Dacă $(a, b) \in G$ se spune că a este în relație $\mathcal{R}$ cu elementul b și se scrie $a\mathcal{R}b$.

Vom spune că A este mulțimea de plecare și B este mulțimea de sosire.

15.1. RELAȚII FUNCȚIONALE

O relație $\mathcal{R}$ de la mulțimea A către mulțimea B se numește funcțională sau funcție dacă un element x al mulțimii A se poate afla în relația dată cu cel mult un element y din mulțimea B. Submulțimea A' de elemente din A cărora le corespund elemente din B, se numește domeniul funcției, iar mulțimea elementelor din B care sînt în relație cu elementele din A se numește codomeniul funcției. Dacă o relație funcțională se notează cu f atunci putem scrie $y = f(x)$.

Într-o relație funcțională, unui element $x \in A$ îi corespunde un singur element $y \in B$ sau niciun element. La elemente diferite din A le pot corespunde aceleași elemente în B.

Reținem că o funcție este dată prin trei elemente:

1. Domeniul de definiție;
2. Mulțimea în care funcția ia valori;
3. Legea de corespondență.

Legea de corespondenţă poate fi definită în mai multe moduri:

a) prin indicarea unui tablou de corespondenţă dintre elementele domeniului şi valorile lor;

b) prin indicarea unei formule.

Exemplu

Să considerăm mulţimile:

$A = \{7, 8, 10, 15, 17, 18\}$

$B = \{0, 2, 3, 6, 7, 8\}$.

şi relaţia $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow$ „x are rest y cînd se împarte la 8", unde $x \in A$, şi $y \in B$. Să cercetăm dacă această relaţie este funcţională şi în caz afirmativ să găsim domeniul A'.

Soluţie

Avem:

$7 = 8 \cdot 0 + 7 \Rightarrow 7 \mathcal{R} 7$

$8 = 8 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 8 \mathcal{R} 0$

$10 = 8 \cdot 1 + 2 \Rightarrow 10 \mathcal{R} 2$

$15 = 8 \cdot 1 + 7 \Rightarrow 15 \mathcal{R} 7$

$17 = 8 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 1 \notin B$

$18 = 8 \cdot 2 + 2 \Rightarrow 18 \mathcal{R} 2$

Să reprezentăm grafic această relaţie (fig. 15.1).

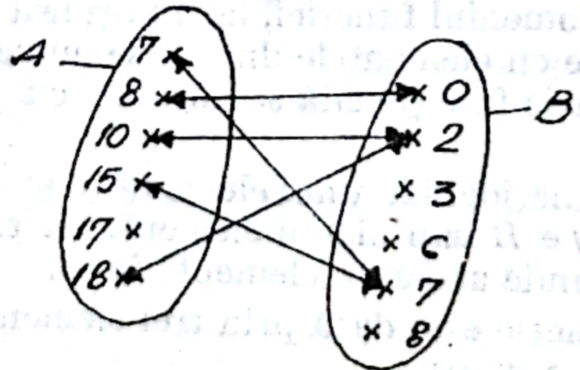


Fig. 15.1

Această relaţie este funcţională şi avem $A' = \{7, 8, 10, 15, 18\}$.

Contraexemplu

Să considerăm mulțimile:

$A = \{1, 4, 5, 7, 9\}$,

$B = \{0, 1, 3, 5, 7\}$ și relația $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \leqslant y \; (x \in A, \; y \in B)$.

Este această relație funcțională?

Soluție

$1 \leqslant 1; \quad 1 \leqslant 3; \quad 1 \leqslant 5; \quad 1 \leqslant 7;$

$1 \mathcal{R} 1; \quad 1 \mathcal{R} 3; \quad 1 \mathcal{R} 5; \quad 1 \mathcal{R} 7;$

$5 \leqslant 5; \quad 5 \leqslant 7;$

$5 \mathcal{R} 5; \quad 5 \mathcal{R} 7.$

Relația dată nu este funcțională.

15.2. APLICAȚII

O relație funcțională definită pe mulțimea A cu valori în B se numește aplicație dacă fiecărui element din A îi corespunde cel mult un element în B.

Prin urmare funcțiile pentru care domeniul coincide cu întreaga mulțime A se numesc aplicații ale mulțimii A în mulțimea B.

15.2.1. APLICAȚIA SURJECTIVĂ

Definiție. O aplicație f a mulțimii A în mulțimea B se numește surjectivă dacă și numai dacă orice element y a lui B este imagine prin f a cel puțin unui element din A.

f surjectivă $\Leftrightarrow \forall \, y \in B, \; \exists x \in A, \; y = f(x)$.

Dacă o aplicație $f: A \to B$ este surjectivă avem $f(A) = B$ adică mulțimea de sosire este egală cu mulțimea valorilor. Se spune: aplicație surjectivă, surjecție sau aplicație *pe* (în loc de aplicație *în*).

Exemplu:

Se consideră mulțimile:

$A = \{-1, -2, 1, 2, 3, 4\}$

$B = \{1, 4, 9, 16\}$

și aplicația $y = x^2$, $(x \in A, \; y \in B)$.

Este această aplicaţie surjectivă?

Soluţie (fig. 15.2). Avem:

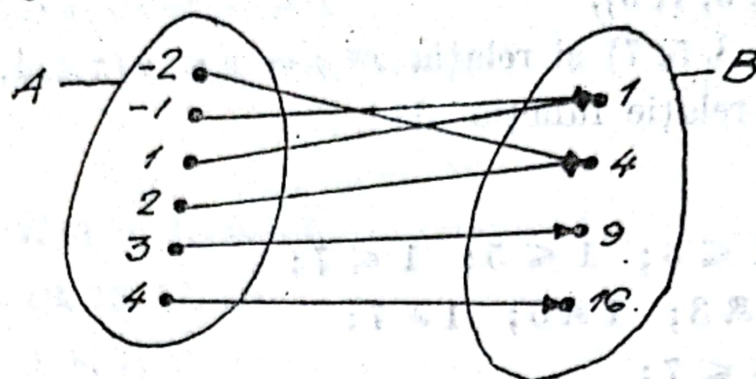


Fig. 15.2

$$(-1)^2 = 1 \Rightarrow -1 \,\mathcal{R}\, 1$$
$$(-2)^2 = 4 \Rightarrow -2 \,\mathcal{R}\, 4$$
$$1^2 = 1 \Rightarrow 1 \,\mathcal{R}\, 1$$
$$2^2 = 4 \Rightarrow 2 \,\mathcal{R}\, 4$$
$$3^2 = 9 \Rightarrow 3 \,\mathcal{R}\, 9$$
$$4^2 = 16 \Rightarrow 4 \,\mathcal{R}\, 16$$

Se constată că $\forall y \in B, \exists\, x \in A$ care verifică relaţia $y = x^2$.

Contraexemplu

Se consideră mulţimile:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{2, 5, 10, 17, 20\}$$

şi aplicaţia $y = x^2 + 1$, $(x \in A,\ y \in B)$.

Să se cerceteze natura acestei aplicaţii.

Soluţie (fig. 15.3). Avem:

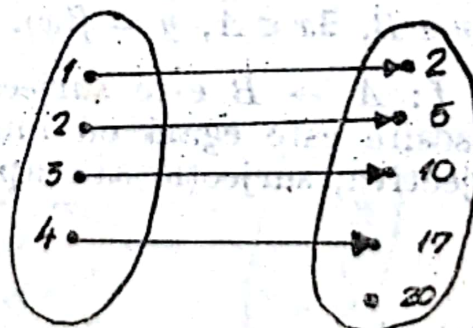


Fig. 15.3

$$1^2 + 1 = 2 \Rightarrow 1 \,\mathcal{R}\, 2 \qquad 3^2 + 1 = 10 \Rightarrow 3 \,\mathcal{R}\, 10$$
$$2^2 + 1 = 5 \Rightarrow 2 \,\mathcal{R}\, 5 \qquad 4^2 + 1 = 17 \Rightarrow 4 \,\mathcal{R}\, 17$$

Aplicaţia nu este surjectivă deoarece numărul 20 nu este imaginea nici unui element al mulţimii A prin aplicaţia dată.

15.2.2. APLICAŢIE INJECTIVĂ

O aplicaţie f se numeşte injectivă dacă pentru orice pereche de elemente $x, x' \in A$, $x \neq x'$, corespund elemente diferite în B. Exprimăm această proprietate scriind astfel:

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \quad \text{sau} \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Exemplu:

În mulţimea numerelor naturale $(A = B = N)$ să considerăm aplicaţia: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = x^2 + 1$. Este această aplicaţie injectivă?

Soluţie:

Să considerăm două elemente arbitrare $x', x'' \in N$ şi avem: $y' = x' + 1$, $y'' = x''^2 + 1$. Din egalitatea $y' = y''$, deducem: $x''^2 + 1 = x''^2 + 1$, $x'^2 = x''^2$. Deoarece $x', x'' \in N$, deducem $x' = x''$.

Prin urmare, dacă $y' = y''$, atunci $x' = x''$. Aplicaţia este injectivă.

15.2.3. APLICAŢIE BIJECTIVĂ

Aplicaţia f a mulţimii A în mulţimea B care este în acelaşi timp surjectivă şi injectivă se numeşte bijectivă sau bijecţie.

Exemplu:

Se dau mulţimile: $A = [2, +\infty)$, $B = [-3, +\infty)$ şi relaţia $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 1$. Să se arate că această relaţie este o aplicaţie bijectivă a mulţimii A în mulţimea B.

Soluţie. Este evident că, pentru orice x, avem: $x^2 - 4x + 1 \geqslant -3 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \geqslant 0$. Rezultă că, dacă $x \in [2, +\infty)$, atunci $y \in [-3, +\infty)$.

Să arătăm că $\mathcal{R}$ este injectivă. Să presupunem că $y' = y''$, unde y' şi y'' sînt imaginile a două elemente $x', x'' \in [2, +\infty)$. Avem: $x'^2 - 4x' + 1 = x''^2 - 4x'' + 1 \Leftrightarrow (x'^2 - x''^2) - 4(x' - x'') = 0 \Leftrightarrow (x' - x'')(x' + x'') - 4(x' - x'') = 0 \Leftrightarrow (x' - x'')(x' + x'' - 4) = 0.$

Deoarece $x', x'' \geq 2$, avem $x' + x'' - 4 \geq 0$ şi, prin urmare, $x' - x'' = 0$ sau $x' = x''$ şi deci aplicaţia este injectivă. Să arătăm că aplicaţia este surjectivă. Fie $y \in [-3, +\infty)$. Din rezolvarea ecuaţiei $x^2 - 4x + 1 = y \Leftrightarrow x^2 - 4x - y + 1 = 0$, avem $x = 2 \pm \sqrt{3 + y}$ şi, deoarece $y + 3 > 0$, avem : $2 + \sqrt{3 + y} \in$ $\in [2, +\infty)$. De aici rezultă că aplicaţia este surjectivă şi, fiind şi injectivă, ea este bijectivă.

15.3. APLICAŢIA INVERSĂ A UNEI APLICAŢII BIJECTIVE

Să presupunem că aplicaţia $f : A \to B$ este bijectivă.

Prin urmare, ecuaţia $y = f(x)$ are o soluţie unică în raport cu necunoscuta x. Vom desemna această necunoscută prin $x = g(y)$, care defineşte o aplicaţie de la B către A.

Funcţia $x = g(y)$; $g : B \to A$ se numeşte funcţia inversă funcţiei $y = f(x)$ şi se notează cu f^{-1}.

Dacă funcţia $f : A \to B$ este inversabilă, următoarele proprietăţi sînt adevărate :

$f(f^{-1}(y)) = y$, oricare ar fi $y \in B$;

$f^{-1}(f(x)) = x$, oricare ar fi $x \in A$.

Exemple :

Să considerăm funcţia :

$$f : R^+ \to R^+ ; f(x) = x^2$$

Să se scrie funcţia inversă. Funcţia inversă este $f^{-1}(y) : x = \sqrt{y}$.

15.4. COMPUNEREA RELAŢIILOR

Fie $\mathcal{R}$ o relaţie binară între elementele mulţimii A şi elementele mulţimii B, S o relaţie binară între elementele mulţimii B şi elementele mulţimii C.

$x \in A$; $y \in B$; $x\mathcal{R}y$; sau $y = \mathcal{R}(x)$.

$y \in B$; $z \in C$; $y\mathcal{S}z$, sau $z = \mathcal{S}(y)$.

Se numeşte compusa relaţiilor $\mathcal{R}$ şi $\mathcal{S}$, relaţia notată $S \oplus R$, dată prin egalitatea care stabileşte o corespondenţă între elementele mulţimii A şi elementele mulţimii C.

Corespondențele realizate de relația $S \circ \mathcal{R}$, pot fi reprezentate prin următoarea diagramă (fig. 15.4).

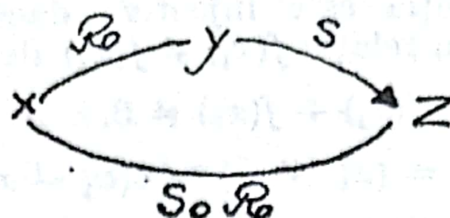


Fig. 15.4

Exemplu:

În mulțimea N se consideră relațiile:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = x + 2$$

$$ySz \Leftrightarrow z = 3y$$

Fie $\tau = S \circ \mathcal{R}$

$$x\tau z \Leftrightarrow z = 3(x + 2)$$

Teorema 15.1. Relația compusă a două funcții este o funcție.

Teorema 15.2. Compunerea a două aplicații este o aplicație.

15.5. EXERCIȚII REZOLVATE

Funcții surjective, injective, bijective.

Exemplul 1

Să se precizeze dacă funcția: $f: (3, +\infty) \to R$, definită prin $f(x) = x^2 - 6x + 8$, este surjectivă? Dar injectivă? Dar bijectivă?

Soluție

Surjecția. Funcția este surjectivă dacă pentru orice $y \in R$ există $x \in (3, +\infty)$, avînd proprietatea $y = f(x)$.

Fie $y \in R$ și, prin urmare, avem:

$$y = x^2 - 6x + 8,\ x^2 - 6x + 8 - y = 0$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8 + y} = 3 \pm \sqrt{1 + y}\ .$$

De aici rezultă că $y + 1 \geq 0$ și, prin urmare, pentru $y \in (-\infty, -1)$ nu există valori reale ale lui x astfel încît $y = f(x)$.

Funcţia dată nu este surjectivă, deoarece există elemente din R care nu sînt imagini.

Injectivitatea. Funcţia este injectivă dacă, pentru $x_1 \neq x_2$, avem $f(x_1) \neq f(x_2)$. Din relaţia $f(x_1) \neq f(x_2)$ deducem :

$$f(x_1) - f(x_2) \neq 0.$$

Avem $f(x_1) - f(x_2) = (x_1^2 - x_2^2) - 6(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 6) = (x_1 - x_2)[(x_1 - 3) + (x_2 - 3)]$.

Pe mulţimea $(3, +\infty)$ avem $x_1 - 3 > 0$, $x_2 - 3 > 0$ şi, prin urmare, avem : $f(x_1) - f(x_2) > 0$.

Funcţia este injectivă.

Nefiind surjectivă, funcţia dată nu este bijectivă.

Exemplul 2

Să se verifice dacă funcţia $f : R \setminus \{-4\} \to R \setminus \{0\}$ definită prin $y = \dfrac{1}{x+4}$ este bijectivă.

Soluţie

Surjecţia $y = \dfrac{1}{x+4} \Leftrightarrow xy + 4y = 1 \Leftrightarrow xy = 1 - 4y \Leftrightarrow x = \dfrac{1-4y}{y}$. Funcţia este surjectivă.

Injecţia $f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1+4} \neq \dfrac{1}{x_2+4} \Leftrightarrow x_1 + 4 \neq x_2 + 4 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$. Funcţia este injectivă.

[f bijectivă] $\Leftrightarrow$ [f injectivă] $\wedge$ [f surjectivă].

Funcţia f este bijectivă.

Exemplul 3

Se defineşte o aplicaţie f pe o parte a lui R în modul următor :

$\forall\, x \in [0, 1]$; $y = f(x) = 3x$

$\forall x \in [1, 2]$; $y = f(x) = 3$

$\forall x \in [2, 3]$; $y = 5 - x$.

a) Să se afle domeniul în care funcţia ia valori.

b) Să se stabilească dacă aplicaţia f este bijectivă.

Soluție

a) $\forall x \in [0, 1] \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant 3x \leqslant 3 \Rightarrow f(x) \in [0, 3]$

$\forall x \in [1, 2],\ f(x) = 3$

$\forall x \in [2, 3] \Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant 3 \Leftrightarrow -3 \leqslant -x \leqslant -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \leqslant 5 - x \leqslant 3 \Rightarrow f(x) \in [2, 3].$

Prin urmare funcția $f(x)$ ia valori în mulțimea :

$B = [0, 3] \cup \{3\} \cup [2, 3] = [0, 3]$

b) f este surjectivă deoarece :

$\forall y \in B = [0, 3],\ \exists x,\ x \in [0, 3] \wedge y = f(x).$

f nu este injectivă deoarece dacă $x \in [1, 2] \Rightarrow f(1) = f(2) = 3.$ Aplicația f nu este bijectivă.

15.6. EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Relația definită în N care la orice valoare $x \in N$, face să corespundă $4 + x$, este funcție? Este o aplicație? Relația reciprocă este o aplicație?

2. Se consideră aplicația $x \xrightarrow{f} x^2 + 1$ care are Z mulțimea de definiție și N mulțimea valorilor. Să notăm $X = \{-1, 0, 2\}$. Să se afle $Y = f(X)$, apoi să se afle $f^{-1}(Y)$ și să se verifice relația $f^{-1}(f(x)) = x$.

3. Într-un plan se dau un punct O, un cerc și o dreaptă oarecare. Să notăm cu C mulțimea punctelor cercului și cu D mulțimea punctelor dreptei. Se definește o relație $\mathcal{R}$ de la C către D astfel : $M \in C,\ N \in D,\ M \mathcal{R} N \Leftrightarrow M, O,\ N$ sînt colineare. Să se analizeze în funcție de poziția punctului O dacă :

a) Este o funcție această relație? Este o aplicație? Această aplicație este bijectivă?

b) Există elemente ale mulțimii C care în această corespondență se confundă cu imaginile lor?

4. Se dau trei puncte A, B, C, în plan, necolineare și să notăm cu E mulțimea punctelor așezate pe cel puțin unul din segmentele AB, BC, AC. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Se definește în E, relația $\mathcal{R}$ prin : $M \in E,\ M' \in E : M \mathcal{R} M' \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ dreapta MM' trece prin G.

a) Este această relație o funcție? este o aplicație?

b) Este o aplicație bijectivă?

25 – c. 1782

c) Să se afle imaginea lui A prin această aplicaţie.

d) Să se afle imaginea mijlocului segmentului AB prin această aplicaţie.

e) Pe dreapta BC să considerăm un punct Q astfel încît : $\frac{BQ}{BC} = \frac{1}{3}$. Să se arate în ce raport împarte latura triunghiului imaginea punctului Q în această aplicaţie.

5. Se consideră într-un cerc mulţimea E a tuturor coardelor care nu trec prin centru şi o relaţie definită în felul următor : $e, e' \in E : e \mathcal{R} e' \Leftrightarrow e$ şi e' sînt egal depărtate de centru şi au direcţii perpendiculare.

a) Este această relaţie o funcţie?

b) Este o aplicaţie?

6. Să considerăm cercul C de centru O şi de rază R şi un punct P exterior cercului şi să notăm cu E mulţimea tuturor punctelor de pe cerc. Pe mulţimea E se defineşte o relaţie $\mathcal{R}$ în felul următor : $A, B \in E : A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A, B, P$ coliniare,

a) Este această relaţie o funcţie? Este o aplicaţie?

b) Este o aplicaţie bijectivă?

7. Într-un plan se dă un punct O şi se notează cu P mulţimea punctelor din plan. Se defineşte în P relaţia $\mathcal{R}$:

$$M\mathcal{R}M' \Leftrightarrow \overline{MO} = \overline{OM'}.$$

a) Este $\mathcal{R}$ o funcţie? Este o aplicaţie?

b) Este o bijecţie?

c) Să se definească $\mathcal{R}^{-1}$.

8. În mulţimea $N \times N$ se consideră relaţia $\mathcal{R} : (x, y) \Rightarrow (y, x)$.

a) Această relaţie este o funcţie? O aplicaţie?

b) Este o bijecţie?

c) Să se definească $\mathcal{R}^{-1}$.

9. Se consideră mulţimea $Z \times Z$ şi relaţia $(x, y) \Rightarrow (-x, -y)$. Să se arate dacă această relaţie este o funcţie? Este o bijecţie?

10. Dacă E este o mulţime oarecare, se defineşte în $\mathfrak{P}(E)$ o relaţie $A \to C_E A$.



a) Să se arate că relația dată este o funcție.

b) Să se arate că f este o aplicație bijectivă.

11. Să se arate că compunerea aplicațiilor este asociativă.

12. Se consideră mulțimea $E = \{a, b, c\}$. Să notăm cu $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, cele șase permutări ale elementelor mulțimii date. Să arătăm că pentru fiecare permutare se poate asocia o altă permutare astfel încît permutarea compusă să fie permutarea identică.

13. Se consideră mulțimile:

$A = \{-3, -1, 0, 4, 5\}$, $B = \{-1, 1, 2, 3, 7\}$,

$C = \{-3, 3, 9, 11, 21\}$ și relațiile:

$$\mathcal{R} : A \to B, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = x + 2,$$

$$\mathcal{S} : B \to C \quad y\mathcal{S}z \Leftrightarrow z = 3y$$

Se cere graficul relației $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$.

14. Se dau mulțimile:

$A = \{-5, 0, 2, 5\}$, $B = \{6, 1, 0, 4\}$, $C = \{5, 1, -2, -6\}$ și

relațiile:

$$\mathcal{R} : A \to B : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = -y + 1$$

$$\mathcal{S} : B \to C : y\mathcal{S}z \Leftrightarrow y < z$$

Să se alcătuiască graficul relației $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$.

15. Se consideră relația $N \xrightarrow{f} N$; $f(x) = x^2 + 1$. Este f o aplicație injectivă?

16. Se consideră relația $Z \xrightarrow{g} Z$; $g(x) = x^2 - 1$. Este această relație o aplicație? În caz afirmativ, este injectivă?

17. Se consideră două segmente de dreaptă, AB și $A'B'$, astfel încît AA' și BB' să se întîlnească în punctul O. Fie E mulțimea punctelor segmentului AB și E' mulțimea punctelor segmentului $A'B'$. Relația de la E către E', definită prin $M\mathcal{R}M' \Leftrightarrow MM'$ trece prin punctul O este o funcție? Este o aplicație? O bijecție?

18. În mulțimea Z se consideră relația $x\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow x^2 = y^2$. Este aceasta o relație de echivalență?

19. În mulţimea Z se consideră relaţia : $a\mathfrak{R}b \Leftrightarrow a - b$ este număr par. Este $\mathfrak{R}$ o relaţie de echivalenţă? Care sînt clasele de echivalenţă? Cîte elemente are mulţimea cît?

20. Se consideră mulţimea $E = \{a, b, c, d\}$ şi submulţimea $F = \{a, b\}$ a lui E. Se consideră pe $\mathfrak{P}(E)$ relaţia $\mathfrak{R}$, definită astfel : $X\mathfrak{R}Y \Leftrightarrow F \cap X = F \cap Y$. Dacă $X, Y \in \mathfrak{P}(E)$, atunci :

a) Este $\mathfrak{R}$ o relaţie de echivalenţă?

b) Să se indice clasele de echivalenţă ale lui $\{b, c\} \in \mathfrak{P}(E)$.

c) Să se indice clasele lui $\emptyset$.

21. Se dă în Z relaţia $\mathfrak{R} : a\mathfrak{R}b \Leftrightarrow a^3 - a = b^3 - b$.

a) Este o relaţie echivalenţă?

b) Să se determine clasele de echivalenţă.

22. În $N \times N$, se consideră relaţia „$\sim$" definită astfel : $(a, b) \sim (a', b')$ dacă $a + b' = a' + b$.

a) Este o relaţie de echivalenţă.

b) Să se arate care sînt elementele din $N \times N$ echivalente cu $(5, 2)$; $(1, 2)$; $(3, 3)$.

23. Se consideră mulţimea $Z^* = Z - \{0\}$.

În $Z \times Z^*$ se consideră relaţia „$\sim$", definită astfel : Dacă $(a, b) \in Z^*$ şi $(a', b') \in Z^*$, atunci

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow ab' = ba'$$

a) Este $\mathfrak{R}$ o relaţie de echivalenţă?

b) Care sînt elementele echivalente cu $(3,7)$ şi $(-12, 6)$.

24. Relaţia de perpendicularitate între mulţimea dreptelor din plan e o relaţie de echivalenţă? Dar relaţia de paralelism?

25. Relaţia de inegalitate a numerelor reale este o relaţie de echivalenţă? Dar cea de egalitate?

26. Relaţia de divizibilitate a numerelor întregi o relaţie de echivalenţă?

27. Este relaţia de asemănare a triunghiurilor plane o relaţie de echivalenţă?

28. Fie E mulţimea segmentelor orientate din plan. Spunem că două segmente a şi b sînt în relaţia $\mathfrak{R}$ $(a \mathfrak{R} b)$, dacă a şi b

sînt coliniare, au aceeaşi lungime şi acelaşi sens. Este aceasta o relaţie de echivalenţă?
Dar dacă E e mulţimea segmentelor din spaţiu?

29. Doi întregi naturali a şi b sînt în relaţia $\mathcal{R}$ dacă $\sqrt{ab}$ e număr natural. E aceasta o relaţie de echivalenţă?

30. Se consideră aplicaţia $f: N \to N$, definită prin $f(x) = x + 4$. Este această funcţie bijectivă?

31. Se consideră aplicaţia $f: R^+ \to R$ dată prin relaţia $f(x) = x^{2k}$. Este surjectivă?

32. Fie aplicaţia $f: R - \{2\} \to R$ definită prin $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$.
Este surjectivă?

33. Se dă aplicaţia $f: R \to R$ definită prin $f(x) = x^2 - 2x + 1$ Este surjectivă? Dar injectivă?

34. Se dă aplicaţia $f: R \to R$ definită prin $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$
Este această aplicaţie surjectivă?

35. În mulţimea R se consideră relaţia $x \mathcal{R} y$:
$x^4 - 2x^2 - 2x + 3 = y^4 - 2y^2 - 2y + 3$.
Este această relaţie reflexivă? Este simetrică?

36. În mulţimea $E = \{1, 2\}$ se consideră relaţia $x \mathcal{R} y$:
$x^2 - 3ax + a^2 = y^2 - 3ay + a^2$.
Să se arate că, pentru orice $a \in R$, relaţia este simetrică şi reflexivă.

37. În mulţimea N se consideră relaţia $x \mathcal{R} y$: $x^2 + y^2 - 25a^2 = 0$, unde $a \in N$. Să se determine $(x, y) \in N \times N$, cu proprietatea $x < 20$, $y \leqslant 20$, care verifică relaţia dată.
Să se arate că perechile de numere naturale $(x, y) \in N^2$, pentru care $x \mathcal{R} y$ este adevărată sînt multiplii numărului a. Este această relaţie simetrică? Este tranzitivă? Este simetrică?

38. Pe mulţimea Q a numerelor raţionale vom defini o relaţie $\mathcal{R}$ în modul următor:
Dacă x şi y sînt două numere raţionale, atunci: $x \mathcal{R} y$, dacă $x - y \in Z$. Să se arate că relaţia $\mathcal{R}$ este o relaţie de echivalenţă.

39. Să se reprezinte grafic funcţia:
$$y = x^2 + \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2}.$$

40. Se consideră funcţia :

$f: R \to R$ definită prin : $f(x) = \begin{cases} x \text{ dacă } x \in [0, 1] \\ x^2 \text{ dacă } x \in (-\infty, 0) \cup (1 + \infty). \end{cases}$

Să se traseze graficul.

41. Să se verifice dacă funcţia :

$f: R - \{-1, +1\} \to R - (-1,0)$, dată de relaţia $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ este bijectivă.

42. Se consideră funcţia :

$$f: R - \{-1\} \to R - \{-1\}; \ f(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

a) Să se arate că funcţia este bijectivă;

b) Să se determine inversa acestei funcţii.

43. Să se stabilească dacă funcţia $f: R^+ \to R^+$ definită prin relaţia $f(x) = x^{4k}$; $k \in N$ este injectivă.

44. Să se arate că funcţia;

$f: R \to R$; $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $ad \neq bc$ este bijectivă.

45. Se consideră funcţia :

$f: [0,4] \to [3,11]$; $f(x) = 2x + 3$.

a) Să se arate că funcţia este inversabilă;

b) Să se afle inversa.

46. Să se arate că funcţia :

$f: [2, +\infty) \to R$; $f(x) = x^2 - 2x + 3$ este injectivă.

47. Să se arate că funcţia $f: N \to N$ definită prin $f(x) = x^2$ este bijectivă.

48. Fie funcţia $f: R \to \mathrm{R}$; $f(x) = |x - a| + |x - b|$; $0 < a < b$.

Să se demonstreze că graficul funcţiei admite dreapta $x = \frac{a+b}{2}$ ca axă de simetrie.

49. Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcţiei: $f(x) = x^2 + 3x - 108$.

50. Fie funcţia $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$; $f: (-1,1) \to R$.

Să se arate că pentru orice $a, b \in (-1,1)$ există $c \in (-1,1)$ astfel ca: $f(a) + f(b) = f(c)$.

51. Fie funcţia $f: R \to (-1,1)$ definită prin $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Se cere să se arate că f este bijectivă şi apoi să se calculeze inversa.

52. Se consideră funcţia $f(x) = x^2 - (m-4)x + m - 6$, unde m este un parametru real. Se cere:

a) Să se găsească valoarea minimă a expresiei $E(m) = x_1^2 + x_2^2$ (x_1 şi x_2 fiind rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$).

b) Să se determine o restricţie crescătoare şi o restricţie strict descrescătoare a funcţiei $f(x_1b, m_1 + 1)$, unde m_1 este valoarea lui m care realizează minimul expresiei $E(m)$.

53. Se consideră funcţia $f: \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \to \left(-\infty, \frac{9}{8}\right]$, $f(x) = |x^2 - 1| + x|x-1|$.

a) Să se arate că funcţia este bijectivă;

b) Să se studieze monotonia funcţiei.

54. Se consideră funcţia:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{dacă } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \cos x, & \text{dacă } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}.$$

Să se determine mulţimile:

$A = \{x \in [0, \pi] \mid f(x) + |f(x)| = 0\}$

$B = \{x \in [0, \pi] \mid f(x) \leqslant |\text{tg } 2x|\}$.

55. Să se afle domeniul maxim de definiţie al funcţiei:

$f: E \to R$; $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$.

56. Se consideră funcţia:

$$f(x) = \frac{a\,x^2 + (a+b)x + b}{b\,x^2 + (a+b)x + a}, \quad a, b \in R - \{0\};\ a \neq \pm b.$$

Să se precizeze submulţimea lui R pe care poate fi definită f. Să se arate că f este bijectivă.

57. Se dă funcţia : $f:[2a+4, 3a+3] \to F$, unde $y = f(x) = 2x^2 + 3$ şi F este mulţimea valorilor funcţiei :

a) Să se determine toate valorile lui a pentru care f este o bijecţie.

b) Pentru valorile lui a găsite la (*a*) să se determine funcţia reciprocă.

58. Fie mulţimea $E = \{0, 1\}$ şi funcţia $f: R \to R$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & \text{dacă } x \in E \\ x + 4, & \text{dacă } x \in R \setminus E. \end{cases}$$

Să se verifice că f este o funcţie bijectivă.

59. Fie corespondenţa $A \to B$, în care $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}\right\}$ şi $y = \frac{mx+1}{x+1}$ cu $x \in A$ şi $y \in B$.

Să se determine $m \in Z$ astfel încît aplicaţia dată să fie bijectivă.

60. Se dă funcţia : $f: (-\infty, 0] \to F$

$$f(x) = \arcsin \frac{1}{1+x^2}.$$

a) Să se arate că funcţia este injectivă ;

b) Să se determine F astfel încît funcţia să fie bijectivă.

61. Se dă funcţia $f: R \to R$ de forma :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1] \\ 3x + 1, & \text{dacă } x \in (-1, +\infty). \end{cases}$$

a) Să se stabilească dacă funcţia este bijectivă ;

b) Să se construiască graficul funcţiei.

62. Se consideră funcţia : $f: R \to R$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in R$.

Se cere :

a) să se determine a şi b astfel încît $f(1) = 1$, $f(-2) = 7$;

b) să se reprezinte grafic funcţia $f(x) = -2x + 3$;

c) să se studieze semnul funcţiei.

63. Să se arate că funcţia $f: R \to R$, $f(x) = x^3 - 5x^2 + 10x - 1$ este strict crescătoare pe intervalul: $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$.

64. Fie funcţia $f: R \to R$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \in (-\infty, 1] \\ ax + b, \text{ dacă } x \in (1, 2) \\ x^2 - 4x + 8, \text{ dacă } x \in [2, +\infty), \end{cases}$$

unde $a, b \in R$, $a \neq 0$.

a) Să se determine a şi b astfel încît funcţia să fie monotonă;

b) Să se precizeze pentru valorile lui a şi b determinate la punctul (a) dacă funcţia este bijectivă.

65. Fie funcţia $f: E \to f(E)$ prin relaţia:

$$y = a^{2\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}$$

unde $a > 1$ şi E domeniul maxim de definiţie pe care f poate fi inversată.

a) Să se afle inversa;

b) Să se afle funcţia $f \circ f^{-1}$.

Capitolul 16

LEGI DE COMPOZIȚIE INTERNĂ

Definiția 16.1. O lege de compoziție internă într-o mulțime E este o aplicație a unei părți F a mulțimii $E \times E$ în E care face să corespundă unei perechi $(x, y) \in E \times E$ un element unic z al lui E

$$F \subset E \times E, (x, y) \in F, z \in E, (x, y) \to z.$$

Imaginea z a perechii (x, y) este numită compusul elementelor x și y prin legea de compoziție dată, iar x, y sînt termenii acestei operații.

16.1. PROPRIETĂȚI ALE UNEI LEGI DE COMPOZIȚIE INTERNE

a) *Comutativitatea*

Definiția 16.2. O lege de compoziție $\top$, definită pe mulțimea E, este comutativă dacă, pentru orice pereche de elemente ale lui E, este satisfăcută relația:

$$\forall (x, y) \in E \times E : x \top y = y \top x.$$

b) *Asociativitate*

Definiția 16.3. O lege de compoziție internă $\top$, definită pe mulțimea E, este asociativă dacă și numai dacă:

$$\forall x \in E, \ \forall y \in E, \ \forall z \in E, (x \top y) \top z = x \top (y \top z).$$

Dacă această egalitate are loc, parantezele pot fi suprimate și prin urmare putem scrie: $x \top y \top z$.

c) *Element neutru*

Definiția 16.4. Dacă într-o mulțime E, în care s-a definit o lege de compoziție $\top$, există un element e astfel încît pentru orice element $x \in E$ să avem: $x \top e = e \top x = x$, atunci e se numește element neutru pentru legea $\top$. Se scrie:

$$\exists\, e \in E : \forall\, x \in E,\ x \top e = e \top x = x.$$

Teorema 16.1. Dacă într-o mulțime E înzestrată cu o lege de compoziție $\top$, există un element neutru e, atunci acesta este unic.

Demonstrație:

Să presupunem că există două elemente neutre distincte.

$$\forall x \in E : x \top e = e \top x = x \qquad (1)$$

$$\forall\, y \in E : y \top e' = e' \top y = y \qquad (2)$$

Dacă în particular $y = e$ atunci ținînd seama de (2) obținem:

$$e' \top e = e \top e' = e. \qquad (3)$$

Dacă facem $x = e'$ atunci din relația (1) obținem:

$$e' \top e = e \top e' = e' \qquad (4)$$

Din relația (3) și (4) avem $e = e'$.

d) *Element regulat*

Definiția 16.5. Fie o mulțime E înzestrată cu o lege de compoziție internă $\top$. Dacă, oricare ar fi elementele x, y și z ale mulțimii E, egalitatea elementelor $x \top y$ și $x \top z$ implică egalitatea elementelor y și z, atunci elementul x este regulat la stînga.

$$\forall\, y \in E,\ \forall z \in E,\ x \top y = x \top z \Rightarrow y = z.$$

În mod asemănător dacă are loc implicația:

$$\forall y \in E,\quad \forall z \in E,\ y \top x = z \top x \Rightarrow y = z$$

atunci se spune că x este regulat la dreapta.

e) *Element simetrizabil.*

Definiția 16.6. Într-o mulțime E, înzestrată cu o lege de compoziție internă $\top$ și posedînd un element neutru e, un element x

se numește simetrizabil pentru legea $\top$, dacă există în mulțimea E un element x^{-1} astfel încît:

$$x \top x^{-1} = x^{-1} \top x = e.$$

16.2. DISTRIBUTIVITATEA UNEI LEGI DE COMPOZIȚIE FAȚĂ DE O ALTĂ LEGE DE COMPOZIȚIE

Definiția 16.7. Se consideră o mulțime E înzestrată cu două legi interne $\top$ și θ. Se spune că legea $\top$ este distributivă la stînga în raport cu legea θ dacă:

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \forall z \in E,\ x \top (y\ \theta\ z) = (x \top y)\ \theta\ (x \top z).$$

Exemple:

În mulțimile N, Z, Q, R, înmulțirea este distributivă față de adunare.

$$\forall a,\ \forall b,\ \forall c: a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

16.3. OMOMORFISM. IZOMORFISM

Fie E o mulțime înzestrată cu o lege de compoziție internă notată $*$ și E' o altă mulțime, în care s-a definit o lege de compoziție internă notată $\top$.

Definiția 16.8. O aplicație f a lui $(E, *)$ în $(E', \top)$, este un omomorfism al lui E în E' dacă:

$$f(a * b) = f(a) \top f(b), \text{ oricare ar fi } a, b \in E.$$

Observație

1) $f(a * b)$ este imaginea prin aplicația f a elementului ce se obține în mulțimea E, dacă compunem pe a cu b;

2) $f(a) \top f(b)$ este elementul ce se obține în mulțimea E', dacă compunem imaginile elementelor a, b din mulțimea E.

Deci, aplicația f este un omomorfism, dacă imaginea prin f a elementului compus $a * b$ este compusul, prin operația $\top$, a imaginilor $f(a)$ și $f(b)$ din E'.

Definiția 16.8. O aplicație f a mulțimii $(E, *)$ în $(E, \top)$ este izomorfă, dacă este omomorfă și bijectivă.

16.4. EXERCIȚII ȘI PROBLEME REZOLVATE

Exemplul 1

Pe mulțimea E se consideră o lege de compoziție internă notată cu $*$. Să presupunem că această lege este asociativă și e este elementul său neutru. Să se arate că orice element care admite un invers în E este de asemenea regulat.

Soluție

Este suficient să arătăm că:

$$[\forall x \in E / x^{-1} * x = e] \Rightarrow [(x * y = x * z) \Leftrightarrow (y = z)]$$

Fie $x * y = x * z$.
Din ipoteza că x^{-1} există avem:

$$x * y = x * z \Leftrightarrow x^{-1} * (x * y) = x^{-1} * (x * z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^{-1} * x) * y = (x^{-1} * x) * z \text{ (asociativitate)}$$

$$\Leftrightarrow e * y = e * z \Leftrightarrow y = z.$$

Exemplul 2

Fie funcția $f: N \times N \to N$, definită astfel:

$$\forall (a, b) \in N \times N; f(a, b) = 3a + b.$$

Să notăm $f(a, b) = a * b$:

1°. Să se arate că $f(a, b)$, este o lege de compoziție.

2°. Să se studieze comutativitatea și asociativitatea legii de compoziție date;

3°. Admite element neutru?

4°. Este distributivă în raport cu adunarea?

Soluție

1°. $\forall (a, b) \in N \times N$, $f(a, b) = 3a + b \in N$ și $f(a, b)$ este unic.

f este deci o aplicație a lui $N \times N$ în N și legea $*$ este o lege de compoziție internă în N.

2°. $a * b = 3a + b,$

$$b * a = f(b, a) = 3b + a.$$

$$a * b = b * a \Leftrightarrow 3a + b = 3b + a \Rightarrow a - b = 0.$$

Deoarece $a \neq b$, avem $a - b \neq 0$, prin urmare legea nu este comutativă.

$$a * b = 3a + b \Rightarrow (a * b) * c = 3(3a + b) + c = 9a + 3b + c.$$

$$b * c = 3b + c \Rightarrow a * (b * c) = 3a + (3b + c) \neq 9a + 3b + c.$$

Legea $*$ nu este asociativă.

3°. Dacă e este un element neutru la dreapta atunci avem:

$$\forall a \in N,\ a * e = a \Leftrightarrow 3a + e = a \Leftrightarrow 2a + e = 0.$$

Elementul e nu este independent de a şi prin urmare legea nu admite un element neutru la dreapta.
Dacă e' este un element neutru la stînga atunci avem:

$$\forall b \in N,\ e' * b = b \Leftrightarrow 3e' + b = b \Leftrightarrow 3e' = 0,\ e' = 0.$$

Prin urmare 0 este un element neutru la stînga.

4° $\forall (a, b, c) \in N^3$ avem:

$a * (b + c) = 3a + b + c;$

$a * b + a * c = 3a + b + 3a + c = 6a + b + c \neq 3a + b + c.$

Legea $*$ nu este distributivă în raport cu adunarea.

Exemplul 3

Pe mulţimea Z se consideră legea de compoziţie $*$ definită prin:

$$x * y = 2x + 3y - 1.$$

a) Este această lege asociativă?

b) Admite această lege un element neutru?

c) Este această lege comutativă?

Soluţia

a) Asociativitatea:

$$x * (y * z) = x * (2y + 3z - 1) = 2x + 3(2y + 3z - 1) - 1 =$$
$$= 2x + 6y + 9z - 4.$$

$$(x * y) * z = (2x + 3y - 1) * z = 2(2x + 3y - 1) + 3z - 1 =$$
$$= 4x + 6y + 3z - 3;$$
$$x * (y * z) \neq (x * y) * z.$$

Deci legea nu este asociativă.

b) Element neutru:

$\forall x \in Z$; $x * e = e * x = x$,

$$x * e = 2x + 3e - 1 = x \Leftrightarrow 3e = 1 - x \Leftrightarrow e = \frac{1 - x}{3},$$

e este dependent de x şi prin urmare legea $*$ nu admite element neutru.

c) Comutativitatea:

$$x * y = 2x + 3y - 1,$$
$$y * x = 2y + 3x - 1,$$
$$x * y \neq y * x.$$

Legea nu este prin urmare comutativă.

Exemplul 4.

Se consideră mulţimea $E = \{a, b, c, d\}$ şi o lege de compoziţie notată $*$, a cărei tabelă, dată mai jos, este parţial cunoscută.

	a	b	c	d
a			a	c
b			b	
c	a	b	c	d
d	c		d	

Este posibil să completăm această lege astfel ca:

1. legea să fie comutativă;
2. să posede un element neutru;
3. orice element să aibă un simetric.

Soluţie

Pentru ca legea să fie comutativă trebuie ca în căsuţele simetrice faţă de diagonala principală să avem aceiaşi termeni:

Din tablou rezultă că avem :

$$a * c = c * a = a \qquad (1)$$

$$d * a = a * d = c. \qquad (2)$$

Deoarece legea este simetrică trebuie să avem :

$$b * c = b. \qquad (3)$$

Din (1) şi (3) rezultă că c este un element neutru. Prin urmare putem completa toate căsuţele care sînt la intersecţia liniei sau coloanei ce conţine pe c cu celelalte linii sau coloane.

Mai departe $a * a$ nu poate fi a, deoarece a nu este element neutru. De aici deducem $a * a = b$, deoarece $a * d = c$.

Avem : $b * a = d$ şi $c * b = d$ deoarece legea este comutativă.

Ţinînd seama că legea este comutativă şi fiecare element are un simetric se obţin relaţiile :

$$b * b = c$$

$$b * d = d * b = a.$$

$$d * d = b$$

În final tabela legii ,,*" este următoarea :

*	a	c	b	d
a	b	d	a	c
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	c	a	d	b

Exemplul 5

Să se arate că produsul a două izomorfisme este de asemenea un izomorfism.

Demonstraţie

Fie f un izomorfism al mulţimii E în mulţimea F în raport cu două legi de compoziţie notate $*$ şi $\top$, legea lui E fiind notată $*$, legea lui F fiind notată $\top$.

Fie g un izomorfism al mulţimii F în mulţimea H în care s-a definit o lege de compoziţie notată θ.

1) Deoarece f şi g sînt izomorfisme, ele sînt bijective (un izomorfism este o aplicaţie bijectivă) şi deci $g \circ f$ este bijectivă.

2) Ne rămîne să arătăm că $g \circ f$ este un omomorfism.

f fiind un izomorfism: $f(x * y) = f(x) \top f(y)$,

g fiind de asemeni izomorfism: $g[f(x) \top f(y)] = g[f(x)] \theta g[f(y)]$.

Din aceste două egalități deducem:

$$g[f(x * y)] = g[f(x)] \theta g[f(y)],$$

sau:

$$[g \circ f](x * y) = \{[g \circ f](x)\} \theta \{[g \circ f](y)\}.$$

Prin urmare $g \circ f$ este un omomorfism și fiind și bijectiv este un izomorfism.

Exemplul 6

Fie I mulțimea întregilor naturali de forma 2^n unde n este un întreg natural.

Să se arate că există un izomorfism a lui $(N, +)$ pe $(I, \times)$.

Soluție

Fie f o aplicație a lui N în I definită astfel:

$N \xrightarrow{f} I$, $\forall n \in N$, $f(n) = 2^n = y \in I$.

1. f este injectivă, deoarece:

$$n_1 \neq n_2 \Rightarrow 2^{n_1} \neq 2^{n_2}.$$

2. f este surjectivă, căci:

$$\forall y \in I, \exists n \in N \mid y = 2^n.$$

Prin urmare, din (1) și (2) rezultă că f este o aplicație bijectivă.

3. $f(n_1) = 2^{n_1}$, $f(n_2) = 2^{n_2}$,

$$f(n_1 + n_2) = 2^{n_1+n_2} = 2^{n_1} \cdot 2^{n_2} = f(n_1) \cdot f(n_2).$$

f este prin urmare un omomorfism.

$[f$ omomorfism $\wedge$ f bijecție$] \Leftrightarrow f$ izomorfism.

16.5. EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Pe mulțimea $R \times R$ se consideră o lege de compoziție definită astfel:

$$a * b = \frac{a \cdot b}{2}$$

Să se calculeze $4 * 5$.

2. Se consideră legea : $a \top b = a^2 + b$. Este aceasta o lege de compoziţie în N? Este o lege de compoziţie în Z? Este o lege de compoziţie în Q?
Să se calculeze : $3 \top 5$.

3. Se consideră legea $a * b = a + b + ab$. Este aceasta o lege de compoziţie în N sau în Z?

4. Pe mulţimea N se consideră legea de compoziţie $a \theta b = a^b$. Să se afle : $3 \theta 5$, $3 \theta 2$. Legea este comutativă? Este asociativă?

5. Pe mulţimea N se consideră legea de compoziţie internă $x * y = xy + x^2 + y^2$. Este această lege comutativă?

6. Pe mulţimea Q se consideră legea de compoziţie internă $a \theta b = \dfrac{a+b}{2}$. Este această lege asociativă?

7. Pe mulţimea $A = \{a, b, c, d\}$, se consideră o lege de compoziţie internă dată de tabloul desenat mai jos.
Este această lege asociativă? Dar comutativă?

$\top$	a	b	c	d
a	c	b	d	a
b	c	d	c	b
c	b	a	a	c
d	d	c	b	d

8. Să se studieze existenţa elementului neutru în mulţimea N avînd legile de compoziţie indicate mai jos :

$$x * y = x^3 + y^3,$$
$$x \square y = x(x + y).$$

9. În mulţimea N se consideră o lege de compoziţie internă indicată de relaţia :

$$x * y = x^3 + y^3.$$

Să se cerceteze dacă există elemente regulate.

10. În mulţimea $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ se defineşte legea de compoziţie internă $*$, definită astfel :

$$x * y = \max(x, y).$$

Să se alcătuiască tabela acestei legi de compoziţie.

11. Arătaţi care din următoarele legi de compoziţie definite pe mulţimea numerelor întregi sînt comutative.

a) $x * y = x + 2y$;

b) $x * y = 2xy$;

c) $x * y = 2x + 2y$;

d) $x * y = x^y$;

e) $x * y = x + y + 1$.

12. Arătaţi care din următoarele legi de compoziţie definite pe R_+ sînt asociative:

a) $x * y = x + y$;

b) $x * y = xy^2$;

c) $x * y = x^y$;

d) $x * y = \sqrt{xy}$;

e) $x * y = xy - 1$.

13. Se dau două legi de compoziţie notate * şi #, definite astfel:

a) $x \# y = x + y, x * y = xy$;

b) $x \# y = 2x + 2y, x * y = \frac{xy}{2}$;

c) $x \# y = x + y + 1, x * y = xy$.

Arătaţi în care din aceste cazuri legile # sînt distributive faţă de legile *.

14. Pe mulţimea R se defineşte legea de compoziţie internă * astfel:

$$\forall (a, b) \in R \times R,\ a \neq b, a * b = \frac{a^2 - b^2}{a - b}$$

a) Să se arate că această lege este comutativă, asociativă şi că posedă un element neutru e.

b) Se pot obţine aceste rezultate mai simplu?

15. Se consideră legea de compoziţie asociativă f definită pe mulţimea E astfel:

$$\forall(x, y) \in E^2; f(x, y) = x * y = z, z \in E.$$

Să se demonstreze că această lege nu admite mai mult de un element neutru.

16. Pe mulţimea N se defineşte o lege de compoziţie internă θ astfel:

$$x \theta y = x + 3y.$$

Această lege este distributivă în raport cu adunarea?
Adunarea este distributivă în raport cu legea θ?

17. Pe mulţimea Z se consideră legea definită astfel:

$$x * y = 2x + 3y - 1.$$

a) Această lege este asociativă?

b) Are un element neutru?

c) Este comutativă?

18. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea $a * b = a^2 + b^2 + ab$.

a) Să se arate că această lege nu este asociativă;

b) Să se determine x din relaţia: $x * 3 = 10$.

19. Pe mulţimea Z se consideră o lege de compoziţie internă $\top$ dată de relaţia: $x \top y = 2x + y$.
Să se cerceteze dacă în raport cu legea de compoziţie internă $\top$ există elemente regulate.

20. Se dă: $R_+ = \{x \mid x > 0, x \in R\}$.

Pe R_+ se defineşte următoarea lege:

$$x * y = \sqrt{xy}.$$

Să se arate că legea este comutativă dar nu-i asociativă.
21. Fie a şi b, două numere reale nenule.
Se defineşte între aceste numere reale legea de compoziţie, astfel:

$$a * b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

a) Să se arate că această lege ese comutativă;

b) Să se arate că în general legea nu este asociativă;

c) Ce condiţie trebuie să îndeplinească numerele a, b, c pentru ca această lege să fie asociativă?

22. Fie legea de compoziţie notată cu semnul $*$ definită pe mulţimea $[1, \infty)$ prin:

$$x * y = (x - 1)(y - 1) + a.$$

a) Să se afle valoarea minimă a lui a pentru care legea este peste tot definită pe mulţimea $[1, \infty)$;

b) Să se determine a astfel încît legea să admită un element neutru.

Indicaţie:

$$(x - 1)(e - 1) + a = x \Leftrightarrow xe - e - x + 1 + a = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e(x - 1) = 2x - (1 + a) \Rightarrow 1 + a = 2 \Rightarrow e = 2.$$

Capitolul 17

STRUCTURI ALGEBRICE

Se consideră o mulţime E pe care s-a definit cel puţin o lege de compoziţie internă $*$. Mulţimea E împreună cu legea de compoziţie internă $*$ se numeşte *structură algebrică* şi se notează $(E,*)$.

17.1. GRUP

Definiţie 5.1.

O mulţime E pe care s-a definit o lege de compoziţie internă notată $*$, se numeşte grup dacă legea de compoziţie are următoarele proprietăţi :

1) Legea este asociativă :

$$\forall x, y, z \in E: \qquad (x * y) * z = x * (y * z);$$

2) Legea posedă un element neutru ;

$$\exists e \in E \text{ astfel încît}:$$

$$\forall x \in E, x * e = e * x = x;$$

3) Fiecare element al lui E, are un simetric care este de asemenea element a lui E.

$$\forall x \in E, \exists x^{-1} \in E \text{ astfel încît } x * x^{-1} = x^{-1} * x = e.$$

Un grup se notează indicînd mulţimea E şi legea sa de compoziţie $*$ sau $(E, *)$.

Dacă legea de compoziţie dată este comutativă, atunci grupul se mai numeşte comutativ sau abelian.

Exemple :

1. Mulţimea Z a numerelor întregi împreună cu operaţia de adunare formează grupul $(Z, +)$.

17.1.1. PROPRIETĂŢILE UNUI GRUP

a) Simetricul unui element este unic.

b) Orice element al unui grup este regulat pentru operaţia grupului.

c) Într-un grup ecuaţia $a * x = b$ are o soluţie şi numai una ($*$ este operaţia grupului).

Demonstraţie

Să notăm a^{-1} simetricul elementului a şi avem :

$$a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * b$$

sau :

$$(a^{-1} * a) * x = a^{-1} * b,$$

$$e * x = a^{-1} * b \Leftrightarrow x = a^{-1} * b.$$

d) Într-un grup ecuaţia $y * a = b$ are o soluţie şi numai una. Această soluţie este $y = b * a^{-1}$.

17.1.2. SIMETRICUL COMPUSULUI A DOUĂ ELEMENTE

Se consideră grupul $(E, *)$ şi se cere simetricul elementulu $a * b$.

Să observăm că :

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} = (a * e) * a^{-1} =$$
$$= a * a^{-1} = e.$$

Prin urmare simetricul elementului $a * b$ este elementul $b^{-1} * a^{-1}$.

17.2. SUBGRUP

Definiția 17.1. Fiind dat un grup E se numește subgrup a lui E, o submulțime G a lui E care este înzestrată cu aceeași lege de compoziție internă și în raport cu care formează grup.

O submulțime G a unui grup $(E, *)$ formează subgrup dacă:

$$1) \ \forall x \in G, \quad \forall y \in G, \quad x * y \in G;$$

2) Elementul neutru e a lui E pentru legea de compoziție este de asemenea un element neutru și pentru G.

3) Dacă $a \in E$ atunci simetricul lui aparține mulțimii E.

Exemplul 1

Se consideră mulțimea R^+, a numerelor reale pozitive și legea de compoziție $*$ definită astfel:

$\forall(a, b) \in R^+ \times R^+$, $a * b = \max(a, b)$, unde $\max(a, b)$ este cel mai mare din două numere date. Să se arate că legea $*$ nu determină pe R^+ o structură de grup.

Soluție

1) $\max(a, b) = \max(b, a)$ (comutativitate);

$$2) \ a \leqslant b \leqslant c \Rightarrow \begin{cases} \max(a, b) = b; \max[(a, b), c] = \max(b, c) = c. \\ \max(b, c) = c; \max[a, (b, c)] = \max(a, c) = c. \end{cases}$$

Prin urmare legea este asociativă.

3) $\forall a \in R^+$; $a \geqslant 0 \Rightarrow \max(a, 0) = a$.

0 este deci elementul neutru pentru legea $*$.

4) $\forall(a, b) \in R^+ \times R^+$, $0 \leqslant a \leqslant b \Rightarrow \exists\, x^{-1} \in R^+$,

$$\forall x \in R^+, \ \sup(x, x^{-1}) \neq 0.$$

Legea $*$ nu ne permite să simetrizăm elementele lui R^+. Deci $(R^+, *)$ nu are o structură de grup.

Exemplul 2

Se consideră mulţimea B a numerelor de forma ;

$$2^x \times 3^y \text{ unde } (x, y) \in Z^{*2} \ (Z* = Z - \{0\}).$$

Să se arate că $(B, \times)$ formează grup.

Soluţie

1) *Comutativitate*

$$(2^{x_1} \times 3^{y_1}) \times (2^{x_2} \times 3^{y_2}) = 2^{x_1+x_2} \times 3^{y_1+y_2} = 2^{x_2+x_1} \times$$
$$\times 3^{y_2+y_1} = (2^{x_2} \times 3^{y_2}) \times (2^{x_1} \times 3^{y_1}) \text{ — comutativitate}$$

2. **Asociativitate**

$$[(2^x \times 3^y) \times (2^{x_1} \times 3^{y_1})] \times (2^{x_2} \times 3^{y_2}) = 2^{x+x_1+x_2} \times 3^{y+y_1+y_2}$$
$$(2^x \times 3^y) \times [(2^{x_1} \times 3^{y_1}) \times (2^{x_2} \times 3^{y_2})] = 2^{x+x_1+x_2} \times 3^{y+y_1+y_2}$$

3) *Element neutru*

$$(2^x \times 3^y) \times (2^{e_1} \times 3^{e_2}) = 2^{x+e_1} \times 3^{y+e_2} = 2^x \times 3^y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + e_1 = x, \ y + e_2 = y \Rightarrow e_1 = e_2 = 0.$$

Elementul neutru este : $2^{e_1} \times 3^{e_2} = 2^\circ \times 3^\circ = 1$.

Elementul 1 este de asemenea neutru şi la stînga :

$$1 \times (2^x \times 3^y) = 2^x \times 3^y.$$

e) Simetricul elementului $2^x \times 3^y$ este elementul $2^{x_1} \times 3^{y_1}$ care verifică relaţia :

$$(2^x \times 3^y) \times (2^{x_1} \times 3^{y_1}) = 1$$
$$2^{x+x_1} \times 3^{y+y_1} = 2^\circ \times 3^\circ \Rightarrow x_1 = -x; \ y_1 = -y.$$

Acest element este simetric la stînga deoarece avem :

$$(2^{-x} \times 3^{-y}) \times (2^x \times 3^y) = 1$$

$(B, \times)$ este prin urmare un grup.

Exemplul 3

Să se arate că dacă există un omomorfism între două grupuri G_1 şi G_2, imaginea elementului neutru a lui G_1 prin acest omomorfism este elementul neutru a lui G_2.

Demonstrație :

Să notăm cu f omomorfismul, prin e_1 și e_2 elementele neutre, respectiv, ale lui G_1 și G_2.

Fie $*$ legea de compoziție internă a lui G_1 și θ legea lui G_2.

Vom avea :

$$f(x * e_1) = f(x)\ \theta\ f(e_1),\ \forall\ x \in G_1.$$

Dar $f(x * e_1) = f(x)$ și prin urmare avem :

$$f(x) = f(x)\ \theta\ f(e_1)$$

De unde rezultă că, dacă e_1 este element neutru pentru legea $*$, atunci $f(e_1)$ este element neutru pentru legea θ.

Exemplul 4

Într-un reper ortonormat se consideră cercul (c) de ecuație :

$$x^2 + y^2 = 1$$

Fiind date două puncte $M(x, y)$ și $M'(x', y')$ distincte sau nu, se definește punctul S, de coordonate X, Y date de relațiile :

$$\begin{cases} X = xx' - yy' \\ Y = xy' + x'y \end{cases}$$

Să notăm $S = M * M'$

1°. Să se arate că legea este o lege de compoziție internă pe (c) ;

2°. Să se arate că $((c), *)$ este un grup abelian.

Soluție

1. Legea $*$ este o lege de compoziție internă :

$$\begin{cases} M \in (c) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \\ M' \in (c) \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 = 1 \end{cases}$$

Deci : $X^2 + Y^2 = (xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2 =$

$$= x^2x'^2 + y^2y'^2 + x^2y'^2 + x'^2y^2 =$$

$$= x^2(x'^2 + y'^2) + y^2(x'^2 + y'^2) = 1$$

De unde : $X^2 + Y^2 = 1 \Leftrightarrow S(X, Y) \in (c)$.

2.*a*) Asociativitatea :

Fie $M(x, y)$, $M'(x', y')$, $M''(x'', y'')$, avem :

$$M * M'; \begin{cases} x = xx' - yy' \\ y = xy' + x'y \end{cases} \Rightarrow (M * M') * M'':$$

$$\begin{cases} x_1 = xx'' - yy'' \\ y_1 = xy'' - x''y \end{cases}$$

Fie $x_1 = (xx' - yy')\, x'' - x''(xy' + x'y)$

$$= xx'y'' - yy'y'' + xx''y' + x'x''y.$$

Pe de altă parte avem :

$$M' * M'' \begin{cases} x = x'x'' - y'y'' \\ y = x'y'' - y'x'' \end{cases} \Rightarrow (M*M') * M''$$

$$\begin{cases} x_2 = xx' - yy' \\ y_2 = xy' - yx' \end{cases}$$

Fie : $x_2 = x'x''x - xy'y'' - yx'y'' - yy'x''$

$$y_2 = xx'y'' + xyx'' + yx'x'' - yy'y'$$

Se constată că :

$$x_1 = x_2$$

$y_1 = y_2$, şi, prin urmare, avem :

$$M * (M' * M'') = (M * M') * M''.$$

b) Comutativitatea :

$$M * M' : \left\{ \begin{aligned} x &= xx' - yy' = x'x - y'y \\ y &= xy' + yx = x'y + y'x \end{aligned} \right\} : M' * M.$$

c) Element neutru : Fie $I(e_1, e_2)$ elementul neutru.

$$M * I = M : \begin{cases} e_1x + e_2y = x \\ e_2x + e_1y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(e_1 - 1) - e_2y = 0 \\ e_2x + y(e_1 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 1 \\ e_2 = 0 \end{cases}$$

Elementul neutru este $I\,(1, 0)$.

d) Simetricul unui element,

Fie $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$ simetricul unui element $M(x, y)$

$$M * \bar{M} = \mathrm{I} \Rightarrow \begin{cases} x\bar{x} - y\bar{y} = 1 \\ \bar{y}x + \bar{x}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\bar{x} - yx\bar{y} = x \\ xy\bar{y} + y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x}(x^2 + y^2) = x \text{ sau } \bar{x} = x.$$

Din această relaţie oţinem:

$$x\bar{y} + \bar{x}y = 0 \Leftrightarrow x\bar{y} + xy = 0 \Leftrightarrow x(y + \bar{y}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{y} = -y, \quad \text{sau} \quad M(x, y).$$

Mulţimea (c), înzestrată cu legea * este prin urmare un grup abelian.

17.3. INEL

O mulţime E înzestrată cu două legi de compoziţie interne, notate * şi $\perp$, este un inel dacă cele două legi de compoziţie au următoarele proprietăţi:

1) $(E, *)$ este un grup abelian;

2) Cea de a doua lege de compoziţie $\perp$, este distributivă faţă de prima şi asociativă.

Observaţie. În general prima lege va fi notată $+$ şi se numeşte adunare, iar cea de a doua lege se notează $\times$ şi se numeşte înmulţire.

Cazuri particulare

a) Dacă cea de a doua lege de compoziţie notată multiplicativ este comutativă, atunci inelul se numeşte comutativ.

b) Dacă cea de a doua lege de compoziţie are element neutru, inelul se numeşte unitar.

c) Dacă a şi b sînt două elemente oarecare ale inelului $(E, +, \times)$ şi dacă $a \times b = 0$, cu $a \neq 0$ şi $b \neq 0$, se spune că a şi b sînt divizori ai lui zero.

Un inel comutativ care nu posedă elemente divizori ai lui zero, se numeşte domeniu de integritate.

Exemplul 1

Se consideră mulţimea F a funcţiilor definite pe R cu valori în R.

Pe mulţimea F vom defini două operaţii:

1) Adunarea funcţiilor.

Dacă $f(x)$ şi $g(x)$ sînt două funcţii, atunci adunarea funcţiilor $f(x)$ şi $g(x)$ este definită prin funcţia :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

2) Înmulţirea funcţiilor este o operaţie care la două funcţii $f(x)$ şi $g(x)$ face să corespundă funcţia : $f(x) \times g(x) = (f \cdot g)(x)$
Mulţimea $(F, +, \times)$ este un inel comutativ.

1) $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ — comutativitate ;

2) $f(x) + [g(x) + h(x)] = [f(x) + g(x)] + h(x)$ — asociativitate ;

3) $f(x) + 0 = f(x)$;

4) $f(x) + (-f(x)) = 0$.

Deci $(F, +)$ este un grup comutativ.

1) $f(x) \times [g(x) + h(x)] = f(x) \times g(x) + f(x) \times h(x)$;

2) $f(x) \times [g(x) \times h(x)] = [f(x) \times g(x)] \times h(x)$;

3) $f(x) \times g(x) = g(x) \times f(x)$.

Mulţimea $(F, +, \times)$ este un inel comutativ.

Exemplul 2

Să se demonstreze că într-un inel $(E, +, \times)$ avem relaţiile :

$$(-a) \times b = -(a \times b) \text{ şi } (-a) \times (-b) = a \times b.$$

Demonstraţie.

Elementul $-(a \times b)$ este simetricul elementului $(a \times b)$ faţă de adunare.
Din proprietatea de asociativitate deducem :

$$a \times b + (-a) \times b = [a + (-a)] \times b.$$

Dar : $a + (-a) = 0$ şi prin urmare avem :

$$a \times b + (-a) \times b = 0.$$

Deci $(-a) \times b$ este simetricul lui $a \times b$.
Deoarece într-un grup abelian simetricul unui element este unic, avem : $(-a) \times b = -(a \times b)$.

2. Să arătăm că : $(-a) \times (-b) = a \times b$.

Am demonstrat anterior că : $a \times b$ este simetricul elementului $(-a) \times b$.

Ţinînd seama de proprietatea de distributivitate, avem :

$$(-a) \times b + (-a) \times (-b) = (-a) \times [b + (-b)] = -a \times 0 = 0$$

Prin urmare $(-a) \times (-b)$ este simetricul elementului

$(-a) \times b$. Deoarece $(a \times b)$ este şi el simetricul elementului $(-a) \times b$, rezultă că $(-a) \times (-b) = a \times b$.

17.4. CORP

Definiţie 17.3.

O mulţime C, înzestrată cu două legi de compoziţie interne : $*$, $\perp$, formează corp dacă :

1) $(C, *, \perp)$ este un inel.

2) Elementul e fiind element neutru pentru legea de compoziţie notată $*$, mulţimea $C-\{e\}$ formează grup faţă de cea de-a doua lege de compoziţie.

Observaţie

Corpul se numeşte comutativ dacă cea de a doua lege de compoziţie este comutativă.

Proprietăţi

Într-un corp C nu există divizori ai lui zero.

Demonstraţie

Fie $a \times b = 0$ $(a, b \in C)$ şi vom presupune că $b \neq 0$.

În general prima lege se notează cu $+$ şi se numeşte ***adunare*** iar cea de a doua se notează cu $\times$ şi se numeşte ***înmulţire***.

Dacă $b \neq 0, \exists\, b^{-1}$, astfel încît $(a \times b) \times b^{-1} = 0 \times b^{-1} = 0$ sau:

$$a \times (b \times b^{-1}) = 0 \Leftrightarrow a \times 1 = 0 \Rightarrow ; a=0$$

unde prin 0 am însemnat elementul neutru față de prima lege iar prin 1, elementul neutru față de cea de a doua lege de compoziție

Prin urmare dacă $a \times b = 0$ atunci cel puțin unul din elementele a sau b este egal cu zero.

2. Într-un corp C, ecuațiile $a + x = b$ și $ax = b$ au soluții unice.

Demonstrația acestor proprietăți este evidentă și o lăsăm în seama cititorilor.

17.5. SUBCORP

Se consideră corpul $(C, +, \times)$. O submulțime S a lui C înzestrată cu aceleași legi de compoziție notate $+$, $\times$, formează subcorp a lui C, dacă $(S, +, \times)$ este un corp.

Proprietăți

Intersecția unui număr finit de subcorpuri a lui C este și el un subcorp a lui C.

Demonstrație

Fie $S_1, S_2, \ldots, S_n$ subcorpuri ale lui C.

Să notăm $X = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$

$$\forall\, x, y \in X \Rightarrow x, y \in S_i \Rightarrow x + y \in S_i \Rightarrow x + y \in X,$$

pentru $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$\forall x, y \in X \Rightarrow x, y \in S_i \Rightarrow x \times y \in S_i \Rightarrow x \times y \in X,$$

pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$y \in X \Rightarrow y \in S_1 \wedge y \in S_2 \wedge \ldots \wedge y \in S_n \Rightarrow -y \in S_1 \wedge$$

$\wedge -y \in S_2 \wedge \ldots \wedge -y \in S_n$ (deoarece $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sînt subcorpuri ale lui S).

Din aceleaşi considerente, deducem că:

$$y^{-1} \in S_1 \wedge y^{-1} \in S_2 \wedge \ldots \wedge y^{-1} \in S_n.$$

Prin urmare, avem:

$$[y + (-y)] \in S_1 \wedge [y + (-y)] \in S_2 \wedge \ldots \wedge [y + (-y)] \in S_n$$

$$(y \times y^{-1}) \in S_1 \wedge (y \times y^{-1}) \in S_2 \wedge \ldots \wedge y \times y^{-1} \in S_n$$

Prin urmare: $[y + (-y)] \in S$; $y \times y^{-1} \in S$.

Elementele 0 şi 1 aparţin mulţimii S. Mulţimea S formează un subcorp.

17.6. EXERCIŢII REZOLVATE

Exemplul 1

Se consideră o mulţime formată din trei elemente $K = \{0, 1, 2\}$, în care adunarea şi înmulţirea sînt definite prin următoarele tabele:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Să se arate că mulţimea $(K, +, \times)$ este un corp.

Soluţie

Trebuie să verificăm că cea de a doua lege de compoziţie este distributivă faţă de prima, folosind compusele a două elemente prin cele două legi de compoziţie date de tabelele de corespondenţă.

Avem:

$$1 \times (1 + 2) = 1 \times 0 = 0 \wedge 1 \times 1 + 1 \times 2 = 1 + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \times (1 + 2) = 1 \times 1 + 1 \times 2;$$

$$1 \times (1 + 0) = 1 \times 1 = 1 \wedge 1 \times 1 + 1 \times 0 = 1 + 0 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \times (1 + 0) = 1 \times 1 + 1 \times 0;$$

$$1 \times (1 + 1) = 1 \times 2 = 2 \wedge 1 \times 1 + 1 \times 1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \times (1 + 1) = 1 \times 1 + 1 \times 1;$$
$$2 \times (1 + 0) = 2 \times 1 = 2 \wedge 2 \times 1 + 2 \times 0 = 2 + 0 = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 \times (1 + 0) = 2 \times 1 + 2 \times 0;$$
$$2 \times (1 + 2) = 2 \times 0 = 0 \wedge 2 \times 1 + 2 \times 2 = 2 + 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 \times (1 + 2) = 2 \times 1 + 2 \times 2;$$
$$2 \times (1 + 1) = 2 \times 2 = 1 \wedge (2 \times 1) + (2 \times 1) = 2 + 2 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 \times (1 + 1) = 2 \times 1 + 2 \times 1.$$

Cea de-a doua lege este prin urmare distributivă față de prima. Se verifică ușor că mulțimile $(K, +)$ și $(K - \{0\}, x)$ sînt grupuri comutative.

Exemplul 2

Să se arate că mulțimea $Q^* = Q - \{0\}$ (Q fiind mulțimea numerelor raționale) în care s-au definit două legi de compoziție notate I și θ astfel: $a \top b = a + b - 1$, $a\ \theta\ b = a + b - ab$, formează corp.

Soluție

Se verifică ușor că $(Q*, \top)$ și $(Q*, \theta)$ sînt grupuri abeliene. Trebuie să verificăm că cea de-a doua lege de compoziție este distributivă față de prima.

$$a\theta(b \top c) = a\theta(b + c - 1) = a + (b + c - 1) - a(b + c - 1) =$$
$$= a + b + c - 1 - ab - ac + a = 2a + b + c - ab - ac - 1.$$
$$(a\theta b)\top(a\theta c) = (a + b - ab) \top (a + c - ac) =$$
$$= (a + b - ab) + (a + c - ac) - 1 = 2a + b + c - ab - ac - 1.$$

Prin urmare $(Q*, \top, \theta)$ este un corp.

17.7. SPAȚIU VECTORIAL

Definiție 15.5.

Să presupunem că mulțimea Ω formează corp față de două legi de compoziție interne — una notată aditiv și alta multiplicativ.

Două legi de compoziție definite pe mulțimea E, una internă numită adunare, și alta externă, față de Ω numită înmulțirea cu elemente din Ω, determină pe E o structură de spațiu vectorial peste corpul Ω, dacă :

1. Mulțimea $(E, +)$ formează un grup comutativ :

Elementele mulțimii E le vom desemnate prin literele $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

a) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$, oricare ar fi : $\vec{x}, \vec{y} \in E$;

b) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$, oricare ar fi : $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E$;

c) $\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$, oricare ar fi : $\vec{x} \in E$;

d) $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ oricare ar fi : $\vec{x} \in E$.

2. Legea de compoziție externă satisface următoarele proprietăți :

a) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ pentru orice $\vec{x} \in E$.

Se notează cu 1 elementul neutru față de legea multiplicativă definită în corpul Ω.

b) $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$;

c) $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$;

d) $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$;

pentru orice $\alpha, \beta \in \Omega$ și pentru orice $\vec{x}, \vec{y} \in E$.

Elementele spațiului vectorial se numesc *vectori*. Elementele corpului Ω se numesc scalari. Înmulțirea cu elemente din Ω se numește înmulțirea vectorilor cu scalari.

Dacă corpul Ω este mulțimea numerelor reale, adică $\Omega = R$, E se numește *spațiu vectorial real*.

În aplicațiile pe care le vom face mai tîrziu în această lucrare, ne vom folosi de proprietățile deduse din considerarea unor spații vectoriale reale.

În cele ce urmează, este necesar să facem o distincție între elementele 0 și $\vec{0}$. Elementul 0 este element neutru față de operația de adunare în R. Elementul $\vec{0}$ este element neutru față de operația de adunare a vectorilor ; 0 este un scalar, în timp ce $\vec{0}$ este un vector.

17.7.1. APLICAŢII LINIARE

Fie E şi F două spaţii vectoriale peste acelaşi corp R, O aplicaţie f a lui E în F, se numeşte *liniară* dacă oricare ar fi $\vec{x}, \vec{y} \in E$ şi $\alpha \in R$ avem:

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y});\ f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x}).$$

Pentru orice spaţiu vectorial E, aplicaţia $E \xrightarrow{1} E$ dată de relaţia $f_E(\vec{x}) = \vec{x}$ $(\vec{x} \in E)$ este o aplicaţie liniară şi se numeşte aplicaţia identică a lui E.

17.7.2. CONSECINŢE DEDUSE DIN AXIOMELE SPAŢIULUI VECTORIAL

a) Pentru orice $\alpha \in R$ avem $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$;

b) Pentru orice $\vec{x} \in E$, avem $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

Lăsăm în seama cititorului verificarea acestor proprietăţi.

17.7.3. EXEMPLE DE SPAŢII VECTORIALE

1) Produsul cartezian $R \times R$ este un spaţiu vectorial peste R. Elementele mulţimii $R \times R$ sînt perechi ordonate de forma $\vec{a} = (x, y)$, unde $x \in R$, $y \in R$.

Două elemente (x_1, y_1) şi (x_2, y_2) ale produsului cartezian $R \times R$ sînt identice dacă $x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2$. În general perechea $(x, y) \neq (y, x)$, deoarece definesc elemente diferite din $R \times R$.

În această mulţime definim adunarea şi înmulţirea cu scalari prin:

a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;

b) $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$.

(*a*) Adunarea are următoarele proprietăţi:

1) Este comutativă:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1). \quad (1)$$

Proprietatea este o consecinţă imediată a proprietăţii de comutativitate a operaţiei de adunare definită în mulţimea numerelor reale.

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$$
$$= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1). \quad (2)$$

2) Este asociativă :

$$[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) +$$
$$+ [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)].$$

Proprietatea este o consecinţă directă a proprietăţii de asociativitate a operaţiei de adunare în R.

$$[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) = [(x_1 + x_2), (y_1 + y_2)] +$$
$$+ (x_3, y_3) = [(x_1 + x_2) + x_3,(y_1 + y_2) + y_3] = (x_1 + x_2 + x_3,$$
$$y_1 + y_2 + y_3)$$
$$(x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] = (x_1, y_1) + [(x_2 + x_3, y_2 + y_3)]=$$
$$=[x_1+(x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)] = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)\cdot$$

Din aceste relaţii rezultă proprietatea cerută.

3) *Element neutru*

Pentru orice $(x, y) \in R \times R$ există $(e_1, e_2) \in R \times R$ avînd proprietatea

$$(x, y) + (e_1, e_2) = (x, y). \quad (3)$$

Membrul stîng al acestei egalităţi se transformă şi relaţia se scrie.

$$(x + e_1, y + e_2) = (x, y).$$

Din această relaţie, deducem :

$$x + e_1 = x ; y + e_2 = y \Rightarrow e_1 = 0, e_2 = 0.$$

Prin urmare perechea $(0, 0)$ este elementul neutru pentru adunare.

4) *Element simetric*

Pentru orice $(x, y) \in R \times R$ există (x', y') cu proprietatea :

$$(x, y) + (x', y') = (0, 0). \quad (4)$$

Din relația (4) deducem : $(x + x', y + y') = (0, 0)$ sau $x + x' = 0$, $y + y' = 0 \Rightarrow x' = -x$ și $y' = -y$. Prin urmare, simetricul elementului (x, y) este elementul $(-x, -y)$.

(b) Înmulțirea cu un scalar are următoarele proprietăți :

1) Este o lege de compoziție externă ;

2) Pentru orice $(x, y) \in R \times R$, $1.(x, y) = (x, y)$. Această proprietate este evidentă și rezultă din definiția operației de înmulțire cu un scalar.

3) Înmulțirea cu un scalar este distributivă față de adunarea în R^2.

Pentru orice $\alpha \in R$ și $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2$ avem :

$$\alpha[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2).$$

Demonstrație

$$\alpha[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$$
$$= [\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2)] = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2) =$$
$$= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2) = \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2).$$

4) Înmulțirea este distributivă față de adunarea numerelor reale.

Pentru orice $\alpha, \beta \in R$ și pentru orice $(x, y) \in R \times R$ avem :

$$(\alpha + \beta)(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y).$$

Demonstrație

$$(\alpha + \beta)(x, y) = [(\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)y] = (\alpha x + \beta x, \alpha y +$$
$$+ \beta y) = (\alpha x, \alpha y) + (\beta x, \beta y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y).$$

5) Înmulțire cu un scalar este asociativă față de produsul numerelor reale.

Pentru orice $\alpha, \beta \in R$ și pentru orice $(x, y) \in R \times R$ avem :

$$\alpha[\beta(x, y)] = (\alpha\, \beta)(x, y).$$

Demonstrație

$$\alpha[\beta(x, y)] = \alpha(\beta x, \beta y) = (\alpha\beta x, \alpha\beta y) = (\alpha\beta)(x, y)$$

Observații:

1) Produsul oricărui număr real cu perechea (0, 0), elementul neutru al mulțimii ($R \times R$), este (0, 0).

$$\alpha(0, 0) = (\alpha \cdot 0, \alpha \cdot 0) = (0, 0).$$

2) Dacă înmulțim cu numărul 0 orice pereche (x, y), obținem perechea (0, 0). Într-adevăr,

$$0.(x, y) = (0x, 0y) = (0, 0).$$

3) Proprietățile legilor de compoziție care definesc o structură de spațiu vectorial $R \times R$ peste corpul R se pot generaliza în cazul mulțimii $R \times R \times \ldots \times R = R^n$.

Se poate arăta că un element din R^n este format dintr-un sistem de n numere $(x_1, x_2, \ldots \times, x_n)$, unde $x_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Cele două legi de compoziție se definesc asemănător ca în $R \times R$.

a) *Adunarea*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) =$$
$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

b) *Înmulțirea cu un scalar*

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Se verifică că $(R^n, +)$ este un spațiu vectorial peste R. Alte exemple:

1) Să considerăm mulțimea sistemelor ordonate de trei numere din corpul R al numerelor reale.

Suma a două sisteme din trei numere și înmulțirea cu un scalar sînt definite astfel:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$x = \alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1), \ \alpha \in R.$$

Se poate verifica ușor că sînt satisfăcute toate axiomele spațiului vectorial.

2) Se consideră mulțimea funcțiilor continue de o variabilă, definite pe intervalul (a, b) cu valori în corpul R. Suma a două funcții continui și produsul unei funcții cu un scalar sînt tot funcții continui.

Mulțimea funcțiilor continui definite pe intervalul (a, b) cu valori în R, formează un spațiu vectorial.

17.7.4. COMBINAȚIE LINIARĂ A VECTORILOR

Să considerăm un spațiu vectorial (R^n) și m vectori $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$, care sînt elemente ale spațiului vectorial.

Vectorul $\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m\vec{a}_m$ (unde $\alpha_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$) este un element al lui R și se numește combinație liniară a vectorilor considerați.

Exemple:

Am arătat că mulțimea formată din perechile ordonate din două numere reale formează un spațiu vectorial, pe care-l notăm R^2.

Să considerăm doi vectori $\vec{x}_1$ și $\vec{x}_2$ care aparțin spațiului vectorial R^2.

Vectorul $\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2$ aparține lui R^2 și se numește combinație liniară a vectorilor $\vec{x}_1$ și $\vec{x}_2$.

Fie vectorii : $\vec{x}_1 = (1, 2)$, $\vec{x}_2 = (3, 4)$.

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 = \alpha_1(1, 2) + \alpha_2(3, 4) =$$
$$= (\alpha_1, 2\alpha_1) + (3\alpha_2, 4\alpha_2) = (\alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 4\alpha_2).$$

17.7.5. INDEPENDENȚA LINIARĂ A VECTORILOR

Să considerăm în spațiu vectorial R^n un sistem de m vectori $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$. Dacă se pot găsi m numere $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, nu toate nule, astfel ca $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 + \ldots + \alpha_m\vec{a}_m = \vec{0}$, spunem că vectorii $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ sînt *liniar dependenți*.

Un sistem de vectori $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$, care nu sînt liniari dependenți, se numesc liniari independenți.

Dacă vectorii sînt liniari independenți, relația

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m\vec{a}_m = 0$$

este satisfăcută numai dacă toți coeficienții sînt nuli.

Din definiția dependenței liniare a vectorilor, rezultă următoarele proprietăți :

1. Vectorii $\vec{0}, \vec{V}_1 \ldots \vec{V}_m$ sînt liniari dependenți.

Egalitatea $1\cdot\vec{0}+0\cdot\vec{V}_1+0\cdot\vec{V}_2+\ldots+0\cdot\vec{V}_m=0$ este deci satisfăcută.

2. Dacă un sistem de vectori $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_m$ este liniar independent, orice subsistem al său $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_k$ $(k \leqslant m)$ este liniar independent.

Într-adevăr, dacă vectorii $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_k$ ar fi liniari dependenţi, atunci ar exista un sistem de scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, nu toţi nuli, cu proprietatea:

$$\alpha_1\vec{V}_1 + \alpha_2\vec{V}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{V}_k = \vec{0}.$$

Din această relaţie se deduce uşor că:

$$\alpha_1\vec{V}_1 + \alpha_2\vec{V}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{V}_k + 0\cdot\vec{V}_{k+1} + \ldots + 0\cdot\vec{V}_m = \vec{0}.$$

Deci vectorii $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_m$ ar fi liniari dependenţi, contrar ipotezei menţionate mai sus.

Numărul maxim de vectori liniari independenţi dintr-un spaţiu vectorial se numeşte dimensiunea spaţiului vectorial, iar vectorii liniari independenţi formează *o bază*.

3. Orice vector al spaţiului vectorial V care nu face parte din bază, poate fi exprimat ca o combinaţie liniară a vectorilor bazei.

Această afirmaţie este evidentă. Dacă $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_m$ formează o bază, atunci sistemul format din vectorii $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_m, \vec{V}$, este liniar dependent. Deci vectorul $\vec{V}$ se poate exprima ca o combinaţie liniară a vectorilor bazei:

$$\vec{V} = \alpha_1\vec{V}_1 + \alpha_2\vec{V}_2 + \ldots + \alpha_m\vec{V}_m.$$

Numerele $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, nu toate nule, se numesc coordonatele vectorului $\vec{V}$ în baza dată.

17.7.6. PRODUSUL SCALAR ÎNTR-UN SPAŢIU VECTORIAL PESTE CORPUL R

Să considerăm un spaţiu vectorial V peste corpul R.

Definiţie 17.6. Se numeşte produs scalar a doi vectori $\vec{x}$, $\vec{y} \in V$ şi se notează $(\vec{x}, \vec{y})$ o aplicaţie a mulţimii $V \times V$ pe mulţimea

R care satisface următoarele proprietăți:

1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$, oricare ar fi vectorii $\vec{x}$ și $\vec{y}$;

2) $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$, oricare ar fi vectorii $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$;

3) $\alpha(\vec{x}, \vec{y}) = (\alpha\vec{x}, \vec{y})$; pentru orice $\alpha \in R$;

4) $(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0$, oricare ar fi $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Numărul real $(\vec{x}, \vec{y})$ care corespunde vectorilor $\vec{x}, \vec{y} \in V$ se numește produs scalar al vectorilor $\vec{x}$ și $\vec{y}$.

Din aceste axiome care definesc produsul scalar se pot deduce cu ușurință și alte proprietăți ale produsului scalar.

$$(P_1)\ (\vec{z}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{z}, \vec{x}) + (\vec{z}, \vec{y}).$$

Pentru a demonstra această proprietate vom folosi axioma 2 și axioma de comutativitate a produsului scalar.

$$(P_2)\ \beta(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \beta\vec{y}) \text{ oricare ar fi } \beta \in R.$$

Folosind axioma 3 și proprietatea de comutativitate vom obține:

$$(\vec{x}, \beta\vec{y}) = (\beta\vec{y}, \vec{x}) = \beta(\vec{y}, \vec{x}) = \beta(\vec{x}, \vec{x}).$$

$$(P_3)\ (\vec{x}\ \ \vec{0}) = (\vec{0}, \vec{y}) = 0 \text{ oricare ar fi } \vec{x}, \vec{y}.$$

Din proprietățile care definesc structura de spațiu vectorial reținem:

$$0 \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Prin urmare, avem:

$$(\vec{x}, \vec{0}) = (\vec{x}, 0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot (\vec{x}, \vec{0}) = 0.$$

Dacă o mulțime de vectori $V_1 \subset V$ verifică condițiile:

1. $\vec{x}, \vec{y} \in V_1 \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in V_1$; 2. $\vec{x} \in V_1, \alpha \in R \Rightarrow \alpha\,\vec{x} \in V_1$
atunci V_1 este un subspațiu vectorial al lui V.

Trebuie mai întîi să arătăm că elementul opus al lui $\vec{x} \in V_1$ pe care-l notăm cu $-\vec{x}$, aparține lui V_1:

$$-\vec{x} = (-1) \cdot \vec{x} \in V.$$

Elementul neutru aparţine şi el lui V_1:

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = [1 + (-1)]\vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

Exemple

Am arătat că mulţimea sistemelor ordonate de trei numere reale formează un spaţiu vectorial pe care-l notăm cu R^3.

Să considerăm acum mulţimea R^2 formată din sisteme de trei numere, ultimul număr fiind egal cu 0. Este evident că acesta este o submulţime a lui R^3. Să arătăm că această submulţime formează un spaţiu vectorial.

1) $\vec{x} \in R^2$, $\vec{y} \in R^2 \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in R^2$.

Fie $\vec{x} = (x_1, x_2, 0)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, 0)$, $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in R^2.$$

2) $\vec{x} \in R^2$, $\alpha \in R$, $\alpha\vec{x} \in R^2$.

Fie $\vec{x} = (x_1, x_2, 0)$, $\alpha \in R$.

$\alpha\vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, 0) \Rightarrow \alpha\vec{x} \in R^2$.

Deci: R^2 este un subspaţiu vectorial al lui R^3.

Observaţie

Să notăm cu S mulţimea vectorilor din spaţiu.

Mulţimea vectorilor cu extremitatea şi originea în acelaşi plan formează un subspaţiu vectorial al lui S.

17.7.7. VECTORI ORTOGONALI. NORMA UNUI VECTOR

1) Vectorii $\vec{x}$ şi $\vec{y}$, care aparţin spaţiului vectorial V sînt ortogonali dacă produsul lor scalar este 0 sau $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Se mai spune că vectorul $\vec{x}$ este ortogonal lui $\vec{y}$.

2) Se demonstrează uşor că, dacă un vector $\vec{x}$ este ortogonal unui sistem $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m$ de vectori, este ortogonal oricărui vector $\vec{y}$ care este o combinaţie liniară a vectorilor $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m$.

Vectorul $\vec{y}$ fiind o combinaţie liniară a vectorilor $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m$ se exprimă prin formula:

$$\vec{y} = \alpha_1\vec{y}_1 + \alpha_2\vec{y}_2 + \ldots + \alpha_m\vec{y}_m,$$

unde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sînt numere reale, nu toate nule.

Ţinînd seama de această relaţie, precum şi de proprietăţile

$$(P_1), (P_2), \text{ obţinem}: (\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \alpha_1\vec{y}_1 + \alpha_2\vec{y}_2 + \ldots +$$

$$+ \alpha_m\vec{y}_m) = (\vec{x}, \alpha_1\vec{y}_1) + (\vec{x}, \alpha_2\vec{y}_2) + \ldots + (\vec{x}, \alpha_m\vec{y}_m) =$$

$$= \alpha_1(\vec{x}, \vec{y}_1) + \alpha_2(\vec{x}, \vec{y}_2) + \ldots + \alpha_m(\vec{x}, \vec{y}_m).$$

Cum însă vectorul $\vec{y}$ este ortogonal fiecăruia din vectorii $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m$ avem:

$$(\vec{x}, \vec{y}_1) = 0, (\vec{x}, \vec{y}_2) = 0, \ldots, (\vec{x}, \vec{y}_m) = 0,$$

prin urmare:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 0.$$

3) Dacă $\vec{x}$ este un vector în spaţiu vectorial V, atunci *norma* vectorului $\vec{x}$ este rădăcina pătrată a produsului scalar al vectorului $\vec{x}$ prin el însuşi şi se notează $||\vec{x}||$, aşadar:

$$||\vec{x}|| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}.$$

4) Dacă $\vec{x}$ şi $\vec{y}$ sînt doi vectori ortogonali, atunci avem relaţia:

$$||\vec{x} + \vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2.$$

Vectorii $\vec{x}, \vec{y}$ fiind ortogonali avem:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x}) = 0;$$

după definiţia normei unui vector, avem :

$$||\vec{x}+\vec{y}||^2=(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}).$$

Aplicînd proprietăţile produsului scalar, relaţia devine

$$||\vec{x}+\vec{y}||^2=(\vec{x},\vec{x}+\vec{y})+(\vec{y},\vec{x}+\vec{y})=(\vec{x},\vec{x})+(\vec{x},\vec{y})+$$

$$+(\vec{y},\vec{x})+(\vec{y},\vec{y});$$

produsele scalare $(\vec{x},\vec{y})$ şi $(\vec{y},\vec{x})$ fiind nule, avem :

$$||\vec{x}+\vec{y}||^2=(\vec{x},\vec{x})+(\vec{y},\vec{y})$$

sau $||\vec{x}+\vec{y}||^2=||\vec{x}||^2+||\vec{y}||^2$.

5) Oricare ar fi vectorii $\vec{x},\vec{y}$ dintr-un spaţiu vectorial V, avem :

$$||(\vec{x},\vec{y})||\leqslant||\vec{x}||\cdot||\vec{y}||$$

Pentru aceasta să considerăm vectorul $\lambda\vec{x}-\vec{y}$. Pentru orice valoare a lui λ avem inegalitatea :

$$(\lambda\vec{x}-\vec{y},\lambda\vec{x}-\vec{y})\geqslant 0.$$

Aplicînd proprietăţile produsului scalar obţinem relaţia :

$$(\lambda\vec{x}-\vec{y},\lambda\vec{x})-(\lambda\vec{x}-\vec{y},\vec{y})\geqslant 0.$$

sau :

$$(\lambda\vec{x},\lambda\vec{x})-(\vec{y},\lambda\vec{x})-(\lambda\vec{x},\vec{y})+(\vec{y},\vec{y})=$$

$$=\lambda^2(\vec{x},\vec{x})-2\lambda(\vec{x},\vec{y})+(\vec{y},\vec{y})^2\geqslant 0.$$

Expresia din partea stîngă a inegalităţii poate fi privită ca un trinom de gradul al doilea în variabila λ.

Pentru ca acest trinom să fie pozitiv, pentru orice valoare a lui λ, trebuie ca discriminantul lui să verifice relaţia :

$$(\vec{x},\vec{y})^2-(\vec{x},\vec{x})\cdot(\vec{y},\vec{y})\leqslant 0.$$

Ținînd seama de definiția normei, din această inegalitate se poate obține : $(\vec{x}, \vec{y})^2 \leqslant ||\vec{x}||^2 \cdot ||\vec{y}||^2$

sau $-1 \leqslant \dfrac{(\vec{x} \cdot \vec{y})}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||} \leqslant 1.$

Dacă vectorii $\vec{x}$ și $\vec{y}$ sînt legați prin relația $\vec{x} = \lambda\vec{y}$, atunci ultima relație scrisă devine :

$$\frac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||} = \frac{(\lambda\vec{y}, \vec{y})}{||\lambda\vec{y}|| \cdot ||\vec{y}||} = \frac{\lambda(\vec{y}, \vec{y})}{|\lambda| \cdot ||\vec{y}||^2} =$$

$$= \frac{\lambda ||\vec{y}||^2}{|\lambda| \cdot ||\vec{y}||^2} = \frac{\lambda}{|\lambda|} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } \lambda > 0 \\ -1, \text{ dacă } \lambda < 0 \end{cases}$$

Dacă vectorii $\vec{x}$ și $\vec{y}$ sînt legați prin relația $\vec{x} = \lambda\vec{y}$ atunci se spune că sînt coliniari.

Expresia $\dfrac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}||\ ||\vec{y}||}$ poate fi privită ca fiind cosinusul unghiului φ format de doi vectori într-un spațiu vectorial, așa cum vom preciza în paragrafele următoare :

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||}.$$

17.7.8. SPAȚIU METRIC. DISTANȚĂ

Să considerăm o funcție $d(\vec{x}, \vec{y})$, cu valori reale, de două variabile, definită pentru orice pereche de vectori $\vec{x}, \vec{y}$ ale spațiului vectorial V.

Dacă funcția $d(\vec{x}, \vec{y})$ satisface proprietățile :

1) $d(\vec{x}, \vec{y}) > 0, \vec{x} \neq \vec{y}$;

2) $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$;

3) $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$;

4) $d(\vec{x}, \vec{z}) \leqslant d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z})$

pentru orice $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, atunci se numeşte distanţă sau metrică.

Spaţiul vectorial, sau orice altă mulţime pe care s-a definit o metrică, se numeşte spaţiu metric.

17.7.9. PRODUSUL VECTORIAL

Produsul vectorial s-a introdus în legătură cu noţiunea de moment al unei forţe. În mecanică se defineşte momentul unui vector $\vec{a}$ în raport cu punctul O (fig. 17.1) ca fiind vectorul ce are

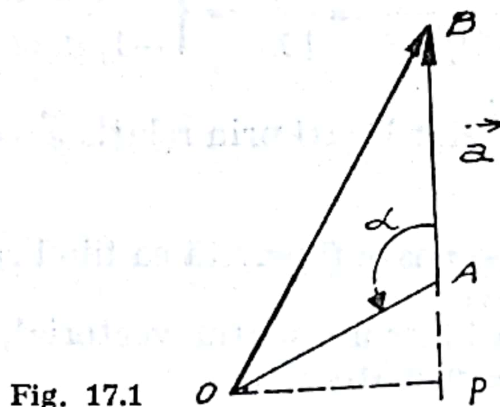


Fig. 17.1

lungimea egală cu produsul dintre modulul vectorului $\vec{a}$ şi lungimea perpendicularei coborîte din punctul O pe direcţia vectorului, cu direcţia perpendiculară pe planul determinat de vector şi punctul O. Dacă notăm momentul prin vectorul $\vec{M}$, atunci se obţine relaţia :

$$|\vec{M}| = OP \cdot AB.$$

Cum însă $OP = OA \sin(180° - \alpha) = OA \sin \alpha$, obţinem :

$$|\vec{M}| = OA \cdot AB \sin\alpha.$$

Prin urmare, modulul vectorului $\vec{M}$ este numeric egal cu aria paralelogramului construită cu ajutorul segmentelor OA şi AB.

Dacă considerăm vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{AB}$, ei definesc un plan care este chiar planul OAB. Aria paralelogramului avînd pe OA şi AB ca laturi este numeric egală cu modulul vectorului $\vec{M}$. Deci, putem

considera că $\vec{M}$ este un vector ce corespunde perechii de vectori $\overrightarrow{AO}$ şi $\overrightarrow{AB}$ avînd o mărime, direcţie şi un sens bine determinate.

Plecînd de la acest exemplu fizic al momentului unei forţe, se defineşte o operaţie internă pe mulţimea V a vectorilor din spaţiu, numită produsul vectorial, în felul următor:

Definiţia 17.7.

Se numeşte produs vectorial al vectorilor $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$, şi se notează $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, un vector $\vec{v}$, determinat astfel:

1) Modulul produsului $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ este numeric egal cu aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ sau $|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \sin\alpha$.

2) Direcţia vectorului $\vec{v}$ este perpendiculară pe planul determinat de direcţiile vectorilor $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$.

3) Sensul lui $\vec{v}$ coincide, respectiv, cu sensurile pozitiv sau negativ al axei zz' după cum suprapunerea direcţiei $\vec{v}_1$ cu direcţia $\vec{v}_2$, se realizează prin rotaţia de un unghi minim în jurul direcţie lui $\vec{v}$, în sens direct sau în sens retrograd (fig. 17.2).

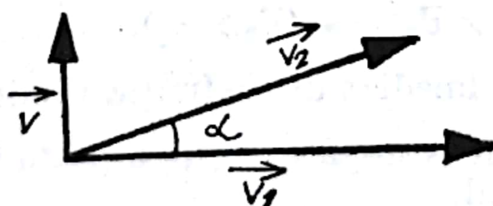


Fig. 17.2

Produsul vectorial al versorilor

1) Dacă notăm cu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ versorii unui sistem cartezian de axe $Oxyz$ (în spaţiul S), atunci din definiţia produsului vectorial rezultă (fig. 17.3):

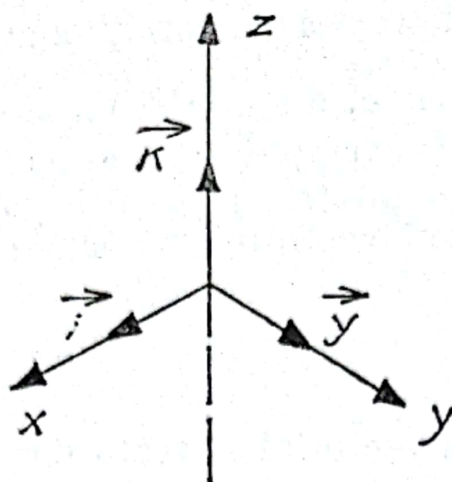


Fig. 17.3

$$\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k},$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i},$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j},$$

şi

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0.$$

2) Dacă produsul vectorial a doi vectori nenuli, $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$, este zero, atunci vectorii sînt liniari dependenţi.

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Vectorii $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ au direcţii paralele, deci sînt coliniari.

Proprietăţi ale produsului vectorial

1) Produsul vectorial este anticomutativ:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -(\vec{v}_2 \times \vec{v}_1).$$

Proprietatea rezultă imediat din definiţia produsului vectorial.

2) Produsul vectorial este asociativ faţă de înmulţirea unui vector cu un număr real.

$$(\alpha\vec{v}_1) \times (\vec{v}_2) = \vec{v}_1 \times (\alpha\,\vec{v}_2).$$

Să notăm:

$$\vec{v} = (\alpha\vec{v}_1) \times (\vec{v}_2)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times (\alpha\vec{v}_2).$$

Din definiţia produsului vectorial rezultă :

$$|\vec{v}| = |\alpha\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \sin\theta,$$

$$|\vec{v}| = |\alpha| \cdot |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \sin\theta = |\vec{v}_1| \cdot |\alpha \cdot \vec{v}_2| \sin\theta = |\vec{v}'|.$$

Dacă $\alpha > 0$, sensul vectorului $\vec{v}$ este acelaşi ca şi al vectorului $\vec{v}'$. În cazul $\alpha < 0$ schimbarea sensului unuia din vectori duce la schimbarea sensului lui $\vec{v}'$.

3) Produsul vectorial este distributiv faţă de operaţia de adunare a vectorilor.

Lăsăm în seama cititorului verificarea acestei proprietăţi.

4) Expresia analitică a produsului vectorial.

Să considerăm vectorii $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$, exprimaţi cu ajutorul versorilor $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},$$

$$\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

Din proprietăţile (2) şi (3) rezultă :

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2(\vec{i} \times \vec{i}) + x_1y_2(\vec{i} \times \vec{j}) + x_1z_2(\vec{i} \times \vec{k}) + y_1x_2(\vec{j} \times \vec{i}) + y_1y_2(\vec{j} \times \vec{j}) + y_1z_2(\vec{j} \times \vec{k}) + z_1x_2(\vec{k} \times \vec{i}) + z_1y_2(\vec{k} \times \vec{j}) + z_1z_2(\vec{k} \times \vec{k}).$$

Ţinînd seama de modul în care s-a definit produsul vectorial al versorilor, se obţine :

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}.$$

Această relaţie poate fi obţinută cu uşurinţă dacă scriem produsul vectorial ca un determinant.

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Pentru a regăsi expresia cunoscută va trebui să facem dezvoltarea după elementele primei linii.

5. *Modulul produsului vectorial.*

Din relația de mai sus, pentru produsul vectorial $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ rezultă următoarele coordonate:

$$y_1z_2 - y_2z_1 ;\ z_1x_2 - z_2x_1 ;\ x_1y_2 - x_2y_1,$$

deci:

$$|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = \sqrt{(y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (z_1x_2 - z_2x_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2}.$$

17. 7.10. PRODUSUL MIXT A TREI VECTORI

Produsul mixt vectorial al vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$ se numește produsul scalar dintre vectorul $\vec{a} \times \vec{b}$ și vectorul $\vec{c}$.

Se scrie $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Interpretăm produsul mixt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ca fiind egal cu volumul paralelipipedului construit cu vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$, prevăzut cu semnul plus dacă sistemul $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ este drept și cu semnul minus, dacă este stîng.

Dacă vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$ sînt dați prin coordonate $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, în baza ortonomată $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, atunci vom avea:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Într-adevăr:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Aplicînd definiția produsului scalar obținem:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Produsul mixt al vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ se notează prescurtat $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Se demonstrează uşor următoarele proprietăţi de bază ale produsului mixt:

1) $(\vec{a} \times \vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\,(\vec{b} \times \vec{c})$;

2) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} = -\,\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\,\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\,\vec{a}\vec{c}\vec{b}$;

3) $\vec{a}\,\vec{b}\,(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} + \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}$;

4) $(\alpha\vec{a})\,\vec{b}\,\vec{c} = \alpha(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$.

Demonstraţia proprietăţii (1) se face folosind scrierea produsului mixt ca un determinant. Membrul al doilea al egalităţii (1) reprezintă acelaşi determinant ca şi membrul întîi, dezvoltat după elementele liniei întîia.

Pentru demonstrarea proprietăţii (2) să observăm că:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a}\,(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}$$

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = c \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b},$$

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = [-\,\vec{b}(\times \vec{a})] \cdot \vec{c} = -\,\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c},$$

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = [-\,(\vec{c} \times \vec{b})]\vec{a} = -\,\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a},$$

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}\,[-(\vec{c} \times \vec{b})] = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}.$$

Proprietatea (3) se justifică plecînd de la definiţia produsului mixt şi avem:

$$\begin{aligned} \vec{a}\,\vec{b}\,(\vec{c} + \vec{d}) = &= \vec{a} \cdot [\vec{b} \times (\vec{c} + \vec{d})] = \vec{a} \cdot [-(\vec{c} + \vec{d})] \times \vec{b}] = \\ &= \vec{a} \cdot [-\,(\vec{c} \times \vec{b} + \vec{d} \times \vec{b}) = \vec{a} \cdot [-\,(\vec{c} \times \vec{b})] + \\ &+ \vec{a}[-(\vec{d} \times \vec{b})] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a}(\vec{b} \times \vec{d}) = \\ &= \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} + \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}. \end{aligned}$$

Proprietatea (4) rezultă simplu, plecînd de la definiţia produsului mixt şi aplicînd o proprietate a produsului scalar:

$$(\alpha\vec{a})\vec{b}\ \vec{c} = (\alpha\vec{a})(\vec{b} \times \vec{c}) = \alpha[\vec{a}\vec{b}(\times \vec{c})] = \alpha(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}).$$

Dacă vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sînt coplanari, atunci produsul mixt $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ este nul.

Proprietatea este evidentă, deoarece în acest caz vectorii $\vec{a} \times \vec{b}$ şi $\vec{c}$ sînt ortogonali şi, prin urmare, produsul lor scalar este zero.

Avem: $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0.$

17.7.11. EXERCIŢII REZOLVATE

Mulţimea polinoamelor de grad $\leqslant n$ este un spaţiu vectorial pe R.

Soluţie.

Fie $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ şi $b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$ două polinoame de grad inferior sau cel mult egal cu n. Coeficienţii acestor două polinoame sînt numere reale.

În mulţimea polinoamelor se definesc două operaţii:

Adunarea polinoamelor:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n) =$$
$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots + (a_n + b_n)x^n$$

şi înmulţirea polinoamelor cu un număr real λ:

$$\lambda(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \ldots + \lambda a_nx^n.$$

Se constată că adunarea are următoarele proprietăţi:

a) *Asociativitate*:

$$(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) + [(b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n) +$$
$$+ (c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n)] = (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) +$$
$$+ [(b_0 + c_0)x + (b_1 + c_1)x_1 + \ldots + (b_n + c_n)x^n] =$$
$$= (a_0 + b_0 + c_0) + (a_1 + b_1 + c_1)x + \ldots + (a_n + b_n + c_n)x^n.$$
$$[(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n)] +$$

$$+ (c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n) = [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots$$
$$+ (a_n + b_n)\,x^n]) + (c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n) =$$
$$= (a_0 + b_0 + c_0) + (a_1 + b_1 + c_1)x + \dots + (a_n + b_n + c_n)x^n.$$

b) *Există un element neutru*

Elementul neutru este polinomul care are toţi coeficienţii nuli, care se mai numeşte şi polinomul identic nul.

c) *Simetricul polinomului* $a_0x + a_1x + \dots + a_nx^n$ este polinomul $-a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_nx^n$, deoarece suma acestor două polinoame este polinomul identic nul.

d) *Adunarea este comutativă*

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) =$$
$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n =$$
$$= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + \dots + (b_n + a_n)\,x^n = (b_0 + b_1x +$$
$$+ \dots + b_nx^n) + (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n).$$

Produsul unui polinom printr-un număr real verifică proprietăţile următoare:

1) $(\alpha + \beta)P = \alpha P + \beta P$, unde P este un polinom oarecare iar α şi β sînt două numere reale.

$$(\alpha + \beta)\,(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = (\alpha + \beta)a_0 + (\alpha + \beta)\,a_1x +$$
$$\dots + (\alpha + \beta)a_nx^n = \alpha(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) +$$
$$+ \beta(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n).$$

2) $\alpha(P_1 + P_2) = \alpha P_1 + \alpha P_2$

$$\alpha[(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n)] =$$
$$= \alpha(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + \alpha(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n).$$

17.8. ALGEBRA BOOLE

Definiţia 17.8.1. Se numeşte algebră Boole o mulţime arbitrară de elemente $x, y, z, \dots$, pentru care sînt definite două operaţii: adunarea şi înmulţirea, astfel încît unei perechi de elemente (x, y) ale acestei mulţimi să-i corespundă suma $x + y$ şi produsul lor xy; operaţia unară notată ,,—'' care face să corespundă

la fiecare element x al acestei mulţimi elementul $\bar{x}$; există în mulţime două elemente 0 şi 1 care au proprietăţile speciale, şi sînt satisfăcute următoarele proprietăţi:

a) Proprietăţi relative la adunare:

1. $x + y = y + x$ — lege comutativă;

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ — lege asociativă;

3. $x + x = x$ — lege de idempotenţă;

b) Proprietăţi relative la înmulţire:

1. $x \cdot y = y \cdot x$ — lege comutativă;

2. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ — lege asociativă;

3. $x \cdot x = x$ — lege de idempotenţă

c) Proprietăţi care asociază adunarea la înmulţire:

1. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ — lege distributivă;

2. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ — lege distributivă;

d) Proprietăţi relative la elementele 0 şi 1:

1. $x + 0 = x$,

2. $x + 1 = 1$,

3. $x \cdot 1 = x$,

4. $x \cdot 0 = 0$.

e) Proprietăţi referitoare la operaţia unară, notată „—":

1. $\bar{\bar{x}} = x$,

2. $\bar{0} = 1$,

3. $\bar{1} = 0$.

f) Proprietăţi care leagă operaţia unară „—" cu adunarea şi înmulţirea (Regulile lui De Morgan):

1) $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$;

2) $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$.

Exemple

Să notăm cu $P(E)$ mulţimea părţilor mulţimii E.

Mulţimea $P(E)$ este formată din toate submulţimile lui E, inclusiv submulţimea improprie E şi mulţimea vidă $\varnothing$. În mulţimea $P(E)$ se definesc două operaţii binare, reuniunea $\cup$ şi intersecţia $\cap$ şi operaţia unară notată C_E (complementara). În mulţimea $P(E)$ există două submulţimi E şi $\varnothing$ care au proprietăţi speciale. Mulţimea $P(E)$ împreună cu operaţiile definite formează o algebră Boole.

Demonstraţie. Trebuie arătat că aceste submulţimi verifică proprietăţile mai sus enunţate.

a) 1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

(comutativitate)

2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(asociativitate)

3. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$

(idempotenţă)

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Distributivitatea operaţiei $\cup$ faţă de operaţia $\cap$ şi a operaţiei $\cap$ faţă de operaţia $\cup$.

c) $A \cup \varnothing = A$, $A \cup E = E$

$A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap E = A$

d) $C_E(C_E A) = A$, $C_E(E) = \varnothing$, $C_E(\varnothing) = E$.

e) $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$,

$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$.

17.9. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Se consideră mulţimea $A = \{-1, +1\}$ şi o lege de compoziţie, înmulţirea numerelor. Este $(A, \times)$ un grup?

2. Să se arate că în grupul $(G, *)$, ecuaţia $a*x = b$ are o soluţie unică $x = a^{-1} * b$.

3. Se consideră o tabelă de trei elemente desenată mai jos. Să se arate că mulţimea $\{a, b, c\}$ nu formează un grup faţă de legea $*$.

$*$	a	b	c
a	b	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

4. Se consideră patru puncte A, B, C, D, care formează un pătrat, în care se notează cu O centrul. Să notăm $E = \{A, B, C, D\}$. Se consideră patru rotaţii R_0, R_1, R_2, R_3, de centrul O şi de unghiuri respectiv $0°$, $90°$, $180°$, $270°$.

a) Să notăm $H = \{R_0, R_1, R_2, R_3\}$. În mulţimea H să considerăm o lege de compoziţie, compunerea a două rotaţii $R_i \,\theta\, R_j (i, j = 0, 1, 2, 3)$.

b) Să se arate că această lege de compoziţie este asociativă.

c) Să se alcătuiască un tabel al legii de compoziţie date. (H, θ) este un grup?

5. Fie un grup G în care operaţia $*$ are element neutru e. Să notăm $E = \{e\}$ şi să se arate că mulţimea $(E, *)$ este un grup.

6. Se consideră mulţimea Q a numerelor raţionale şi legea de compoziţie $*$ definită prin: $a*b = a + b + ab$.

Să se arate că mulţimea $Q - \{-1\}$ împreună cu legea $*$ formează un grup abelian.

7. În mulţimea Z a numerelor întregi se consideră operaţia $\perp$ definită prin: $a \perp b = a + b - 1$.

Să se arate că $(Z, \perp)$ este un grup abelian.

8. Să se arate că un subgrup al unui grup ciclic este el însuşi ciclic.

9. Fie $\tau_{a,b}$ transformarea definită pe mulţimea C a numerelor complexe prin:

$$\tau_{a,b}(z) = az + b, \text{ unde } z \in C, a \in R, b \in R.$$

Dacă $a \neq 0$, transformarea $\tau_{a,b}$ formează grup?

10. Se consideră mulţimile $2Z$, şi $3Z$, formate din numerele naturale multipli de 2 şi multipli de 3.

Să se arate că mulţimile $(2Z, +)$ şi $(3Z, +)$ sînt subgrupuri ale lui $(Z, +)$.

11. Fie grupul $(G, *)$ şi o submulţime A a lui G care conţine elementul neutru e; simetricul lui $a * b$ este $b^{-1} * a^{-1}$.

Să se arate că $(A, *)$ este un subgrup al lui $(G, *)$ dacă şi numai dacă $\forall\ (a, b) \in A \times A, a * b^{-1} \in A$.

12. Fie $E = \{x | x \in R, -1 \leqslant x \leqslant 1\}$.

În această mulţime se defineşte o lege de compoziţie $*$ prin relaţia:

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in E \quad x * y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Să se arate că $(E, *)$ este un grup abelian.

13. Să se arate că mulţimea numerelor de forma: $a + b\sqrt{2}$, cu a şi b întregi, în care s-au definit două legi de compoziţie adunarea şi înmulţirea, formează un inel.

14. Fie $(A, \perp, *)$ un inel şi e elementul neutru faţă de prima lege de compoziţie.

Să se arate că: $\forall\, n \in A, n * e = e$. Să se deducă că e nu este niciodată regulat pentru cea de a doua lege.

15. Să se arate că mulţimea multiplilor lui 3 înzestrată cu două operaţii $(+, \times)$ adunarea şi înmulţirea, formează un subinel al inelului $(Z, +, \times)$.

16. Să se arate că intersecţia subinelului multiplilor lui 2 cu subinelul multiplilor lui 3, este un subinel al mulţimii $(Z, +, \times)$.

17. Să se arate că reuniunea subinelelor multiplilor lui 2 şi a submultiplilor lui 3, este un subinel al mulţimii $(Z, +, \times)$.

18. Mulţimea Z este înzestrată cu operaţia $*$, definită prin:

$$a * b = a + b.$$

Să se definească o a doua operaţie $\perp$ pentru care $(Z, *, \perp)$ să fie un inel.

19. Se consideră mulţimea F a funcţiilor de forma:

$$x \xrightarrow{f} f(x) = \frac{ax + b}{x}, \text{ definite pentru } 0 < x < +\infty.$$

În mulţimea F considerăm două operaţii:

a) Adunarea

$$f(x) + g(x) = \frac{ax + b}{x} + \frac{cx + d}{x} = \frac{(a + c)\,x + (b+d)}{x}$$

b) Înmulţirea cu un număr real definită astfel:

$$f(x) = \frac{\lambda ax + \lambda b}{x}$$

Să se arate că mulţimea F este un spaţiu vectorial peste corpul R.

20. Se consideră mulţimea E a numerelor reale de forma

$$\alpha = x\sqrt{2} + y\sqrt{3},\ x, y \in R.$$

În mulţimea E se definesc două operaţii:

a) Adunarea, definită astfel:

$$\forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in E,\ \alpha_1 + \alpha_2 = x_1\sqrt{2} + y_1\sqrt{3} + x_2\sqrt{2} + y_2\sqrt{3}.$$

b) Înmulţirea cu un scalar: $\lambda\alpha = \lambda x\sqrt{2} + \lambda y\sqrt{3}$.

Să se arate că mulţimea E formează spaţiu vectorial peste corpul R.

21. În spaţiul vectorial de dimensiune 2 se consideră baza

$$(\vec{i}, \vec{j})\ , \vec{i} = (1, 0)\,; \vec{j} = (0,1).$$

Să se exprime vectorul α, de coordonate (2,3) în baza dată.

22. Să se determine $f(u)$, f fiind o aplicaţie lineară dată de matricea $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

23. Fie $x' = A\,x$, o omotetie de centru O şi de raport k. Să se găsească matricea omotetiei.

24. Fie $x' = Ax$, o rotaţie de unghi α. Să se scrie matricea A a rotaţiei.

25. Fie T o transformare astfel incît : $(x_1, x_2) \Rightarrow (x_1, -x_2)$ Să se afle matricea transformării.

26. Să se arate că mulţimea numerelor de forma

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[4]{2},\ a,\ b,\ c \in Q$$

formează un spaţiu vectorial.

27. Se consideră vectorul $\vec{x} = (6, 9, 14)$. Să se găsească coordonatele vectorului $\vec{x}$ în baza :

$\vec{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, 1, 2)$, $\vec{e}_3 = (1, 2, 3)$.

28. În spaţiul $\bar{R}^3$ se consideră două baze

$e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (2, 3, 3)$, $e_3 = (3, 7, 1)$;

$e_1' = (3, 1, 4)$, $e'_2 = (3, 1, 4)$, $e'_3 = (1, 1, -6)$.

Să se găsească legătura dintre coordonatele (x_1, x_2, x_3) ale vectorului $\vec{x}$ în prima bază şi coordonatele (x_1', x_2', x_3') ale aceluiaşi vector în cea de a doua bază.

29. Vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ formează un unghi de 45°.

Cunoscînd : $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, să se calculeze $|\vec{a} + \vec{b}|$ şi $|\vec{a} - \vec{b}|$.

30. Ce condiţii trebuie să satisfacă vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ astfel încît să avem relaţiile următoare :

$$a)\ |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|;\ b)\ |\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|;$$

$$c)\ |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|.$$

31. Să se verifice dacă vectorii : $\vec{a} = (2, -1, 3)$ şi $\vec{b} = (-6, 3, -9)$ sînt coliniari. Să se stabilească dacă aceşti vectori sînt de acelaşi sens sau de sens contrar.

32. Să se calculeze pentru ce valori α şi β vectorii $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ şi $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ sînt coliniari.

33. Se dau punctele : $A(-1, 5, 10)$, $B = (1, 2, -1)$, $C(2,2,-7)$, $D(5, -4,2)$. Verificaţi dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sînt coliniari.

34. Să se calculeze vectorul unitate al vectorului $\vec{a} = (6, -2, -3)$.

35. Vectorii: $\vec{a} = (2, -3, 6)$ și $\vec{b} = (-1, 2, -2)$ au aceeași origine. Să se calculeze coordonatele vectorului $\vec{C}$ purtat de-a lungul bisectoarei unghiului format de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$, dacă se cunoaște $|\vec{C}| = b\sqrt{42}$.

36. Se consideră vectorii $|\vec{a}| = 1$; $|\vec{b}| = 1$. Să se determine α astfel încît vectorii $\vec{a} + \alpha\vec{b}$ și $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ să fie perpendiculari.

37. Vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ formează un unghi $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Să se calculeze $|\vec{a} \times \vec{b}|$, cunoscînd că $|\vec{a}| = 6$ și $|\vec{b}| = 5$.

38. Vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sînt perpendiculari și unitari.

Să se calculeze $|(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})|$.

39. Să se demonstreze că, dacă $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sînt doi vectori ortogonali, există relația:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}^2\, \vec{b}^2.$$

40. Dacă vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sînt unitari și au direcții perpendiculare, să se calculeze:

$$[(4\vec{a} + \vec{b}) \times (4\vec{a} - \vec{b})]^2.$$

41. Vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$, verifică condiția:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0.$$

Să se demonstreze relația: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

42. Să considerăm vectorii:

$$\vec{a} = \{2, -3, 1\},\ \vec{b} = \{-3, 1, 2\},\ \vec{c} = \{1, 2, 3\}.$$

Să se calculeze:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \text{ şi } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}).$$

43. Se consideră vectorii:

$$\vec{a} = \{1, 3, 5\}, \vec{b} = \{2, 6, 10\}, \vec{c} = \{1, 1, 0\}.$$

Să se calculeze $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

44. Să se demonstreze egalitatea:

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c})(\vec{c} + \vec{a}) = 2\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}.$$

Aplicații ale calculului vectorial în geometrie

45. În paralelogramul $ABCD$ se consideră vectorii $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ şi $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Să se exprime cu ajutorul vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, vectorii: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{DA}$.

46. În trapezul $ABCD$ (cu bazele AB şi CD) se dă $\dfrac{AB}{DC} = \lambda\ (\lambda \neq 0)$, $\lambda \in R$. Să se exprime cu ajutorul vectorilor $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ şi $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$, vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{DA}$.

47. În triunghiul ABC se duc medianele AD, BE şi CF. Să se calculeze suma: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$.

48. Punctele E şi F sînt mijloacele laturilor AB şi CD ale patrulaterului $ABCD$. Să se demonstreze relația:

$$\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}}{2}$$

49. Se dă tetraedrul $OABC$. Se notează cu E mijlocul laturii OA şi cu F mijlocul laturii BC. Să se exprime cu ajutorul vectorilor $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OC}$, vectorul $\overrightarrow{EF}$.

50. Se consideră în planul P două triunghiuri ABC şi $A'B'C'$

Să se exprime cu ajutorul vectorilor $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ şi $\overrightarrow{CC'}$, vectorul $\overrightarrow{MM'}$, care uneşte centrele de greutate M şi M' ale triunghiurilor date.

51. Se dă exagonul $ABCDEF$. Considerînd ca bază vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$, să se afle în această bază coordonatele vectorilor: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ şi $\overrightarrow{FA}$.

52. În trapezul $ABCD$ se cunoaşte $\frac{BC}{AD} = \lambda$. Se consideră o bază formată din vectorii $\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{AB}$. Să se afle coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ şi $\overrightarrow{BD}$ faţă de această bază.

53. În paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ se consideră baza $\{e_1, e_2, e_3\}$, formată de vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{BB'}$. Să se afle coordonatele vectorilor $\overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{B'M}$, M fiind mijlocul diagonalei BD', în funcţie de baza dată.

54. Se dă tetraedrul $OABC$. Luînd ca bază $\{e_1, e_2, e_3,\}$ vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, să se găsească în această bază coordonatele:

a) vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{CA}$;

b) vectorului $\overrightarrow{DE}$, care uneşte mijlocul D al laturii $\overrightarrow{OA}$ cu mijlocul E ale laturii BC;

c) vectorul $\overrightarrow{OM}$, care uneşte punctul O cu centrul M de greutate al triunghiului ABC.

55. Să se demonstreze că, oricare ar fi trei vectori, $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ şi trei numere α, β, γ, vectorii $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$, $\gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}$ şi $\beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$ sînt coplanari.

56. Pe latura AD a paralelogramului $ABCD$ se consideră segmentul $\overline{AK} = \frac{1}{5}\ \overline{AD}$ şi pe diagonala AC, segmentul $\overline{AI} = \frac{1}{6}\ \overline{AC}$.

Să se arate că vectorii $\overrightarrow{KL}$ şi $\overrightarrow{LB}$ sînt coliniari. Să se găsească raportul $\frac{\overline{KL}}{\overline{LB}}$.

57. Se cunosc razele vectoare $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$, a trei vîrfuri consecutive ale paralelogramului $ABCD$. Să se afle raza vectoare a celui de al patrulea vîrf.

58. Se cunosc razele vectoare ale punctelor A şi B din planul P. Să se afle raza vectoare a punctului M, care împarte segmentul AB coordonatele în raportul λ $\left(\frac{AM}{MB} = \lambda\right)$.

59. În triunghiul ABC se construieşte bisectoarea AD a unghiului A.

Să se exprime vectorul $\overrightarrow{AD}$ cu ajutorul vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

60. Se cunosc coordonatele vîrfurilor A şi B ale paralelogramului $ABCD$, $A(-4, -7)$ şi $B(2, 6)$, şi punctul M (3,1) de intersecţie al diagonalelor. Să se găsească coordonatele celorlalte vîrfuri ale paralelogramului.

61. Coardele AB şi CD ale unui cerc de centru O se intersectează ortogonal în punctul P. Să se demonstreze relaţia:

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}.$$

62. Se consideră un triunghi echilateral ABC, care are latura egală cu unitatea. Să se calculeze expresia:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}).$$

63. În triunghiul ABC se duc medianele AD, BE şi CF. Să se calculeze: $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CF})$.

64. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ şi un punct arbitrar P în planul său. Să se demonstreze relaţiile:

1. $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}$

2. $\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PC}^2 = \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PD}^2$.

65. Se dau doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. Să se scrie vectorul $\vec{b}$ sub forma sumei a doi vectori $\vec{x}$ şi $\vec{y}$, astfel încît $\vec{x}$ să fie colinear cu vectorul $\vec{a}$ şi $\vec{y}$ ortogonal cu vectorul $\vec{a}$.

66. Se dau doi vectori necoliniari $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

Să se găsească vectorul $\vec{x}$ coplanar cu vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ şi care verifică sistemul de ecuaţii $\vec{a} \cdot \vec{x} = 1$, $\vec{b} \cdot \vec{x} = 0$.

67. Se consideră vectorii $\vec{x} = \vec{a} - \overrightarrow{3b}$, $\vec{y} = \vec{a} + \overrightarrow{3b}$. Să se afle produsul scalar al vectorilor $\vec{x}$ şi $\vec{y}$, cunoscînd că vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sînt unitari.

68. Vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sînt unitari şi au direcţii perpendiculare.

Să se calculeze expresia :

$$[(2\vec{a} + \vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b})]^{-2}.$$

69. Se dau vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$. Să se calculeze produsul mixt al vectorilor $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ şi $\vec{c} + \vec{a}$.

70. Să se demonstreze că suma pătratelor laturilor unui paralelogram este egală cu suma pătratelor diagonalelor.

71. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic o catetă este medie proporţională între lungimea ipotenuzei şi lungimea proiecţiei ei pe ipotenuză.

72. Se consideră un cerc de centru O şi de rază R şi un punct S exterior cercului. Fie A şi B intersecţiile unei secante duse din S la acest cerc, iar d distanţa de la punctul S la centrul O. Să se demonstreze vectorial relaţia :

$$SA \cdot BS = d^2 - R^2.$$

73. Să se arate că mijloacele a două laturi opuse ale unui dreptunghi şi intersecţia diagonalelor dreptunghiului sînt puncte colineare.

74. În dreptunghiul $ABCD$ se notează cu M, N, P, Q, mijloacele laturilor AB, CD, DA. Se prelungesc dreptele MN şi QP cu

segmentele $NS = MN$ şi $QL = QP$. Să notăm cu F punctul de intersecţie al diagonalelor dreptunghiului. Să se arate că punctele S, L şi F sînt colineare.

75. Să se arate că într-un triunghi dreapta care uneşte mijloacele a două laturi este paralelă cu latura a treia şi egală cu jumătatea ei.

76. Să se demonstreze că într-un trapez dreapta care uneşte mijloacele a două laturi neparalele este paralelă cu bazele şi egală cu semisuma lor.

77. Se prelungesc medianele BB', CC', ale triunghiului ABC cu $B'B'' = BB'$ şi $C'C'' = CC'$. Să se arate că punctele A, B'', C'' sînt colineare.

78. Fie $ABCDE$ un pentagon regulat convex de centru O. Să se demonstreze că suma:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$$

este vectorul nul.

79. Se notează cu A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor BC, AC şi AB ale triunghiului ABC. Să se arate folosind calculul vectorial că cele două triunghiuri au acelaşi centru de greutate.

80. Se consideră exagonul $ABCDEF$. Să se demonstreze că dacă: $BC \parallel EF \parallel AD$, $CD \parallel AF$; $AB \parallel DE \parallel CF$, atunci $BE \parallel FA$.

81. Se consideră două cercuri tangente în punctul M. O secantă dusă prin punctul M taie cele două cercuri în punctele A şi B. Să se găsească mulţimea punctelor X care au proprietatea $\overrightarrow{XA} = m\overrightarrow{XB}$ $(m \neq 0)$.

82. Diagonalele patrulaterului $ABCD$ sînt perpendiculare şi congruente. Pe laturile patrulaterului se dau punctele P, Q, R, S, astfel încît $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BQ} : \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{CR} : \overrightarrow{RD} = \overrightarrow{DS} : \overrightarrow{SA}$.

Să se arate că dreptele PR şi QS sînt perpendiculare şi congruente.

83. Se consideră paralelogramul $MNPK$, avînd $MP \cap NK = O$;

$A \in NP$ şi $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AP}$. Să notăm $\overrightarrow{MN} = \vec{m}$; $\overrightarrow{MO} = \vec{n}$. Să se exprime $\overrightarrow{AM}$ cu ajutorul lui $\vec{m}$ şi $\vec{n}$.

84. Fie M punctul de intersecţie al dreptelor care unesc mijloacele laturilor opuse ale patrulaterului $ABCD$.

Dacă O este un punct arbitrar din plan să se demonstreze relaţia:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

85. Laturile AB şi CD ale unui tetraedru sînt perpendiculare. Să se demonstreze relaţia:

$$|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AD}|^2 = BC^2 - \overline{BD}^2.$$

86. Vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sînt lineari independenţi şi perpendiculari, avînd aceeaşi lungime.

Să se arate că vectorii $\vec{x} = 3\vec{a} + \vec{b}$ şi $\vec{y} = 10\vec{a} - 6\vec{b}$ sînt de asemenea perpendiculari.

87. Se consideră un pentagon $ABCDE$. Fie M, N şi P mijloacele segmentelor EB, DC şi ED.

Se notează G centrul de greutate al triunghiului PMN. Să se exprime cu ajutorul vectorilor laturilor pentagonului, vectorul $\overrightarrow{MG}$.

88. În patrulaterul $ABCD$ se construieşte perpendiculara BK pe diagonala AC. Se notează M şi N mijloacele segmentelor AK şi CD. Să se demonstreze că $MN \perp MB$.

89. Să se demonstreze că dacă în triunghiul ABC medianele corespunzătoare laturilor AB şi BC sînt perpendiculare atunci are loc inegalitatea:

$$\cos B \geqslant \frac{4}{5}.$$

90. Să considerăm mulţimea $\{0, 1\}$ în care se definesc două operaţii:

adunarea $+$ şi înmulţirea $\cdot$, în modul următor;

$+$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

şi o operaţie notată $-$ cu proprietatea $\bar{1} = 0, \bar{0} = 1$.

Să se arate că această mulţime împreună cu operaţiile mai sus definite formează o algebră Boole.

91. Se dă mulţimea $A = \{0, a, b, 1\}$ în care se definesc două operaţii: adunare $+$, şi înmulţire $\cdot$, în felul următor:

$+$	0	a	b	1
0	0	a	b	0
a	0	a	1	1
b	a	1	b	1
1	1	1	1	1

$\cdot$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

O operaţie notată $-$ cu proprietatea:

$$\bar{a} = b, \quad \bar{b} = a, \quad \bar{1} = 0, \quad \bar{0} = 1.$$

Să se arate că această mulţime împreună cu operaţiile mai sus definite formează o algebră Boole.

92. Se consideră mulţimile formate din propoziţiile logice $\{p, q, A, F\}$ unde prin A şi F am notat două propoziţii: prima are totdeauna valoarea logică, adevărul notat cu A, a doua are valoarea logică falsul, notat cu F. În această mulţime se definesc două operaţii disjuncţia, şi conjuncţia logică, precum şi o operaţie unară, negaţia, care are proprietatea $\bar{p} = q$; $\bar{q} = p$.

Să se arate că această mulţime formează o algebră Boole.

93. Se dă mulţimea

$A = \{x/x$ divizor al numărului $1260\}$.

În mulţimea A se definesc următoarele operaţii:

a) $x \top y =$ c. m. m. m. c. (x, y) — (cel mai mic multiplu comun al numerelor x, y).

b) $x \,\theta\, y =$ c. m. m. d. c. (x, y) — (cel mai mare divizor comun al numerelor x, y).

c) O operaţie, notată cu —, definită astfel:

$$x \in A, \overline{x} = \frac{1260}{x}.$$

Să se arate că mulţimea A formează o algebră Boole.

94. Folosind rezultatele de la exerciţiul precedent, să se formeze tabloul celor două operaţii „cel mai mic multiplu comun" şi „cel mai mare divizor comun a două numere", pentru divizorii numărului 12.

95. Să se arate că mulţimea divizorilor unui număr oarecare N împreună cu operaţiile $\top$, θ şi —, definite în acelaşi mod ca la exerciţiul 93, formează o algebră Boole.

96. În mulţimile $A = \{x/x$ divizor al numărului $360\}$, se defineşte relaţia:

$\forall\, x, y \in A, \quad x \,\mathfrak{R}\, y = x$ este divizorul numărului y.

Să se arate că relaţia $\mathfrak{R}$ definită în această mulţime posedă toate proprietăţile relaţiei de incluziune definită în algebra mulţimilor.

Capitolul 18

CONSTRUCŢII ALGEBRICE DE MULŢIMI

18.1. INELUL NUMERELOR ÎNTREGI

Vom nota cu N mulţimea numerelor naturale.

18.1.1. RELAŢIA DE ECHIVALENŢĂ ÎN N^2

Mulţimea N^2, sau $N \times N$, este formată din perechile ordonate (x, y), unde x şi y sînt elemente din N.

Definiţia. 18.1 : Să considerăm pe mulţimea N^2 relaţia binară, notată cu $\mathcal{R}$, definită astfel : $(x, y)\, \mathcal{R}\, (x', y')$, dacă şi numai dacă $x + y' = x' + y$. Relaţia $\mathcal{R}$ este o relaţie de echivalenţă deoarece are următoarele proprietăţi :

1) Este reflexivă :

$$\forall\, (x, y) \in N^2, \qquad (x, y)\, \mathcal{R}(x, y)$$

sau : $x + y = x + y$.

2) Este simetrică :

$$\forall (x,y) \in N^2 \text{ şi } \forall (x', y') \in N^2 \text{ dacă}$$
$$(x,y)\, \mathcal{R}(x', y') \text{ atunci } (x', y')\, \mathcal{R}\, (x, y).$$

Într-adevăr : $x + y' = x' + y$ sau $x' + y = x + y'$.

3) Este tranzitivă. Trebuie arătat că :

$$\forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \text{ din } N^2, \text{ dacă } (x, y)\, \mathcal{R}\, (x', y')$$
$$\text{şi } (x', y')\, \mathcal{R}(x'', y''), \text{ atunci } (x, y)\, \mathcal{R}(x'', y'').$$

$$(x, y)\, \mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow x + y' = x' + y$$
$$(x', y')\, \mathcal{R}(x'', y'') \Leftrightarrow x' + y'' = x'' + y'$$

Adunind membru cu membru cele două egalități obținem:

$$x+y'+x'+y'' = x'+y+x''+y',$$

şi deci $x+y'' = y+x''$,

ceea ce arată că $(x, y) \mathcal{R}(x'', y'')$.

18.1.2. CLASE DE ECHIVALENȚĂ

Fie N^2 şi $\mathcal{R}$ o relație de echivalență în N^2. Se numeşte clasă de echivalență a unui element (x, y) al mulțimii N^2 şi se notează $\overline{(x, y)}$, mulțimea tuturor elementelor $(x', y') \in N^2$ pentru care avem:

$$(x, y) \mathcal{R}(x', y')$$

$$\overline{(x, y)} = \{(x', y') \in N^2, \ (x' y') \mathcal{R}(x, y)\}.$$

18.1.3 MULȚIMEA CÎT

Clasele de echivalență determinate în mulțimea N^2 prin relația de echivalență $\mathcal{R}$ formează o nouă mulțime, numită mulțimea cît a lui N^2 prin $\mathcal{R}$, care se notează $N^2/\mathcal{R}$.

Definiția 18.2. $N^2/\mathcal{R}$ se numeşte mulțimea numerelor întregi. Un număr întreg este deci o clasă de echivalență în N^2 pentru relația $\mathcal{R}$.

Mulțimea $N^2/\mathcal{R}$ a numerelor întregi este notată Z

$$Z = N^2/\mathcal{R}.$$

Observație

Un număr întreg poate avea deci mai mulți reprezentanți. Un reprezentant al numărului întreg $\overline{(x, y)}$ este perechea (x', y') care are proprietatea:

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \Leftrightarrow x+y' = x'+y.$$

Dacă se dă un reprezentant (x, y) al unui număr întreg, atunci putem obține şi alți reprezentanți dacă adunăm sau scădem (dacă este posibil) acelaşi număr natural, numerelor x şi y. Într-adevăr, să notăm:

$$x_1 = x+m, \ y_1 = y+m, \ m \in N.$$

Avem :

$$x_1+y = x+y+m, \quad x_1+y = y_1+x \Leftrightarrow (x, y) \mathcal{R} (x_1, y_1).$$

Prin urmare, perechea (x_1, y_1) este şi ea un reprezentant al numărului întreg $\overline{(x, y)}$.

18.1.4 REPREZENTAREA CANONICĂ A NUMERELOR ÎNTREGI

Să considerăm numărul întreg $\overline{(x, x)}$.

Scăzînd din ambele componente ale perechii (x, x) numărul natural x obţinem :

$$(x - x, x - x) \mathcal{R} (x, x)$$

sau $$(0,0) \mathcal{R} (x, x).$$

Prin urmare $(0,0) \in \overline{(x,x)}$.

Numărul întreg reprezentant al perechii (0,0) se numeşte numărul 0 (zero).

Fie (a, b) un element din N^2. Vom distinge următoarele cazuri :

1) Dacă $a > b$, există un număr întreg x astfel ca :

$$a = b+x. \text{ Să arătăm că } (a,b) \mathcal{R} (x, 0), \text{ unde } x \in N.$$

Într-adevăr : $a+0 = b+x$.

Putem lua ca reprezentant al clasei $\overline{(a, b)}$ elementul $(x, 0)$, care se numeşte reprezentant canonic al acestei clase.

Un număr întreg de forma $\overline{(x, 0)}$, $x \in N$, se numeşte număr întreg pozitiv.

$$a > b, \quad \overline{(a, b)} = \overline{(x, 0)}.$$

2) Dacă $a < b$, atunci există un număr natural x astfel că

$$b = a + x \text{ şi } (a, b) \mathcal{R} (0, x).$$

Într-adevăr : $a + x = b + 0$, $(a, b) \mathcal{R} (0, x)$

$$\overline{(a, b)} = \overline{(0, x)}.$$

Numărul întreg de forma $\overline{(0,x)}$, $x \in N$ se numeşte negativ.

3. Dacă $a=b$, scăzînd din ambele componente numărul b se obţine $(a, b) \mathcal{R} (0, 0)$. Numărul $\overline{(0,0)}$ este nul şi se notează 0.

Exemple

Numărul întreg $\overline{(7,5)}$ este pozitiv. Dacă scădem din ambele componente ale perechii $\overline{(7,5)}$, numărul natural 5 obţinem : $(7,5)\ \mathfrak{R}\ (2,0)$.

Numărul întreg $\overline{(2,0)}$ este numărul întreg pozitiv $+2$.

18.1.5 ADUNAREA PE N^2

Pe mulţimea N^2 vom defini o operaţie, pe care o numim adunare, astfel :

$$\forall(x, y) \in N^2 \text{ şi } \forall(z, w) \in N^2 \text{ avem :}$$

$$(x, y) + (z, w) = (x+z, y+w).$$

Această operaţie este asociativă şi comutativă (cititorul poate demonstra aceste două proprietăţi utilizînd proprietăţile ce corespund adunării în N).

18.1.6 OPERAŢIA DE ADUNARE ESTE COMPATIBILĂ CU RELAŢIA DE ECHIVALENŢĂ $\mathfrak{R}$

Fie :
$$(x, y)\ \mathfrak{R}\ (x', y') \tag{1}$$
$$(z, w)\ \mathfrak{R}\ (z', w') \tag{2}$$

Să arătăm că :

$$(x+z, y+w)\ \mathfrak{R}\ (x'+z', y'+w').$$

Din (1), rezultă că : $x+y' = x'+y$ (3)

Din (2), rezultă că : $z+w' = z'+w$ (3')

Efectuînd suma membru cu membru a relaţiilor (3) şi (3'), obţinem :

$$(x+y') + (z+w') = (x'+y) + (z'+w)$$

sau
$$(x+z) + (y'+w') = (x'+z') + (y+w)$$

sau
$$(x+z,\ y+w)\ \mathfrak{R}\ (x'+z',\ y'+w').$$

18.1.7 ADUNAREA PE Z

Pentru că adunarea pe N^2 este compatibilă cu relaţia $\mathcal{R}$ se poate defini operaţia notată $\dot{+}$ determinată pe mulţimea cît $N^2/_{\mathcal{R}}$ astfel :

$$\overline{(x, y)} \dot{+} \overline{(z, w)} = \overline{(x+z, y+w)}.$$

Se recunoaşte uşor că această operaţie, notată de această dată $\dot{+}$, nu se poate confunda cu operaţiile $+$ definite respectiv în N^2 şi N.

Proprietăţi.

1) Element neutru

Elementul $\overline{(a, b)}$ este element neutru pentru operaţia $\dot{+}$, dacă pentru orice element $\overline{(x, y)}$ din Z avem :

$$\overline{(x, y)} \dot{+} \overline{(a, b)} = \overline{(x, y)}$$

sau : $\overline{(x+a, x+b)} = \overline{(x+y)} \Leftrightarrow (x+a, y+b)\, \mathcal{R}\, (x, y) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x+a+y = y+b+x \text{ sau } a=b.$$

Prin urmare $\overline{(a, b)}$ este element neutru dacă $a = b$. Elementul neutru al operaţiei $\dot{+}$ pe $N^2/\mathcal{R}$ este deci clasa de elemente $\overline{(n, n)}$ al cărui reprezentant canonic este (0,0). Vom nota elementul neutru cu $\overline{(0,0)}$.

Element simetric

Un element $\overline{(x, y)}$ din Z admite ca element simetric, elementul $\overline{(x', y')}$, dacă :

$$\overline{(x, y)} \dot{+} \overline{(x', y')} = \overline{(0, 0)} \Leftrightarrow \overline{(x+x', y+x')} = (0, 0), \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+x', y+y')\, \mathcal{R}\, (0,0),$$

sau :

$$x+x' = y+y'.$$

De unde :

$y'=x$ şi $x'=y$ (necunoscutele sînt x' şi y').

Prin urmare pentru orice număr întreg $\overline{(x, y)}$, există un număr întreg $\overline{(y, x)}$, astfel ca :

$$\overline{(x, y)} + \overline{(y, x)} = \overline{(0,0)}.$$

Fiind definită operaţia $\dot{+}$ în Z, spunem că orice element în Z admite un element simetric.

3) *Structura* $(Z, \dot{+})$.

Operaţia $\dot{+}$ este asociativă şi comutativă.
Elementul $\overline{(0, 0)}$ este neutru pentru $\dot{+}$.
Un element $\overline{(x, y)}$ admite ca simetric elementul $\overline{(y, x)}$.

Concluzie :
$(Z, \dot{+})$ este un grup abelian.

18.1.8. IZOMORFISMUL STRUCTURILOR $(N, +)$ şi $(Z^+, \dot{+})$

Numerele al căror reprezentanţi canonici sînt de forma $(x, 0)$, unde $x \in N$, se numesc numere întregi pozitive.

Mulţimea numerelor întregi pozitive sau nule este notată Z^+.

Vom arăta că există o bijecţie f din Z^+ în N, astfel ca :

$$f[\overline{(x, 0)} \dot{+} \overline{(x', 0)}] = f\overline{(x, 0)} + f\overline{(x', 0)}.$$

Aplicaţia f care asociază oricărui element $\overline{(x, 0)}$ din Z^+, elementul x din N este o bijecţie şi un omomorfism.

$$f[\overline{(x, 0)} + \overline{(x', 0)}] = f[\overline{(x + x', 0)}] = x + x' = f\overline{(x, 0)} + f\overline{(x', 0)}.$$

Structurile $(Z^+, \dot{+})$ şi $(N, +)$ sînt izomorfe.

Convenim să identificăm numărul întreg pozitiv (sau nul) $+p$ cu numărul natural p.

Observaţie.

Vom reprezenta deci prin acelaşi simbol numărul natural x şi numărul întreg, pozitiv sau nul, $\overline{(x, 0)}$.

Operaţiei $\dot{+}$ definită pe Z îi corespunde operaţia $+$ definită pe N.

Astfel $\overline{(0, 0)}$ este notat 0.

Remarcăm că un număr întreg este pozitiv, negativ sau nul.

Numărului întreg $\overline{(x, 0)}$ îi corespunde, pentru operaţia $\dot{+}$, simetricul său $\overline{(0, x)}$ care este un număr negativ sau nul. Prin convenţie vom nota acest număr întreg prin $-x$ şi vom scrie $x+(-x) = 0$.

18.1.9. SCĂDEREA în Z

În Z să definim o nouă operaţie astfel:

Dacă $a=b+x$, vom scrie $a-b=x$, unde simbolul „$-$" este un simbol operatoriu. Această operaţie este peste tot definită în Z.

Oricare ar fi (a, b) din Z^2, există un element x din Z astfel ca $a=b+x$. În grupul abelian $(Z, +)$ o ecuaţie de forma $a=b+x$ este rezolvabilă şi avem: $x=a+(-b)$.

Numărul întreg $a+(-b)$ se notează prin $a-b$ şi se numeşte diferenţa dintre a şi b. Operaţia prin care oricărei perechi de numere (a, b) i se asociază numărul $a-b$ şi se numeşte scădere.

18.1.10. RELAŢIA DE ORDINE ÎN $(Z, +)$

Definiţie 18.3 Un număr întreg x este mai mare sau egal cu un număr întreg y, dacă diferenţa $x-y$ este un element din Z^+.

Prin urmare vom scrie: $x \geqslant y$, dacă $x-y \in Z^+$. Arătăm că această relaţie este o relaţie de ordine (notînd prin simbolul obişnuit, uzual pentru relaţiile de ordine $\geqslant$).

Proprietăţile relaţiei $\geqslant$:

1. Relaţia este reflexivă.

$\forall x$, $x \geqslant x$; într-adevăr $x-x=0$ şi 0 este un element din Z^+.

2. Relaţia este antisimetrică.

Dacă pentru două elemente x şi y avem simultan relaţiile $x \leqslant y$ şi $y \leqslant x$, atunci, $x=y$;

$$x \leqslant y \Rightarrow y - x = a \text{ şi } a \in Z^+$$

$$y \leqslant x \Rightarrow x - y = b \text{ şi } b \in Z^+$$

Adunînd aceste două egalităţi membru cu membru obţinem: $a+b=0$ şi prin urmare $a=b=0$ sau $x=y$.

3. Relaţia este tranzitivă.

Pentru orice x, y, z, dacă $x \geqslant y$, $y \geqslant z$, atunci $x \geqslant z$ (cititorul va face demonstraţia).

Relaţia $\leqslant$, este prin urmare o relaţie de ordine.

Mai mult, fiind date două numere întregi x şi y atunci $x \leqslant y$ sau $y \leqslant x$. Această relaţie este deci o relaţie de ordine totală.

Observaţie: Relaţia $\geqslant$ este compatibilă cu operaţia $+$.

Dacă $x \geqslant y$, atunci $x+a \geqslant y+a$ şi reciproc ($a \in N$).

18.1.11. IZOMORFISMUL STRUCTURILOR $(Z^+, \leqslant)$ şi $(N, \leqslant)$.

Aplicaţia care la orice element $\overline{(x, 0)}$ din Z face să-i corespundă elementul x din N, astfel încît dacă $\overline{(x, 0)} \leqslant \overline{(y, 0)}$, atunci $x \leqslant y$ este un izomorfism.

Într-adevăr dacă $\overline{(x, 0)} \leqslant \overline{(y, 0)}$, atunci :

$$\overline{(y, 0)} - \overline{(x, 0)} = \overline{(a, 0)},$$

sau :

$$\overline{(y, 0)} = \overline{(a, 0)} + \overline{(x, 0)},$$

sau :

$$f[\overline{(y, 0)}] = f[\overline{(a, 0)} + \overline{(x, 0)}] = f\,[\overline{(a+x, 0)}] = a+x$$

Prin urmare $y=a+x$, unde y, a şi x sînt elemente din N. Dacă $y=a+x$, atunci $x \leqslant y$.

18.1.12. ÎNMULŢIREA NUMERELOR ÎNTREGI

Să definim produsul $\otimes$ a două perechi ordonate de numere din N^2, prin relaţia :

$$(x, y) \otimes (x', y') = (xx' + yy' ,\ xy' + x'y).$$

Cititorul poate verifica că această operaţie este comutativă şi asociativă.

Această operaţie este compatibilă cu relaţia de echivalenţă $\mathcal{R}$.

Într-adevăr, să considerăm perechile (x, y), (x', y'), (z, z'), (w, w'), care aparţin lui N^2, pentru care avem relaţiile :

$$(x, y)\,\mathcal{R}(x', y') \qquad (1)$$

$$(z, w)\,\mathcal{R}(z', w') \qquad (2)$$

Va trebui să demonstrăm relaţia :

$$[(x, y) \otimes (z, w)]\,\mathcal{R}[(x', y') \otimes (z', w')].$$

Relaţiile (1) şi (2) sînt echivalente cu :

$$x+y' = x'+y \text{ şi } z+w' = z'+w.$$

Se poate uşor arăta că :

$$xz+yw + y'z' + x'w' = x'z' + y'w' + yz + xw,$$

care arată compatibilitatea acestei operaţii cu relaţia de echivalenţă $\mathcal{R}$.

Operația de înmulțire $\dot{\times}$ definită în N^2 este compatibilă cu relația $\mathcal{R}$. Prin urmare vom defini operația $\dot{\times}$ în mulțimea $N^2/\mathcal{R}$ astfel:

$$\overline{(x, y)} \dot{\times} \overline{(x', y')} = \overline{(xx' + yy',\ xy' + x'y)}$$

Observație:

Am notat înmulțirea în N^2 prin simbolul $\otimes$. Notăm înmulțirea în Z prin simbolul $\times$ pentru a nu confunda această operație cu înmulțirea în N, notată $\dot{\times}$.

Proprietățile operației $\dot{\times}$:

Se arată foarte ușor că operația $\dot{\times}$ definită pe mulțimea $N^2/\mathcal{R}$ este comutativă și asociativă.

— Element neutru

Dacă $\overline{(a, b)}$ este element neutru pentru $\dot{\times}$, atunci pentru orice element $\overline{(x, y)}$ din Z, vom avea:

$$\overline{(x, y)} \dot{\times} \overline{(a, b)} = \overline{(x, y)},$$

sau:

$$\overline{(xa + yb,\ ya + xb)} = \overline{(x, y)},$$

$$xa + yb + y = ya + xb + x,$$

sau:

$$xa + y(b+1) = x(b+1) + ya, \qquad (3).$$

pentru x și y din N.

Din relația (3) deducem: $a = b+1$.

Prin urmare elementul $\overline{(b+1, b)}$ este neutru pentru $\dot{\times}$.

Reprezentantul său canonic este $\overline{(1,0)}$.

— Element absorbant: Elementul neutru pentru operația $\dot{+}$ este element absorbant pentru operația $\dot{\times}$.

Într-adevăr:

$$\forall (x, y) \in N^2,\ \overline{(x, y)} \dot{\times} \overline{(0, 0)} = \overline{(x\,0+y0,\ x0 + y0)} = \overline{(0,0)}$$

Proprietățile înmulțirii.

Înmulțirea este distributivă față de adunare:

$$[\overline{(a, b)} \dot{+} \overline{(c, d)}] \dot{\times} \overline{(e, f)} = [\overline{(a, b)} \dot{\times} \overline{(e, f)}] \dot{+} [\overline{(c, d)} \dot{\times} \overline{(e, f)}].$$

Într-adevăr:

$$[\overline{(a, b)} \dotplus \overline{(c, d)}] \dot{\times} \overline{(e, f)} = \overline{(a+c, b+d)} \dot{\times} \overline{(e, f)} =$$
$$= [\overline{(a+c)e + (b+d)f, (a+c)f + (b+d)e]} =$$
$$= [\overline{(ae+bf)+(ce+df), (af+be) + (cf+de)]} =$$
$$= \overline{(ae+bf, af+be) \dotplus (ce+df, cf + de)} =$$
$$= \overline{(a, b)} \dot{\times} \overline{(e, f)} \dotplus \overline{(c, d)} \dot{\times} \overline{(e, f)}.$$

Structura lui $(Z, \dotplus, \dot{\times})$.

1) $(Z, \dotplus)$ este un grup comutativ;

2) Operaţia $\dot{\times}$ este comutativă şi asociativă;

3) Operaţia $\dotplus$ admite element neutru;

4) Operaţia $\dot{\times}$ este distributivă faţă de $\dotplus$.

Structura $(Z, \dotplus, \dot{\times})$ este un inel comutativ unitar.

18.1.13. REGULA SEMNELOR LA ÎNMULŢIRE

1) Produsul numerelor întregi pozitive.

Fie $\overline{(m, 0)}$ şi $\overline{(n, 0)}$, $m, n \in N$, două numere pozitive.
Avem $\overline{(m, 0)} \cdot \overline{(n, 0)} = \overline{(mn, 0)}$,
ceea ce se scrie $(+m) \cdot (+n) = +(m . n)$

2) Produsul numerelor întregi negative.

Fie $\overline{(0, m)}$ şi $\overline{(0, n)}$, $m, n \in N$, două numere negative.
După regula stabilită la înmulţirea numerelor întregi avem:

$$\overline{(0, m)} \cdot \overline{(0, n)} = \overline{(mn, 0)}$$

ceea ce se scrie: $(-m) \cdot (-n) = +(m \cdot n)$.

3) Produsul numerelor întregi de semne contrare.

Fie $\overline{(m, 0)}$ şi $\overline{(0, n)}$, $m, n \in N$ două numere întregi de semne contrare.
Avem: $\overline{(m, 0)} \cdot \overline{(0, n)} = \overline{(0, m \cdot n)}$ sau $(+m) \cdot (-n) = -(m \cdot n)$.

Pentru a efectua produsul a două numere întregi, se înmulţesc numerele naturale cu care sînt scrise cele două numere întregi, iar rezultatul primeşte semnul plus dacă numerele întregi care se

înmulțesc cu același semn și semnul minus în cazul cînd cele două numere întregi ce se înmulțesc au semne contrare.

Înmulțirea numerelor întregi are următoarele proprietăți:

1) Comutativitate: $\forall x, y \in Z: x \cdot y = y \cdot x$;

2) Asociativitate: $\forall x, y, z \in Z: x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;

3) Element neutru: $\forall x \in Z: x \cdot 1 = x$;

4) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:

$$\forall x, y, z \in Z: x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Lăsăm în seama cititorilor noștri verificarea acestor proprietăți foarte simple.

18.2. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

Să considerăm mulțimea:
$Z^* = Z - \{0\}$ adică mulțimea numerelor întregi fără elementul zero.

Fie: $Z^{*2} = Z^* \times Z^*$.
Pe mulțimea Z^{*2} vom defini o relație de echivalența $\mathfrak{R}$ în modul următor:
Dacă: (a, b) și $(a', b') \in Z^{*2}$, atunci: $(a, b) \mathfrak{R} (a', b')$ dacă și numai dacă avem:

$$ab' = ba'.$$

Proprietățile relației $\mathfrak{R}$.

a) Este reflexivă:

$$\forall (a, b), \text{ avem } (a, b) \mathfrak{R} (a, b) \Leftrightarrow ab = ab.$$

b) Este simetrică:

$$\forall (a, b) \text{ și } \forall (a', b'), \text{ avem:}$$

$$(a, b) \mathfrak{R} (a', b') \Rightarrow (a', b') \mathfrak{R} (a, b),$$

căci:

$$ab' = a'b \text{ este echivalent } a'b = b'a.$$

c) Relația $\mathfrak{R}$ este tranzitivă:

Pentru orice (a, b), (c, d), (e, f), dacă:
$(a, b) \mathfrak{R} (c, d)$ și $(c, d) \mathfrak{R} (e, f)$, atunci $(a, b) \mathfrak{R} (e, f)$.

Într-adevăr:

$$\left| \begin{array}{l} (a, b)\,\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow ad = bc. \\ (c, d)\,\mathcal{R}(e, f) \Leftrightarrow cf = de. \end{array} \right.$$

Dacă înmulţim cele două egalităţi membru cu membru, obţinem:

$$adcf = bcde \Leftrightarrow af = be,$$

sau:

$$(a, b)\,\mathcal{R}(e, f).$$

Clasele de echivalenţă determinate în mulţimea Z^{*2} de relaţia $\mathcal{R}$, formează o nouă mulţime, numită mulţimea cît $Z^{*2}/\mathcal{R}$.
Mulţimea cît $Z^{*2}/\mathcal{R}$ este deci o partiţie a lui Z^{2*} în care elementele sînt clase de echivalenţa după $\mathcal{R}$.

Mulţimea $Z^{*2}/\mathcal{R}$ se numeşte mulţimea numerelor raţionale nenule şi se notează Q^*.

Toate perechile aparţinînd aceleiaşi clase de echivalenţă pot fi considerate ca diverşi reprezentanţi ai acestei clase.
Conform cu definiţia adoptată, vom zice că ele reprezintă un acelaşi număr raţional.

Cînd perechea (a, b) de numere întregi are rolul de reprezentant al unui număr raţional, i se dă numele de *fracţie*, primului său termen a se numeşte *numărător*, iar cel de-al doilea, b se numeşte *numitor*.

Relaţia $ab' = a'b$ exprimă faptul că perechile (a, b) şi (a', b') aparţin unei aceleiaşi clase de echivalenţă; ea exprimă, de asemenea, faptul că fracţiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{a'}{b'}$, reprezintă un acelaşi număr raţional.

Mulţimea de referinţă fiind mulţimea Q a numerelor raţionale, iar fracţiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{a'}{b'}$, reprezentînd un acelaşi număr raţional, trebuie să le considerăm *egale*.

18.2.1. NUMĂRUL RAŢIONAL 0

Să considerăm mulţimea $Z \times Z$.

Cînd $a = 0$, atunci $ab' = 0$ şi din $a'b = 0$, $(b \neq 0)$ rezultă $a' = 0$. Deci, dacă o fracţie are numărătorul nul, atunci orice

fracţie egală cu aceasta are, de asemenea, numărătorul nul. Se zice că acest număr raţional este nul, se notează cu 0 iar valoarea sa absolută este 0. I se poate atribui semnul + sau −, la alegere, dar acesta, în general, se omite.

18.2.2. ÎNMULŢIREA NUMERELOR RAŢIONALE

Să definim pe mulţimea Z^{*2}, înmulţirea, notată $\otimes$, a două perechi (a, b) şi (c, d) prin relaţia:

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac, bd).$$

Să considerăm perechile (a, b), (a', b'), (c, d) şi (c', d').
Dacă: $(a, b) \ \mathcal{R} \ (a', b')$

$(c, d) \ \mathcal{R} \ (c', d')$,

atunci: $(ac, bd) \ \mathcal{R} \ (a'c', b'd')$.

Deoarece înmulţirea pe Z^{*2} este compatibilă cu relaţia de echivalenţă, putem defini operaţia determinată în mulţimea cît $Z^{*2}/\mathcal{R}$, pe care o notăm cu $\dot{\times}$, astfel:

$$\overline{(a, b)} \ \dot{\times} \ \overline{(c, d)} = \overline{(ac, bd)}$$

18.2.3 PROPRIETĂŢILE ÎNMULŢIRII

1. Element neutru pentru $\dot{\times}$.

Dacă (a, b) este un element neutru pentru $\dot{\times}$, atunci, pentru orice element (x, y) din Q^*, avem:

$$\overline{(x, y)} \ \dot{\times} \ \overline{(a, b)} = \overline{(x, y)}$$

sau:

$$\overline{(xa, yb)} = \overline{(x, y)},$$

sau:

$xay = ybx$, care implică $a = b$, pentru orice x şi orice y, nenuli din Q^*.

Prin urmare (a, b) este element neutru pentru $\dot{\times}$, dacă $a=b$.

Elementul neutru din Q^* este deci clasa de echivalenţă a elementelor $\overline{(h, h)}$ din Z^{*2}. Această clasă de echivalenţă admite ca reprezentant canonic elementul $(1, 1)$.

Să presupunem că simetricul elementului $\overline{(x, y)}$ este elementul $\overline{(x', y')}$.

Atunci avem:

$$\overline{(x, y)} \dot{\times} \overline{(x', y')} = \overline{(1, 1)},$$

sau: $\overline{(xx', yy')} = \overline{(1, 1)}$.

Rezultă: $xx' = yy' = 1$, care este echivalent cu $(x', y') \mathcal{R} (y, x)$; x', y' sînt dați de relațiile $x' = \frac{1}{x}$, $y' = \frac{1}{y}$.

Prin urmare orice element (x, y) din Q^* admite element simetric pentru operația $\dot{\times}$:

$$\forall (x, y) \in N^2, \overline{(x, y)} \dot{\times} \overline{(y, x)} = \overline{(1, 1)}.$$

Structura $(Q^*, \dot{\times})$.

1) $\dot{\times}$ este asociativă și comutativă;

2) Elementul $\overline{(1, 1)}$ este neutru;

3) Orice element $\overline{(x, y)}$ admite element $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ ca simetric.

$(Q^*, \dot{\times})$ este un grup abelian.

18.2.1. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE NENULE

Se consideră submulțimea $\bar{Q} \subset Q$, avînd elemente de forma $\overline{(x, 1)}$.

Această mulțime, avînd elemente de forma $\overline{(x, 1)}$, înzestrată cu operația $\dot{\times}$, este izomorfă cu Z^*, înzestrată de $\dot{\times}$.

Să arătăm că aplicația f care face să corespundă elementului $\overline{(x, 1)}$ din această mulțime numărul întreg nenul x este o bijecție și un omomorfism.

1. f este bijecție; aceasta este evident;

2. f este un omomorfism; într-adevăr:

$$x \overset{f}{\longleftrightarrow} \overline{(x, 1)}$$

$$y \overset{f}{\longleftrightarrow} \overline{(y, 1)}$$

$$x \dot{\times} y \overset{f}{\longleftrightarrow} \overline{(x, 1)} \dot{\times} \overline{(y, 1)}$$

$$f[\overline{(x, 1)} \dot{\times} \overline{(y, 1)}] = f[\overline{(xy, 1)}] = xy = x \dot{\times} y = f[\overline{(x, 1)}] \dot{\times} f[\overline{(y, 1)}],$$

sau:

$$f[\overline{(x, 1)} \dot{\times} \overline{(y, 1)}] = f[\overline{(x, 1)} \dot{\times} \overline{[y, 1)}].$$

În aceste condiţii, orice număr raţional $\overline{(x, y)}$ $(y \neq 0)$ verifică egalitatea: $\overline{(x, y)} = \overline{(x, 1)} \times \overline{(1, y)}$, şi un reprezentant va fi notat x/y, sau: $\overline{(x, y)} = \frac{\overline{(x, 1)}}{\overline{(y, 1)}} = \frac{x}{y}$.

Putem deci considera numărul raţional x/y ca produsul numărului raţional $\overline{(x, 1)}$ prin simetricul numărului raţional $\overline{(y, 1)}$.

Vom nota $\frac{\overline{(x, 1)}}{\overline{(y, 1)}}$, bara orizontală simbolizează operaţia reciprocă înmulţirii.

În cele ce urmează vom folosi, pentru notaţia numărului raţional forma x/y.

18.2.5. MULŢIMEA NUMERELOR RAŢIONALE

Să considerăm submulţimea Z'^2 a lui Z^2 definită astfel:

$$Z'^2 = \{(0, x),\ x \in N\}$$

În mulţimea Z' se consideră relaţia,

$$(x, y)\,\mathcal{R}\,(x'\ y') \Leftrightarrow xy' = x'y.$$

Avem: $$(0, x)\,\mathcal{R}\,(0, y) \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0 \cdot y$$

Clasa tuturor elementelor echivalente cu $(0,x)$ o vom nota $\overline{(0, x)}$. Mulţimea $Q = Q^* \cup \overline{(0,x)}$ se numeşte mulţimea numerelor raţionale.

18.2.6. ADUNAREA ÎN Q

Pe mulţimea $Z' \times Z'$ definim operaţia $\oplus$, numită adunarea perechilor, astfel:

$$(x, y) \oplus (z, w) = (xw + zy,\ yw).$$

Se arată, ca şi în exemplele precedente, că operaţia de adunare astfel definită este compatibilă cu relaţia de echivalenţă $\mathcal{R}$, adică, dacă:

$$(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y') \text{ şi } (z, w)\,\mathcal{R}\,(z', w'),$$

atunci:

$$[(x, y) \oplus (z, w)]\,\mathcal{R}\,[(x', y') \oplus (z', w')] \tag{1}$$

Lăsăm în seama cititorului verificarea acestei proprietăţi.

Relaţia (1) ne arată că dacă în operaţia $\oplus$ se înlocuiesc perechile (x, y) şi (z, w) cu două perechi echivalente (x', y') şi (z', w') se obţin perechi echivalente după relaţia $\mathfrak{R}$.

Operaţia $\oplus$ corespunde deci la o operaţie între clase de echivalenţă. Vom nota cu $+$ operaţia corespunzătoare între numerele raţionale şi avem:

$$x/y + z/w = (xw + yz/yw)$$

Această operaţie este comutativă, admite element neutru şi, pentru fiecare element al mulţimii Q* există un element simetric.

1) Comutativitatea şi asociativitatea sînt evidente;

2) Element neutru

Operaţia $+$ fiind definită, să presupunem că există un element neutru notat a/b.

Avem:

$$a/b + x/y = x/y \Leftrightarrow ay + bx/by = x/y \Leftrightarrow (ay + bx/by)\,\mathfrak{R}(x/y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (ay + bx)y = ybx \Leftrightarrow y^2a = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Elementul $0/b$ este neutru pentru operaţia $+$.

3. *Element simetric*

Să presupunem că orice element x/y a lui Q admite un element simetric (x'/y').

Atunci avem:

$$x/y + x'/y' = 0/1$$

sau:

$$(xy' + x'y/yy')\,\mathfrak{R}\,(0,1)$$

De unde rezultă că: $xy' = -x'y$ sau: $(x', y')\,\mathfrak{R}\,(-x, y)$.

Prin urmare orice element $x/y \in Q$ admite un element simetric $-x/y$ faţă de operaţia $+$.

Structura $(Q, +)$

1) Operaţia $+$ este comutativă;

2) Este asociativă;

3) Elementul $(0,1)$ este neutru;

4) Orice element x/y are un simetric $-x/y$ faţă de operaţia $+$.
$(Q, +)$ este un grup abelian.

Structura $(Q, +, \times)$

1) $(Q, +)$ este un grup abelian;

2) $(Q^*, \times)$ este un grup abelian;

3) Se verifică că înmulţirea este distributivă faţă de adunare.

Structura $(Q, +, \times)$ este un corp.

18.2.7. RELAŢIA DE ORDINE ÎN Q

Definiţie. 18.4. Se numeşte submulţimea numerelor raţionale pozitive, o submulţime a mulţimii Q, notată Q^+, ale cărei elemente x/y sînt astfel încît $x \cdot y$ aparţine lui Z^+.

Definiţie 18.5. Se numeşte submulţimea numerelor raţionale negative şi se notează Q^-, submulţime a mulţimii Q, ale cărei elemente x/y sînt astfel încît $x \cdot y \in Z^-$.

Definiţie 18.6. Numărul raţional x este „superior sau egal", numărului y, dacă şi numai dacă diferenţa $x-y$ este un element din Q^+. Se notează $x \geqslant y$.
Această relaţie este o relaţie de ordine totală:

1) Relaţia este reflexivă: $\forall\, x, x \geqslant x$;

2) Relaţia este antisimetrică; dacă relaţiile $x \geqslant y$ şi $y \geqslant x$ sînt adevărate simultan, atunci $x=y$.

3) Relaţia este tranzitivă.

Această relaţie este deci o relaţie de ordine; arătăm că această ordine este totală.

Într-adevăr, orice număr raţional aparţine fie lui Q^+, fie lui Q^-. Fiind date două numere raţionale oarecare x şi y, atunci $x-y$ aparţinînd lui Q^+ sau lui Q^-, vom avea respectiv relaţia $x \geqslant y$ sau $y \geqslant x$.

18.3. RELAŢIA DE CONGRUENŢĂ ÎN MULŢIMEA Z

Definiţie. 18.7. Două numere întregi x şi y sînt congruente modulo a şi se scrie $x \equiv y \pmod a$, dacă $x - y = az$, unde $z \in Z$.
Relaţia de congruenţă este o relaţie de echivalenţă în Z.
1) Relaţia este reflexivă:

$$\forall\, x \in Z, x - x = 0 = a \cdot 0, 0 \in Z, \text{ deci } x \equiv x \pmod a$$

2) Relaţia este simetrică:

$\forall(x, y) \in Z^2$, dacă $x - y = az$, atunci: $y - x = -az$.

3) Relaţia este tranzitivă:

Pentru orice x, y, w din Z, dacă: $x - y = az$ şi $y - w = az''$, atunci $x - w = az''$.

Într-adevăr:

$$(x - y) + (y - w) = x - w = az + az' = a(z + z') = az''.$$

O altă interpretare a relaţiei de echivalenţă.

Dacă x şi y sînt două elemente oarecare din Z, împărţirea lui x şi y prin a dă:

$$x = aq_1 + r_1,\ 0 \leqslant r_1 < a;$$

$$y = aq_2 + r_2,\ 0 \leqslant r_2 < a.$$

Dacă x şi y sînt echivalente:

$$x - y = az,$$

atunci $[(aq_1 + r_1) - (aq_2 + r_2)] = az$,

sau: $[a(q_1 - q_2) + r_1 - r_2] = az$,

sau: $a(q_1 - q_2) = az$ şi $(r_1 - r_2) = 0$, rezultînd $r_1 = r_2$.

Cititorul poate verifica că, reciproc, dacă două numere x şi y dau acelaşi rest cînd ele se împart prin a, atunci aceste două numere sînt echivalente în sensul relaţiei de mai sus:

$$x - y = az \text{ sau } x \equiv y \pmod{a},$$

$$x = aq + r \text{ şi } y = aq' + r.$$

Clasele de echivalenţă a tuturor perechilor de numere întregi congruente modulo a le vom nota aZ.

18.3.1. MULŢIMEA CÎT

Clasele de chivalenţă determinate în mulţimea Z prin relaţia de congruenţă formează o nouă mulţime numită mulţimea cît a lui Z prin $\mathfrak{R}$.

Notăm această mulţime cît prin simbolul Z/aZ.

18.3.2. REPREZENTAREA CANONICĂ

Fie x un element din Z.

$$\begin{cases} x = aq + r \\ 0 \leqslant r < a \end{cases} \qquad \text{sau } x-r = aq, \ x-r \in aZ,$$

x şi r sînt deci echivalente.

Relaţia $0 \leqslant r < a$ implică că reprezentările canonice ale claselor de echivalenţă sînt : $0, 1, 2, \ldots a-1$, şi vom nota clasele corespondente prin simbolurile : $\hat{0}, \hat{1}, \ldots\ldots, \widehat{a-1}$. Z/aZ este deci o mulţime de a elemente distincte, această mulţime este finită.

18.3.3. OPERAŢIA DE ADUNARE ÎN Z/aZ

Operaţia de adunare, notată $+$, din Z^2, este compatibilă cu relaţia de echivalenţă :

$\forall(x, y) \in Z^2, \forall(x', y') \in Z^2$, dacă :

$x \equiv x' \pmod{a}$, $y \equiv y' \pmod{a}$, atunci $x + y \equiv x' + y' \pmod{a}$.

Demonstraţie :

$$x - x' = az'$$
$$y - y' = az''$$

Adunînd cele două egalităţi membru cu membru, obţinem :

$[(x-x') + (y-y')] = az$, sau $[(x+y)-(x'+y')] = az$ şi $x + y \equiv x' + y' \pmod{a}$.

Compatibilitatea adunării cu relaţia de echivalenţă ne permite definirea în mulţimea cît a operaţiei $\dot{+}$.

Să notăm cu $\hat{x}$ şi respectiv $\hat{y}$ clasele de echivalenţă a elementelor congruente modulo a cu x, respectiv y şi avem :

$$\hat{x} \dot{+} \hat{y} = \widehat{x + y}.$$

Structura $(Z/aZ, \dot{+})$

1. Operaţia $\dot{+}$ este comutativă şi asociativă (proprietatea operaţiei de adunare notată $+$, este conservată prin operaţia $\dot{+}$).

2. Există pentru $\dot{+}$ un element neutru : $\hat{0}$.

Dacă $\hat{x}$ este element neutru pentru orice clasă $\hat{y}$ avem :

$$\hat{y} \dot{+} \hat{x} = \hat{y},$$

sau $\widehat{y + x} = \hat{y}$, egalitatea între clase care implică :

$$(y + x) \mathcal{R}\, y, \text{ sau } [(y+x) - y] = aZ,$$

sau $x \in aZ$, sau $\hat{x} = \hat{0}$.

3. Orice element admite un element simetric :

$$\hat{b} \dot{+} (-\hat{b}) = \hat{0}.$$

Dacă $\hat{x}$ este simetric lui $\hat{b}$, pentru $\dot{+}$, avem :

$$\hat{b} \dot{+} \hat{x} = \hat{0},$$

sau : $\widehat{b + x} = \hat{0}$ şi $(b + x) \mathcal{R} 0$,

sau : $(b+x) = az$ sau $[x - (-b)] \in aZ$.

x este deci echivalent cu $(-b)$ şi $\hat{x} = -\hat{b}$.

Orice element admite deci pentru $\dot{+}$ un element simetric. Cele trei proprietăţi determină pe $(Z/aZ, \dot{+})$ o structură de grup comutativ.

18.3.4. OPERAŢIA DE ÎNMULŢIRE ÎN Z/aZ

Vom arăta că operaţia de înmulţire, notată $\times$ în Z, este compatibilă cu relaţia de echivalenţă :

$$\forall (x, y) \in Z^2, \forall (x', y') \in Z^2, \text{ dacă :}$$

$x \equiv x' \pmod{a}$ şi $y \equiv y' \pmod{a}$ atunci $x - y \equiv x' - y' \pmod{a}$

Demonstrație :

$x = aq + r,\ y = ak + r',\ x \cdot y = a^2qk + a(qr' + kr) + rr',$

$x' = aq' + r,\ y = ak' + r',\ x' \cdot y' = a^2q'k' + a(q'r' +$
$+ k'r) + rr';$

și deci :

$$xy = ka + rr',$$

$$x'y' = qa + rr',$$

adică xy și $x'y'$ sînt echivalente.

18.3.5. OPERAȚIA $\dot{\times}$ ÎN Z/aZ

Compatibilitatea dintre operația $\times$ cu relația de echivalență ne permite să definim pe mulțimea cît operația $\times$ astfel :

$$\hat{x} \dot{\times} \hat{y} = \widehat{x \times y}.$$

Proprietățile operației $\dot{\times}$

1) Această operație este comutativă și asociativă (proprietatea a operației x în Z, conservată prin operația cît).

2) Operația $\dot{\times}$ admite un element neutru. Dacă $\hat{y}$ este element neutru, vom avea pentru orice element $\hat{b}$:

$$\hat{b} \dot{\times} \hat{y} = \hat{b}, \text{ sau } \widehat{b \times y} = \hat{b},$$

sau : $(b \times y) \mathcal{R}\, b,\ b(y-1) \in aZ.$

Relația fiind adevărată pentru orice element b din Z, deducem :

$$(y-1) \in aZ \text{ sau } y \mathcal{R}\, 1 \Leftrightarrow \hat{y} = \hat{1}.$$

3) $\hat{0}$ este absorbant pentru $\dot{\times}$ (proprietate pe care cititorul o va verifica).

4) $\dot{\times}$ este distributivă prin $\dot{+}$ (proprietatea a operațiilor $+$ și $\times$ în Z conservată prin operațiile cîturilor) :
$(Z/aZ, \dot{+}, \dot{\times})$ are o structură de inel.

Se demonstrează în acelaşi mod proprietăţile următoare:

5) Dacă $x_1 \equiv y_1 \pmod{a}$; $x_2 \equiv y_2 \pmod{a}$, $\ldots$, $x_n \equiv y_n \pmod{a}$, unde $x_i, y_i \in Z$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
atunci: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \equiv y_1 + y_2 + \ldots + y_n \pmod{a}$.

6) Dacă $x \equiv y \pmod{a}$, atunci:

$$x + ak \equiv b \pmod{a}, \ k \in Z;$$

7) Dacă $x \equiv y \pmod{a}$, atunci;

$$x^n \equiv y^n \pmod{a}, \ n \in N;$$

8) Dacă $x \equiv y \pmod{a}$, atunci:

$$xk = yk \pmod{a}, \text{ unde } k \in N;$$

9) Dacă $x \equiv y \pmod{a}$, atunci:

$$x \equiv y \pmod{d}, \text{ unde } d \text{ este un divizor a lui } a.$$

18.3.6. APLICAŢII

1. Să se calculeze restul împărţirii numărului 197^{21} la 13.

Soluţie. Avem $197 = 13 \cdot 15 + 2$ şi prin urmare $197 \equiv 2 \pmod{13}$

Aplicînd P_7, obţinem:

$$197^{21} \equiv 2^{21} \pmod{13}.$$

Avem: $2^7 = 128$. Dar $128 \equiv 11 \pmod{13}$.

Prin urmare avem: $2^7 \equiv 11 \pmod{13}$.

Aplicînd din nou P_7 obţinem:

$$(2^7)^3 \equiv 11^3 \pmod{13},$$

sau: $2^{21} \equiv 1331 \pmod{13}$, $2^{21} \equiv 5 \pmod{13}$.

Prin urmare avem:

$$197^{21} \equiv 2^{21} \pmod{13} \equiv 5 \pmod{13}.$$

Restul împărţirii este deci 5.

2. Să se calculeze restul împărţirii prin 6 a numărului $N = 122^{96}$

Soluție. $122 \equiv 2 \pmod 6$, $122^{96} \equiv 2^{96} \pmod 6$.

Avem: $2 \equiv 2 \pmod 6$, $2^2 \equiv 4 \pmod 6$, $2^3 \equiv 2 \pmod 6$, $2^4 \equiv 4 \pmod 6$ ...

În general: $2^{2p} \equiv 4 \pmod 6$, $2^{2p+1} \equiv 2 \pmod 6$.
Deoarece 96 este un număr par, restul împărțirii este 4.

18.4. NUMERE REALE

Vom arăta că nu există în mulțimea Q un număr al cărui pătrat să fie egal cu 2.

Pentru a demonstra această afirmație vom proceda prin reducerea la absurd.

Să presupunem că există un număr rațional ireductibil $\frac{p}{q}$ al cărui pătrat este numărul 2.

Vom avea:

$$\frac{p^2}{q^2} = 2, \text{ sau } p^2 = 2q^2, p, q \in N$$

Vom distinge două principale cazuri.

1) Dacă p este impar, atunci p^2 este de asemenea impar și prin urmare rezultă că $2q^2$ este impar ceea ce este imposibil.

2) Dacă p este par, atunci p este divizibil prin 2 și prin urmare p^2 este divizibil cu 4. Însă q este impar (fracția $\frac{p}{q}$ fiind ireductibilă și prin urmare q nu poate fi divizibil cu 2) iar $2q^2$ nu poate fi divizibil cu 4. Prin urmare ajungem din nou la o contradicție.

Deci nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 2.

Este necesar să construim o nouă mulțime, pe care o vom nota cu R, care are toate proprietățile mulțimii Q, dar care să posede în plus și alte proprietăți printre care existența unui element al cărui pătrat să fie egal cu 2. În cele ce urmează vom schița numai construcția mulțimii numerelor reale urmînd o cale indicată de Lucienne Felix.*

Definiție 18.8. Se numește majorantul unei submulțimi A, a unei mulțimi E, ordonată după relația $<$, orice element M a lui E care verifică relația $x < M$, pentru orice $x \in A$.

---
* În lucrarea „Expunere modernă a matematicii elementare" (Ed. științifică, 1970).

Definiție. 18.9. Se numește minorantul unei submulțimi A a lui E, orice element m a lui E care verfică relația $x > m$ pentru orice $x \in A$.

Definiție. 18.10. Dacă M este un majorant al submulțimii $A \subset E$, care aparține lui A, atunci el se numește element maximal.

În mod analog se definește elementul minimal.

Să considerăm o diviziune a mulțimii Q^+ în două submulțimi $\bar{Q}^+$ și $\hat{Q}^+$.

Submulțimea $\bar{Q}^+$ este formată din numerele raționale q care au proprietatea că $q^2 < a$ $(a \in Q)$ și submulțimea $\hat{Q}^+$ este formată din elementele q ale lui Q^+, care verifică relația $q^2 > a$.

18.4.1. PROPRIETĂȚI

Mulțimea $\bar{Q}^+$, majorată de elementele lui Q, nu are cel mai mare element.

Să considerăm $\frac{x}{y} \in \bar{Q}^+$, $\quad (x, y \in N)$

și să notăm $a = \frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha \in N$, $\beta \in N$.

Din relația evidentă :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta} \text{ deducem : } \beta x^2 - \alpha y^2 < 0.$$

Se arată că se poate găsi un k întreg și pozitiv, astfel încît :

$$\left(\frac{kx+1}{ky}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta} \tag{1}$$

Această relație se mai poate scrie :

$$\left(k^2 - \frac{\beta x}{(\alpha y^2 - \beta x^2)^2}\right)^2 - \frac{\alpha \beta y^2}{(\alpha y^2 - \beta x^2)^2} > 0 \tag{2}$$

Să notăm cu r un număr rațional aparținînd clasei numerelor raționale pozitive. Vom avea :

$$r^2 > \frac{\alpha \beta x^2}{(\alpha\, y^2 - \beta\, x^2)^2}$$

Din relaţia (2), deducem : $k > \frac{\beta x}{\alpha y^2 - \beta x^2} + r.$

Pentru ca relaţia (1) să fie verificată, trebuie să avem :

$$\frac{kx+1}{ky} > \frac{kx}{ky}, \text{ sau } \frac{kx+1}{ky} > \frac{x}{y}.$$

Prin urmare, orice ar fi numărul raţional aparţinînd lui $\bar{Q}^+$ există un număr raţional mai mare decît el, aparţinînd lui $\bar{Q}^+$.

Se poate arăta, urmînd o cale analoagă, că mulţimea $\hat{Q}^+$, majorată prin elementele lui $\bar{Q}^+$, nu are cel mai mic element.

Cel mai mic majorant al mulţimii $\bar{Q}^+$ se numeşte margine superioară a lui $\bar{Q}^+$. Se defineşte în acelaşi mod marginea inferioară.

Definiţie. 18.11. Se numeşte mulţimea numerelor reale, reuniunea mulţimii numerelor raţionale cu mulţimea marginilor inferioare şi superioare a tuturor elementelor majorate sau minorate de Q.

Exerciţii rezolvate.

Să considerăm şirul :

$$u_1 = \sqrt{2},\ u_2 = \sqrt{2 + u_1},\ u_3 = \sqrt{2 + u_2}, \ldots$$
$$u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}} \ldots$$

Să se arate că acest şir este crescător şi este mărginit superior de 2.

Demonstraţie.

$$u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > u_1,\ u_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} > u_2, \ldots,$$
$$u_n \geqslant u_{n-1}$$

Din relaţia $u_n > u_{n-1}$, deducem :

$$2 + u_n > 2 + u_{n-1} \Rightarrow \sqrt{2 + u_n} > \sqrt{2 + u_{n-1}} \Rightarrow u_{n+1} > u_n.$$

Şirul este crescător.

Din relaţia $u_n < 2$, deducem :

$$u_n + 2 < 4 \Rightarrow \sqrt{2 + u_n} < 2 \Rightarrow u_{n+1} < 2.$$

18.5. NUMERE COMPLEXE

18.5.1. GENERALITĂŢI

Pe mulţimea R^2 se definesc operaţiile:

1) Adunarea perechilor de numere reale (operaţie pe care o notăm $+$):

$$\forall (a, b) \in R^2, (c, d) \in R^2 ; (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d).$$

2) Înmulţirea cu un număr real λ (operaţie pe care o notăm $\times$).

$$\forall (a, b) \in R^2, \lambda \times (a, b) = (\lambda a, \lambda b).$$

3) Înmulţirea perechilor (operaţie pe care o notăm $\cdot$).

$$\forall (a, b) \in R^2, \forall (c, d) \in R^2 : (a, b) \cdot (c, d) = (ac-bd, ad+cb).$$

Dacă $(a, b) = (a', b')$ atunci $a = a', b = b'$.

Mulţimea R^2 înzestrată cu operaţiile $+, \cdot, \times$ se numeşte mulţimea numerelor complexe şi se notează cu K.

Operaţiile au următoarele proprietăţi care se pot verifica uşor:

(α) *Adunarea*

1) $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$ (comutativitate);

2) $(a, b) + [(c, d) + (e, f)] = [(a, b) + (c, d)] + (e, f)$ (asociativitatea);

3) $(a, b) + 0, 0) = (a, b)$ (element neutru);

4) $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$ (element simetric).

(β) *Înmulţirea cu un număr real*

1) $(\lambda + \mu) \times (a, b) = \lambda \times (a, b) + \mu \times (a, b)$;

2) $1 \times (a, b) = (a, b)$;

3) $\lambda \times \mu \times (a, b) = (\lambda \mu) \times (a, b)$.

(γ) *Înmulţirea*

1) $(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$ (comutativitate);

2) $(a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] = [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f)$ (asociativitate);

3) $(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$ (element neutru);

4) $(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = (1,0)$ (element simetric);

5) $(a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f)$ (înmulţirea este distributivă faţă de adunare).

Proprietăţi

Structura $(K, + ; \times)$ este un spaţiu vectorial.
Structura $(K, +, \cdot)$ este un corp comutativ.
Lăsăm această verificare în seama cititorilor noştri.

18.5.2. BAZA CANONICĂ A SPAŢIULUI VECTORIAL $(K, + ; \times)$

Să considerăm două numere complexe (1,0) şi (0,1).

Avem : $(a, b) = a \times (1, 0) + b \times (0,1)$.

Numerele complexe (1,0) şi (0,1) constituie o bază a spaţiului vectorial, numită baza canonică.

18.5.3. IZOMORFISMUL MULŢIMII R CU O SUBMULŢIME A LUI K

Să notăm cu K' submulţimea formată din toate numerele complexe de forma $(x, 0)$, $x \in R$.

Să considerăm o aplicaţie a mulţimii numerelor reale pe submulţimea K' dată prin relaţia :

$$\forall a \in R, f(a) = (a, 0).$$

Se poate arăta că această aplicaţie este o bijecţie.

Avem :

$$\begin{array}{c} a \in R \Rightarrow (a, 0) \in K' \\ b \in R \Rightarrow (b, 0) \in K' \\ \hline a + b \in R \Rightarrow (a + b, 0) \in K' \end{array}$$

$$\lambda \in R, \lambda \cdot a \Rightarrow \lambda(a, 0)$$

Prin urmare:

$$f(a + b) = f(a) + f(b);$$

$$f(\lambda a) = \lambda \cdot f(a).$$

Aplicaţia f este un izomorfism.

Pe baza acestui izomorfism putem nota numărul complex $(a, 0)$ cu a.

Se notează numărul complex $(1, 0)$ prin 1, iar numărul complex $(0, 1)$ prin i.

Avem $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$.

Prin urmare $\mathrm{i}^2 = -1$.

Pe baza notaţiilor introduse avem:

$$(a, b) = a \times (1, 0) + b \times (0, 1) = a + b\,\mathrm{i}.$$

Se poate uşor verifica ca operaţiile notate $+$, $\cdot$, $\times$, definite în mulţimea numerelor complexe, se reduc la operaţiile algebrice obişnuite cu expresii algebrice binomiale de forma:

$$x + \mathrm{i}\,y \; (\mathrm{i}^2 = -1).$$

Exerciţii rezolvate

Să se afle numerele complexe care au pătratele egale cu $-2\mathrm{i}$.

Soluţie

$$(x + \mathrm{i}y)^2 = -2\mathrm{i} \Leftrightarrow x^2 + 2\mathrm{i}\,xy - y^2 = -2\mathrm{i} \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - y^2) + 2xy\mathrm{i} = -2\mathrm{i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ xy = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x + y = 0 \\ xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -y \\ xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -y \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

Singurele numere complexe z care satisfac relaţia

$$z^2 = -2\mathrm{i} \text{ sînt } z_1 = 1 - \mathrm{i},\; z_2 = -1 + \mathrm{i}.$$

18.5.4. FORMA TRIGONOMETRICĂ A UNUI NUMĂR COMPLEX

Să considerăm numărul complex $z = a + bi$ şi să reprezentăm față de un sistem de axe punctul $M(a, b)$. Avem: $m = \overline{OM} = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + k\pi$$

Prin urmare punctul M este perfect determinat dacă se cunoaşte:

$$OM = m \ (m \geqslant 0),$$

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \varphi \ (\operatorname{mod} 2\pi)$$

Avem:

$$a = m\cos\varphi, \ b = m\sin\varphi,$$

$$z = a + bi = m\cos\varphi + \mathrm{i}\, m\sin\varphi = m(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \qquad (1)$$

Expresia (1) se numeşte forma trigonometrică a unui număr complex.

Exemplul 1.

Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex $z = 1 + \mathrm{i}$.

Avem: $m = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Prin urmare: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

18.5.5. FORMULA LUI MOIVRE

Fie:

$$z_1 = m_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$$
$$z_2 = m_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$$

Avem:

$$z_1 \cdot z_2 = m_1 \cdot m_2\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \qquad (1)$$

$$z_1 : z_2 = \frac{m_1}{m_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \qquad (2)$$

$$z = m(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$z^n = m^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (3)$$

Formula (3) se numeşte formula lui Moivre.

Exemplul 2

Să se calculeze sin 3α cu ajutorul funcţiilor trigonometrice ale unghiului α.

Soluţie

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha$$

$$\cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha - i\sin^3\alpha = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha$$

Se deduce:

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha$$
$$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha$$

18.6. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Să se arate că pentru orice număr întreg inegalitatea $a \leqslant b$ implică $(-b) \leqslant (-a)$.

2. Să se arate că singurele elemente ale mulţimii Z care admit elemente inverse sînt $+1$ şi -1.

3. Să se arate că în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $a + x = b$ admite o soluţie unică.

4. Să se arate că dacă în mulţimea numerelor întregi avem inegalitatea $x \leqslant y$, atunci $ax \leqslant ay$, dacă $a > 0$, şi $ax \geqslant ay$, dacă $a < 0$.

5. În mulţimea Z^2 se definesc două operaţii notate $\top$ şi $\perp$ prin relaţiile:

$$(a, b) \top (a', b') = (a + a', b + b').$$
$$(a, b) \perp (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba').$$

Să se arate că $(Z^2, \perp, \top)$ este un inel. Să se precizeze care sînt elementele unitare.

6. Să se determine ce semn are suma:

$$\overline{(p, q)} + \overline{(q - 1, p - 1)}.$$

7. Să se afle semnele numerelor întregi a şi b dacă avem:

$$ab > 0 \text{ şi } a + b > 0.$$

8. Să se determine relaţia dintre p şi q astfel încît să avem: $\overline{(p + 1, q)} = \overline{(q + 1, p)}$.

9. Să se determine un număr de două cifre cunoscînd suma lor egală cu 1008 şi cel mai mare divizor comun egal cu 24.

10. Să se arate că cel mai mare divizor comun al numerelor întregi pozitive a şi b este acelaşi cu cel mai mare divizor comun al numerelor $5a + 3b$ şi $13a + 8b$.

11. Să se arate că numărul $A = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$, $n \in Z^+$ este divizibil cu 7 oricare ar fi numărul n.

12. Să se arate că numărul $7^n + 1$ este divizibil cu 8, dacă n este impar, şi să se afle restul împărţirii sale prin 8.

13. Dacă a şi b sînt două numere întregi oarecare, arătaţi că numărul $a^2 + b^2$ este divizibil prin 7, dacă şi numai dacă, numerele a şi b sînt divizibile cu 7.

14. Să se arate că dacă numerele m şi n sînt multipli ai numărului 3, numărul $A = 3^{2n} + 3^n + 1$ este divizibil cu numărul 13.

Să se determine apoi restul împărţirii numărului A la 13, dacă n este multiplu de 13.

15. Să se arate că pentru orice număr natural n numărul $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ se divide cu 7.

16. Să se arate că numărul $3^{105} + 4^{105}$ se divide cu 181.

17. Să se arate că $(7a + 3)^{2n+1} + (7b + 25)^{2n+1}$ se divide cu 7, $a, b, n \in N$.

18. Să se arate că numărul $72^{2n+2} - 47^{2n} + 28^{2n-1}$ se divide cu 25.

19. Să se arate că numărul $2^{60} + 7^{30}$ se divide cu 13.

20. Să se arate că $4^n + 15^n - 1$ se divide cu 9, unde $n \in N$.

21. Pentru ce valori întregi x numărul $a(x^3 + a^2 x^2 + a^2 - 1)$ se divide cu 6, pentru orice număr întreg a.

22. Să se arate că numărul $N = 5^{2n-1} \cdot 2^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 2^{n-1}$ se divide cu 19 pentru orice număr natural n.

23. Să se arate că numărul $a^{4n+1} - a$ pentru orice numere întregi a și pentru $n \geqslant 0$ se divide cu 30.

24. Să se afle toate numerele naturale n astfel încît numărul $n^2 + 1$ se divide cu $n + 1$.

25. Să se arate că pentru orice numere întregi x și y, numărul $N = (x^2y^3 - 4x^2y)(x^4 + x^2 - 2)$ se divide cu 216.

26. Să se arate că $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$ se divide cu $5(x - y)(y - z)(z - x)$, dacă x, y, z sînt numere întregi impare și neegale.

27. Să se arate că numărul $N = 2^{5n-1} + 2^{5n-2} + 2^{5n-3} + \ldots + 2^2 + 2 + 1$ se divide cu 31.

28. Să se arate că pentru orice număr $n \in N$ numărul $2n^3 - 3n^2 + n$ se divide cu 6.

29. Să se arate că pentru orice număr întreg n, pozitiv, numărul $2^{2^{6n+2}} + 3$ se divide cu 19.

30. Să se arate că numărul:

$A_n = 10^{6n+2} + 10^{3n+1}$, $n \in N$ este divizibil cu 111.

31. Să se calculeze restul împărțirii: $(1000)^{150} : 7$.

32. Să se arate că pentru orice $n \in N$, numărul $n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^4$ se divide cu 16.

33. Să se arate că numărul $(n + 1)^{3n} - n^2(n + 3)^2$ se divide cu numărul $3n + 1$.

34. Să se arate că numărul:

$N = 1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + \ldots + (2a)^{2n+1}$ se divide cu $2a + 1$, oricare ar fi numărul natural a.

35. Să se arate că pentru orice număr natural n, numărul $n^{8888} - n^{7777} + 1$, se divide cu $n^2 - n + 1$.

36. Să se demonstreze că pentru orice valoare a lui $x \in Z$ numărul $9x^5 - 5x^3 - 4x$ se divide cu 120.

37. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n, numărul $9^n(9^n + 1) + 1$ se divide cu numărul $3^n(3^n + 1) + 1$.



38. Să se arate că pentru orice valoare întreagă a lui n numărul $n^2 + 3n + 5$ nu se divide cu 121.

39. Să se demonstreze că dacă funcţia $y = ax^2 + bx + c$ pentru toate valorile întregi ale lui x primeşte valori întregi atunci $2a$, $a + b$ şi c sînt numere întregi.

40. Să se arate că nu există numerele întregi a, b, c, d, astfel încît expresia $ax^3 + bx^2 + cx + d$ să fie egală cu 1 pentru $x = 19$ şi egală cu 2 pentru $x = 62$.

41. Să se găsească toate numerele naturale x pentru care expresia $22x + 5$ este pătratul unui număr natural.

42. Să se găsească un număr natural $\overline{abcd}$, scris în sistemul cu baza de numeraţie 10, egal cu $(5c + 1)^2$.

43. Să se arate că numărul $\dfrac{2n\,!}{n\,!(n+1)\,!}$ este un număr natural.

44. Să se demonstreze că nu există nici un număr prim de trei cifre ale cărui cifre să formeze o progresie aritmetică.

45. Să se determine valorile parametrului a pentru care ecuaţia $a(a + 1)x^2 + x - a(a - 1) = 0$ are rădăcini întregi.

46. Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuaţia :

$$x + y = (x - y)^2.$$

47. Să se arate că ecuaţia $3x^2 + 8 = y^2$ nu are soluţii în mulţimea numerelor întregi.

48. Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuaţia :

$$(x + y)^2 - (x + y) - 2x = 150.$$

49. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia :

$$2xy + 3y^2 = 24.$$

50. Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuaţia :

$$2x^2 - xy - y^2 + 2x + 7y = 84.$$

51. Să se arate că ecuaţia $x^3 + y^3 + 1 = 3xy$ are singura soluţie $x = y = 1$ în mulţimea numerelor întregi pozitive.

52. Să se găsească soluţiile întregi şi numere pozitive ale ecuaţiei :

$$2^{x^2+x-2} - 2^{x^2-4} = 992.$$

53. Să se afle soluțiile întregi, pozitive ale sistemului:

$$\begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + yz = 19 \end{cases}$$

54. Să se rezolve în mulțimea N, ecuația:

$$(x^x + y^y) = 2x + y.$$

55. Să se rezolve ecuația:

$(x + 1)(y + 2) = 2xy$ în mulțimea numerelor întregi.

Numere raționale

56. Să se arate că înmulțirea $\times$ definită în Q este distributivă față de operația $\dot{+}$ definită în Q^*.

57. Să se arate că în corpul Q, ecuația $ax = b$ admite soluție unică.

58. Să se arate că submulțimea numerelor raționale de forma $(x, 1)$ înzestrate cu operația de înmulțire $\dot{\times}$, este izomorfă cu mulțimea $(Z^*, \dot{\times})$.

59. Să se arate că în mulțimea Q, orice element $(\overline{x, y})$ admite un element simetric față de operația $\dot{+}$.

60. În mulțimea Q se definește operația $*$ prin:

$$x*y = \frac{x + y}{2}, \text{ numită medie aritmetică.}$$

Să se studieze structura $(Q, *)$.

61. În mulțimea Q^2 se definesc două operații notate:

$$(x, y) \top (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(x, y) \perp (x', y') = (xx' + yy', xy' + x'y).$$

Să se arate că structura $(Q, \perp, \top)$ este un corp.

62. Să se arate că dacă $x + \frac{1}{x} = 1$, atunci $x^5 + \frac{1}{x^5} = 1$.

63. Să se arate că:

$$2\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3^4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{3^{2^n}}\right) = 3\left(1 - \frac{1}{3^{2^n}}\right).$$

64. Să se demonstreze că dacă $x + y = a + b$ şi $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ atunci $x^n + y^n = a^n + b^n$.

65. Să se demonstreze că dacă: $ax + by + cz = 0$, atunci expresia

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2 + ab(x - y)^2}$$

nu depinde de x, y, z.

66. Să se demonstreze că:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4),$$

dacă $a + b + c = 0$.

Numere reale

67. Fie a, b, c, α, patru numere raţionale astfel ca $\sqrt[3]{\alpha}$ să fie iraţional. Să se demonstreze că dacă avem egalitatea:

$$a\sqrt[3]{\alpha^2} + b\sqrt[3]{\alpha} = c, \text{ atunci } a = b = c = 0.$$

68. Folosind rezultatele din exerciţiul precedent să se arate că numărul:

$\dfrac{a\sqrt[3]{\alpha^2} + b\sqrt[3]{\alpha} + c}{a'\sqrt[3]{\alpha^2} + b'\sqrt[3]{\alpha} + c'}$ nu poate fi raţional decît dacă a, b, c sînt proporţionale cu a', b', c'.

69. Să se stabilească condiţiile în care numărul $\dfrac{ax + b}{a'x + b'}$ este număr raţional, a, b, a', b', fiind numere raţionale iar x număr iraţional.

70. Să se demonstreze că numerele:

cos 15° şi sin 15° sînt două numere iraţionale.

71. Să se arate că numărul:

$$x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{\frac{371}{27}}} + \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{371}{26}}} \text{ este raţional.}$$

72. Să se arate că numărul:

$$x = \sqrt[3]{3} - \sqrt{2} \text{ este irațional.}$$

Numere complexe

73. Să se demonstreze următoarele proprietăți referitoare la modulele numerelor complexe:

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}; |Z^n| = |Z|^n$$

$$|Z_1 + Z_2| \leqslant |Z_1| + |Z_2|; \ |Z_1 - Z_2| \leqslant |Z_1| - |Z_2|; \ |\bar{Z}| = |Z|$$

74. Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex:

$$Z = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}\right)^2$$

75. Să se găsească numărul complex z al cărui pătrat să fie egal cu i.

76. Să se calculeze $Z = \dfrac{a + bi}{c + di}$.

77. Să se determine valoarea lui α pentru care expresia:

$$\left[\frac{1 + i\,\mathrm{tg}\alpha}{1 - i\,\mathrm{tg}\alpha}\right]^n \text{ este reală.}$$

78. Să se arate că: $\left(\dfrac{1 + i\,\mathrm{ctg}\alpha}{1 - i\,\mathrm{ctg}\alpha}\right)^2 = \cos 4\alpha - i \sin 4\alpha$.

79. Să se determine valoarea α pentru care expresia $(1 + i\,\mathrm{ctg}\alpha)(\sin\alpha + i\cos\alpha)$ este un număr real.

80. Să se aducă la forma trigonometrică expresiile:

$$Z_1 = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$Z_2 = -\cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$Z_3 = \frac{\sin 2\alpha - i\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + i\cos 2\alpha}$$

$$Z_4 = \mathrm{tg}\alpha - i$$

81. Să se calculeze $\cos 5\theta$ în funcție de $\cos\theta$.

82. Să se rezolve ecuaţia:

$$Z^5 - 1 = 0$$

83. Să se rezolve ecuaţiile:

$$x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = 0$$

$$(1 + Z)^4 = (Z - 1)^4$$

84. Să se calculeze sumele:

$$S_n = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx,$$

$$T_n = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx.$$

85. Să se aducă la forma cea mai simplă

$$F = \frac{\cos 2x + \cos 4x + i(\sin 4x + \sin 2x)}{\cos 2x + \cos 4x - i(\sin 4x - \sin 2x)}$$

86. Să se calculeze: $E = Z^{142} + \frac{1}{Z^{142}}$

unde Z este soluţia ecuaţiei $Z + \frac{1}{Z} = 1$.

87. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{(1 + x)^3}{(1 - x)^3} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha}$$

88. Să se rezolve ecuaţia: $|Z| - Z = 1 + 2i$.

89. Să se calculeze sumele:

$$S_1 = \cos x + \cos(x + r) + \ldots + \cos(x + kr),$$

$$S_2 = \sin x + \sin(x + r) + \ldots + \sin(x + kr).$$

90. Se dă expresia

$$Z = \frac{\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i}{\alpha\beta\sqrt{2} + i\sqrt{\alpha^4 + \beta^4}},\ \alpha, \beta \in R.$$

Să se calculeze $|Z|$.

91. Să se construiască afixul numărului Z care verifică relația :

$$\frac{Z-a}{Z-b}=\alpha$$

a, b, α fiind constante complexe.

92. Să se arate că dacă $ZZ'=\alpha^2$ atunci avem relația :

$$|Z|+|Z'|=\left|\frac{Z+Z'}{2}-\alpha\right|+\left|\frac{Z+Z'}{2}+\alpha\right|$$

93. Să se calculeze :

$S_n=1+C_n^2+C_n^4+\ldots+C_n^{2p},$

$T_n=C_n^1+C_n^3+\ldots+C_n^{2p+1}.$

94. Să se afle locul geometric al afixelor M a numerelor complexe Z care satisfac relația :

$$|Z-Z\mathrm{i}|=|Z+1|.$$

95. Să se pună sub formă trigonometrică numărul complex :

$$Z^2-Z.$$

96. Să se rezolve ecuația :

$$Z=Z^{k-1}.$$

$$k=0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

97. Se dă polinomul : $f(Z)=Z^2-(3+4\mathrm{i})Z-1+5\mathrm{i}$.

a) Să se calculeze valoarea acestui polinom pentru $Z_1=2+3\mathrm{i}$.

b) Să se arate că : $\overline{f(Z_1)}\neq f(\bar{Z}_1)$.

98. Să se arate că orice număr complex de modul 1 se poate pune sub forma :

$$\frac{1+x\mathrm{i}}{1-x\mathrm{i}}, \quad x\in R.$$

99. Să se arate că, dacă $|Z_1|=|Z_2|=1$, numărul :

$$Z=\frac{Z_1+Z_2}{1+Z_1Z_2}$$ este număr real.

100. Să se arate că:

$$(1 - ai)(1 - bi) = (a + i)(b - i).$$

101. Să se determine modulul şi argumentul lui $Z = \frac{1 + i}{1 - i}$.

Să se calculeze: $u = Z^{32}$.

102. Să se calculeze:

$$\frac{(1 + i)^{2n+1}}{(1 - i)^{2n-1}}$$

103. Să se arate că:

$$\left(\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}\right)^{24} + 2^{24} = 0$$

104. Se dă numărul $z = (1 + ax\,i)^5$.
Să se determine x, astfel încît să z fie real.

105. Se consideră mulţimea numerelor complexe C.
Să se demonstreze că $f(Z) = \bar{Z}$ $(Z \in C)$ este bijectivă.

106. Să se determine modulul şi argumentul numărului complex.

$$\frac{(1 + i)^4}{1 - 2i}; \quad \frac{(1 - i)^4}{1 + i}$$

107. Să se calculeze: $a^{14} + \frac{1}{a^{14}}$; $a^{17} + \frac{1}{a^{17}}$, dacă $a^2 + a + 1 = 0$.

108. Să se arate că numărul: $\frac{Z}{|Z|} + \frac{|Z|}{Z}$ este real.

Să se arate că $Z = 1 + 2i$ este o rădăcină a ecuaţiei:

$Z^3 = -11 - 2i$.

109. Se dă $Z = \frac{a + i}{a - i}$, $a \in R$

Să se determine $|Z|$ şi să se arate că imaginea lui Z descrie un cerc cînd a variază.

110. Se consideră polinomul:

$$P(Z) = Z^4 - 2\,ai\sqrt{3}Z^3 - 8\,a^2Z^2 + (8\,a^3i + \sqrt{3})Z + 16a^4.$$

Se cere:

a) Să se calculeze $P(-2a)$; $P\left[2a\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

b) Să se rezolve ecuaţia $P(Z) = 0$.

c) Să se determine punctele corespunzătoare rădăcinilor ecuaţiei $P(Z) = 0$.

111. Să se rezolve ecuaţia:

$$(\sqrt{3} - i)Z^4 - (\sqrt{3} + i) = 0.$$

Capitolul 19

MATRICI. DETERMINANŢI

19.1. GENERALITĂŢI. DEFINIŢII

În teoria sistemelor de ecuaţii liniare se întîlnesc adesea diferite tablouri de numere, ca de exemplu tabloul coeficienţilor necunoscutelor unui sistem cu m ecuaţii şi n necunoscute. Se foloseşte denumirea de matrice pentru a indica un tablou dreptunghiular cu elemente avînd m linii şi n coloane.

$$\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots \qquad \ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Elementele $a_{ij}(i = 1,\ldots, m, \;\; j = 1,\ldots, n)$ pot aparţine unei mulţimi numerice oarecare. În loc de paranteze pentru a nota o matrice se folosesc adesea bare verticale duble. În scrierea matricei, a_{ij} este elementul din linia i şi coloana j. Dacă m (numărul liniilor) este egal cu n (numărul coloanelor) matricea se numeşte matrice pătrată de ordinul n. În particular, matricea compusă dintr-o singură linie sau matricea compusă dintr-o singură coloană se numeşte *vector linie*, respectiv *vector coloană*. Într-o matrice pătratică de ordinul n elementele $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ formează diagonala principală a matricei, iar elementele $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$ formează diagonala a doua. O matrice pătrată în care numai elementele de pe diagonala principală sînt diferite de zero se numeşte matrice diagonală. Matricea pătratică se numeşte triunghiulară, dacă toate elementele ei sînt nule pentru $i > j$ (sau $i < j$).
De exemplu matricea :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

este o matrice triunghiulară deoarece elementele a_{21}, a_{31}, a_{32}, adică elementele pentru care $i > j$ sînt egale cu zero.

Prin definiţie, două matrice sînt egale atunci cînd au aceeaşi dimensiune şi elementele corespunzătoare egale.

Aşa de exemplu dacă : $A = (a_{ij})$ şi $B = (b_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, matricile sînt egale şi scriem $A = B$ dacă $a_{ij} = b_{ij}$, pentru oricare $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Transpusa unei matrice A este matricea A' care are drept linii coloanele matricei A. Transpusa matricei A este deci matricea care se obţine înlocuind liniile prin coloane. Matricea A se numeşte simetrică dacă pentru orice i şi j avem : $a_{ij} = a_{ji}$.

Matricea nulă este matricea ale cărei elemente sînt toate egale cu zero. O vom nota prin 0.

Exemplul 1

Matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ este simetrică. Transpusa matricii A este matricea : $A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, egală cu matricea A.

Exemplul 2

Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Transpusa matricii A este matricea $A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Se numeşte matrice unitate de ordinul n matricea pătratică de ordinul n ale cărei elemente sînt egale cu zero, cu excepţia celor situate pe diagonala principală, care sînt egale cu 1. Aceste matrice se notează de obicei cu E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

19.2. OPERAŢII CU MATRICE

19.2.1. ADUNAREA MATRICELOR

Suma a două matrici cu aceeaşi dimensiune este matricea de acelaşi ordin ce are elementele egale cu suma elementelor corespunzătoare din cele două matrice.
Dacă notăm matricea A prin $A = [a_{ij}]$ şi matricea $B = [b_{ij}]$, vom avea $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$.
Exemplu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

19.2.2. ÎNMULŢIREA MATRICELOR CU UN SCALAR

Să considerăm un număr oarecare α, real sau complex, şi o matrice A. Să formăm matricea αA ale cărei elemente se deduc din elementele matricei A înmulţindu-le cu numărul α (şi lăsînd neschimbate linia şi coloana în care se găsesc). Matricea αA se numeşte produsul dintre numărul α şi matricea A.

Exemplu :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \ \alpha = 3$$

$$\alpha A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -3 & 9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Operaţia de adunare a matricelor are următoarele proprietăţi :

1) Comutativitatea : $A + B = B + A$

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}].$$

2) Asociativitatea

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

$$[a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = \\ = [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}].$$

3) Matricea nulă [0] este matricea cu toate elementele zero: $\forall + 0 = A$

$$[a_{ij}] + [0] = [a_{ij} + 0] = [a_{ij}].$$

4) Matricea opusă matricei $A = [a_{ij}]$ este matricea $-A = [-a_{ij}]$ deoarece elementele sînt opusele elementelor lui A, $A + (-A) = 0$.

Înmulţirea matricelor cu un scalar are următoarele proprietăţi

1) este distributivă faţă de adunarea scalarilor:

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

$$(\alpha + \beta)[a_{ij}] = [(\alpha + \beta)a_{ij}] = [\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}] =$$

$$= [\alpha a_{ij}] + [\beta a_{ij}] = \alpha[a_{ij}] + \beta[a_{ij}].$$

2) este distributivă faţă de suma matricelor:

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

$$\alpha[a_{ij} + b_{ij}] = [\alpha(a_{ij} + b_{ij})] = [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}] =$$

$$= [\alpha a_{ij}] + [\alpha b_{ij}] = \alpha[a_{ij}] + \alpha[b_{ij}].$$

3) $1. A = A. 1[a_{ij}] = [1 \cdot a_{ij}] = [a_{ji}]$.

4) $0.A = A$ (unde prin 0 am însemnat scalarul nul).

19.2.3. PRODUSUL MATRICELOR

Produsul matricelor A şi B, luate în această ordine, are sens dacă numărul coloanelor matricei A este egal cu numărul liniilor matricei B.

Să considerăm matricele:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & & & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Vom însemna prescurtat $A(m \times n)$ şi $B(n \times p)$, înţelegînd prin această notaţie că matricea A are dimensiunea $m \times n$ (m linii şi n coloane), iar matricea B are dimensiunea $n \times p$ (n linii şi p coloane). Produsul se defineşte în felul următor: elementul c_{ij} din matricea produs se obţine făcînd suma produselor dintre elementele liniei i din matricea A şi elementele corespunzătoare din coloana j

a matricei B. Deoarece elementele liniei i din matricea A sînt $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in}$ iar ale coloanei j din B sînt $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{ij}, \ldots, b_{nj}$, conform definiției produsului matricilor, elementul c_{ij}, din matricea produs $C = A.B$ va fi :

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj}$$

sau :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}.$$

Deoarece i ia valori de la 1 la m iar j ia valori de la 1 la p, matricea produs va avea dimensiunea $m \times p$ adică m linii și p coloane.

Exemplu :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Matricea A este de dimensiunea 2×3 (are două linii și trei coloane). Matricea B are dimensiunea 3×2 (trei linii și două coloane). Numărul de coloane al matricei A este egal cu numărul de linii al matricei B. Conform regulii de înmulțire vom avea :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Pentru a afla elementul din linia 1 și coloana 1 a matricei produs se înmulțesc elementele liniei I din matricea A cu elementele coloanei I din matricea B și se face suma produselor astfel obținute :

$$1 \cdot (-1) + 4(+3) + (-1) \cdot (+4) = -1 + 12 - 4 = +7$$

Procedînd în mod analog se obțin celelalte elemente ale matricei $C = A \cdot B$.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 4(+3) + (-1)(+4) & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-1)(+6) \\ 3(-1) + 2(+3) + (+1)(+4) & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Dacă A este o matrice pătratică de ordinul n iar E este matricea unitate avem relaţia :

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

Exemplu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot E =$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 0 & 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 1\cdot 0 & 1\cdot 0 + (-1)1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Produsul matricelor nu este comutativ

Fie A o matrice de dimensiunea $m \times n$ şi B o matrice de dimensiunea $n \times p$. Se poate prin urmare efectua produsul $A \cdot B$. Pentru ca să existe şi produsul $B \cdot A$ este necesar ca $p = m$. În acest caz produsul $B \cdot A$ este o matrice pătratică de ordinul n. Se poate întîmpla ca să existe $A \cdot B$ şi $B \cdot A$ dar $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Produsul matricelor are următoarele proprietăţi

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (produsul matricilor este asociativ);

2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (produsul matricilor este distributiv faţă de adunare);

3) $k(A \cdot B) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB)$, $k \in R$.

Folosind noţiunea de produs a două matrice se deduce imediat ce înseamnă puterea A^k a matricii A.

Se demonstrează următoarea proprietate: transpusa unui produs de matrice este egală cu produsul matricelor transpuse luate în ordine inversă:

$$(A \cdot B)' = B' \cdot A'$$

19.3. DETERMINANŢI

Să considerăm că se dau mai multe numere $0, 1, 2, \ldots, n$. Dacă aşezăm aceste numere într-o anumită ordine, spunem că avem o permutare.

Dacă într-o permutare schimbăm un număr mai mic la dreapta unui număr mai mare spunem că în permutare am efectuat o inversiune. O permutare care are un număr par de inversiuni se numeşte permutare *pară*, iar dacă permutarea are un număr impar de inversiuni se numeşte permutare *impară*.

Un determinant de ordinul n este un tablou pătratic cu n elemente de forma:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

a cărui valoare este egală cu

$$\sum (-1)^I a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$$

suma fiind extinsă la toate permutările $(i_1, \ldots, i_n)$, unde $i_1, \ldots, i_n$ sînt numerele $1, \ldots, n$, iar I reprezintă numărul de inversiuni ale permutării $i_1, \ldots, i_n$.

19.3.1. DETERMINANT ASOCIAT UNEI MATRICE PĂTRATE

Fiecărei matrici pătrate de ordinul n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i se asociază determinantul său:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dacă în acest determinant suprimăm linia şi coloana care trec prin elementul a_{ij} obţinem un determinant de ordinul $(n-1)$ numit minorul elementului a_{ij}, pe care-l vom nota D_{ij}.

Numărul $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ se numeşte complementul algebric al elementului a_{ij}.

Dacă facem suma algebrică a produselor dintre elementele unei linii oarecare sau ale unei coloane oarecare a determinantului şi complementele algebrice respective, se obţine acelaşi număr, valoarea determinantului $|A|$.

$|A| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in}$, pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$.

În mod analog se poate dezvolta determinantul după elementele coloanei j şi obţinem:

$|A| = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} A_{nj}$, pentru orice

$j = 1, 2, \ldots, n$.

19.3.2. REGULA LUI SARRUS

Pentru calcularea valorii unui determinant de ordinul al treilea există o regulă de calcul, numită regula lui Sarrus. Să considerăm determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Dacă dezvoltăm acest determinant după elementele primei linii, obţinem dezvoltarea:

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Se poate uşor verifica faptul că se poate ajunge la acest rezultat, adăugînd primele două linii şi efectuînd produsele indicate de săgeţi în schema pe care o redăm mai jos:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Exemplu

Să se calculeze valoarea determinantului:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Folosind procedeul stabilit anterior, vom adăuga primele două linii şi vom obţine:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 + 16 + 6 + 4 - 4 - 18 = 1.$$

Dacă calculăm valoarea acestui determinant după elementele primei linii vom avea:

$$D = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D = (-3 - 4) - 3(6 - 2) + 4(4 + 1) = -7 - 12 + 20 = 1$$

19.3.3. PROPRIETĂŢILE DETERMINANŢILOR

Deoarece pentru determinanţii de ordin mai mare ca 3 nu există o regulă mecanică pentru calcularea valorii determinantului, se folosesc unele proprietăţi pe care le vom enunţa fără demonstraţie.

Proprietatea I

Dacă într-un determinant schimbăm liniile cu coloanele, obţinem un determinant transpus. Prin transpunere, determinantul nu-şi schimbă valoarea.

Exemplu

Fie determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Transpusul acestui determinant este:

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Se observă că dezvoltînd primul determinant după elementele liniei 1 se obţine valoarea celui de al doilea determinant după elementele primei coloane:

$$D = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D' = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Rezultă că $D = D'$.

Proprietatea II

Dacă elementele unei linii sau ale unei coloane a determinantului se înmulţesc cu un scalar k atunci determinantul se înmulţeşte cu acelaşi scalar.

Vom exemplifica această proprietate pe cazul unui determinant de ordinul al treilea.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Să înmulţim elementele primei linii cu k şi să dezvoltăm determinantul după elementele primei linii:

$$D' = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}A_{11} + ka_{12}A_{12} + ka_{13}A_{13} =$$

$$= k(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) = k \cdot D.$$

Proprietatea III

Schimbînd două linii sau două coloane între ele, determinantul îşi schimbă semnul.

Proprietatea IV

Dacă elementele unei linii sau ale unei coloane sînt sume de p termeni, atunci determinantul se descompune într-o sumă de p determinanţi.

De exemplu, dacă avem determinantul :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + \alpha_1 & a_{22} + \alpha_2 \end{vmatrix}$$

în care elementele liniei a doua sînt sume de cîte doi termeni putem scrie :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

Proprietatea V

Dacă elementele unei linii (sau unei coloane) sînt combinaţii liniare ale elementelor celorlalte linii (sau coloane) valoarea determinantului este egală cu zero. Pentru demonstrarea acestei proprietăţi se aplică proprietatea IV.

Proprietatea VI

Suma produselor dintre elementele unei linii sau coloane şi complementele algebrice respective ale altei linii sau coloane este egală cu zero.

Prin definiţie o matrice pătrată este nedegenerată dacă determinantul său $|A|$ este diferit de zero.

19.4. MATRICEA INVERSĂ

Să considerăm o matrice pătratică

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matricea asociată lui A este matricea :

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \ldots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \ldots A_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} \ldots A_{nn} \end{pmatrix}$$

unde A_{ij} este complementul algebric al elementului a_{ij}.

Matricea inversă a matricei pătratice A, de ordinul n, este o nouă matrice, pe care o notăm prin A^{-1} şi care satisface relaţiile :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

unde E este matricea unitate de ordinul n.

Deoarece determinantul produsului a două matrice pătratice este egal cu produsul determinanţilor celor două matrice vom avea :

$$|AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$$

Dacă $|A| = 0$, adică matricea A este degenerată, atunci ea nu admite o inversă.

Pentru calculul matricei inverse procedăm astfel.

1) Calculăm transpusa A' a matricei A

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & & & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

2) Calculăm asociata transpusei A', adică matricea formată din complementele algebrice ale matricei A'.

$$\bar{A}' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & \dots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

3) Pentru a obţine matricea inversă se împart elementele lui $\bar{A}'$ cu valoarea determinantului A.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & & & \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

19.5. RANGUL UNEI MATRICE

Prin definiţie numărul maxim de vectori coloană, liniar independenţi, se numeşte rangul matricei A şi se notează prin rang A.

Într-o matrice de dimensiune $(m \times n)$ cu $m < n$ putem suprima anumite linii sau coloane formînd mai mulţi determinanţi. Determinanţii care se pot forma într-o matrice de dimensiunea $(m \times n)$, cu $m < n$, se numesc minori. Ordinul maxim al minorilor diferiţi de zero ai matricei A este egal cu rangul matricei.

19.6. EXERCIŢII REZOLVATE

1. Să considerăm mulţimea S a matricelor de forma $E = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, unde $a,\ b \in R$.

Să se arate că această mulţime formează un spaţiu vectorial izomorf cu C (spaţiul vectorial al numerelor complexe)

Soluţie

Dacă $E_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$ sînt două matrici ce aparţin lui S, atunci:

$$E_1 + E_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 + b_2) \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda E_1 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & -\lambda b_1 \\ \lambda b_1 & \lambda a_1 \end{pmatrix}$$

sînt de asemenea matrici ce aparţin lui S deoarece sînt de forma $E = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Se mai constată că matricea nulă şi matricea opusă sînt de aceeaşi formă şi prin urmare ele aparţin mulţimii S. Prin urmare $(S, +)$ formează un grup şi înmulţirea cu scalari se bucură de următoarele proprietăţi:

$$\lambda(\beta E) = (\lambda\beta)E,$$

$$(\lambda + \beta)E = \lambda E + \beta E,$$

$$1.\ E = E$$

Mulţimea S a matricilor de forma $E = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ formează un spaţiu vectorial.

19.7. IZOMORFISMUL SPAŢIULUI VECTORIAL S CU SPAŢIUL VECTORIAL AL NUMERELOR COMPLEXE DE FORMA a + bi

Să definim o funcţie $f: C \to S$ prin:

$$f(a + bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Avem:

$$\lambda(a + bi) = \lambda a + \lambda bi \Rightarrow \lambda \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & -\lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{pmatrix}.$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a + c & -b - d \\ b + d & a + c \end{pmatrix}$$

Prin urmare:

$f[\lambda(a + bi)] = \lambda f(a + bi)$,

$f[(a + bi) + (c + di)] = f(a + bi) + f(c + di)$.

Observaţie 1

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = ae_1 + be_2$$

unde: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sînt vectori liniari independenţi în spaţiul E. S este prin urmare un spaţiu vectorial care are baza 2, deoarece orice matrice E se poate exprima ca o combinaţie liniară a două elemente liniar independente ale spaţiului S.

$$E = ae_1 + be_2.$$

Observăm că $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este un element neutru şi avem:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ corespunde numărului complex : $1 + 0 \cdot i = 1$,
iar $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ corespunde numărului complex $0 + i = i$.
Se știe că $i^2 = -1$ și prin urmare constatăm din relația (1) că înmulțirea matricilor verifică aceeași tablă de înmulțire ca cea a numerelor complexe.
Mulțimea E este un corp izomorf cu mulțimea numerelor complexe.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow i, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow i^2 = -1.$$

19.8. TRANSFORMĂRI LINIARE

În spațiul R^2 se consideră vectorul $\vec{v} = (x_1, x_2)$ și o transformare liniară. Să notăm cu $\vec{v}_1 = (x_1', x_2')$ vectorul obținut prin această transformare.

Avem :

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Ecuațiile transformării pot fi scrise sub formă matricială astfel :

$$\vec{v}_1 = A\,\vec{v} \qquad (2),$$

unde $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Transformarea dată prin ecuațiile (1) este liniară.
Matricea A se numește matricea transformării :

1) $$A(\lambda x) = \lambda A(x). \qquad (1)$$

Să notăm prin $\vec{V}'' = (x_1'', x_2'')$ vectorul obținut prin transformarea de matrice A a vectorului $\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} x_1'' &= a_{11}(\lambda x_1) + a_{12}(\lambda x_2) = \lambda a_{11}x_1 + \lambda a_{12}x_2. \\ x_2'' &= a_{21}(\lambda x_1) + a_{22}(\lambda x_2) = \lambda a_{12}x_1 + \lambda a_{22}x_2, \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\text{sau}: \quad x_1'' = \lambda(a_{11}x_1 + \lambda a_{12}x_2) = \lambda x_1'$$
$$x_2'' = \lambda(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = \lambda x_2'. \tag{3}$$

Relațiile (2), (3) pot fi scrise sub formă matricială :

$$\vec{v}'' = A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x}.$$

2) $A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$.

Să notăm : $\vec{x}_1 = A\vec{x}$, $\vec{y}_1 = A\vec{y}$,

$$\text{și avem}: \; A(\vec{x}+\vec{y}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + a_{12}(x_2 + y_2) \\ a_{21}(x_1 + y_1) + a_{22}(x_2 + y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{pmatrix} = A\vec{x} + A\vec{y}. \tag{4}$$

Prin urmare transformarea dată de ecuațiile (1) este lineară. Vom folosi proprietățile (1) și (2) pentru a găsi o relație între două baze ale spațiului vectorial R^2.

19.9. TRANSFORMAREA BAZELOR

Să considerăm în spațiul R^2 o bază $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Avem : $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$.

Ținînd seama de proprietățile (1) și (2) avem :

$$\vec{x}' = A\vec{x} = A(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = A(x_1\vec{e}_1) + A(x_2\vec{e}_2) =$$

$$= x_1(A\vec{e}_1) + x_2(A\vec{e}_2) = x_1\vec{e}_1' + x_2\vec{e}_2'.$$

Să notăm cu x_1' și x_2' coordonatele vectorului $\vec{x}'$ în baza $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Avem :

$$\vec{x}' = x_1'\vec{e}_1 + \vec{x}_2'\vec{e}_2 = x_1\vec{e}_1' + x_2\vec{e}_2'. \qquad (5)$$

Prin urmare fiind dată o transformare lineară :

$\vec{x}' = A\vec{x}$ şi o bază $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, transformarea definită prin formulele (4), matricea A a transformării lineare (4) şi matricea A^* formată cu ajutorul componentelor vectorilor $A\vec{e}_1$ şi $A\vec{e}_2$ în raport cu baza $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ se deduc una din alta printr-o transpoziţie.

$$\vec{x}' = A\vec{x},\ \vec{e}_1' = A^*\vec{e}_1, \vec{e}_2' = A^*\vec{e}_2.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Exemplu

Să considerăm vectorul $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ şi baza formată din vectori $\vec{i}\,(1, 0)$, $\vec{j}\,(0, 1)$. Să considerăm o transformare lineară dată prin matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Să se afle transformatul vectorului $\vec{x}$ şi transformatele vectorilor de bază $\vec{i}\,(1, 0)$, $\vec{j}\,(0, 1)$.

Soluţie : $\vec{x} = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, sau : $x_1' = 5$, $x_2' = 5$.

$$\vec{i}' = A \cdot \vec{i} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{j}' = A \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

19.10. PRODUSUL A DOUĂ TRANSFORMĂRI LINIARE

Fie două matrici :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Să considerăm o bază arbitrară $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Cu ajutorul transformărilor lineare definite de matricile A şi B vom defini o nouă transformare lineară.

Să notăm $\vec{y} = B\vec{x} = (y_1, y_2)$. Transformarea A va schimba vectorul obţinut în vectorul $\vec{x}' = A\vec{y} = (x'_1, x'_2)$.
Prin urmare se stabileşte o legătură între coordonatele vectorului $\vec{x}$ şi vectorului $\vec{x}'$ prin relaţia $\vec{x}' = A(B\vec{x})$.

Deci $\vec{y} = B\vec{x}$,

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2. \end{cases} \tag{1}$$

Cum însă $\vec{x}' = A\vec{y}$, avem:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ x'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{cases} \tag{2}$$

Substituind valorile lui y_1 şi y_2 din (1) în (2), obţinem:

$$x'_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})x_2$$

$$x'_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x_1 + (a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22})x_2.$$

Aceste formule definesc o nouă transformare: $\vec{x}' = (AB)\,\vec{x}$.

Exemplu

Să considerăm transformarea dată de relaţia:

$$\begin{cases} y_1 = x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha \\ y_2 = x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha. \end{cases} \tag{1}$$

Matricea acestei transformări este:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Fie acum transformarea:

$$\begin{cases} x'_1 = y_1\cos\beta - y_2\sin\beta \\ x'_2 = y_1\sin\beta + y_2\cos\beta. \end{cases} \tag{2}$$

Matricea acestei transformări este :

$$B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Avem : $\vec{x}' = (AB)\vec{x}$.

Aplicînd regulile de înmulţire a matricilor obţinem :

$$AB = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix},$$

de unde rezultă :

$$AB = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1\cos(\alpha+\beta) - x_2\sin(\alpha+\beta) \\ x_2' = x_2\sin(\alpha+\beta) + x_2\cos(\alpha+\beta) \end{cases} \qquad (3)$$

Transformările (1), (2) şi (3) sînt rotaţii de unghiuri α, β şi $(\alpha+\beta)$. Produsul a două rotaţii este o rotaţie.

19.11. EXERCIŢII

Matrici

1. Să se rezolve ecuaţiile matriciale :

a) $\begin{pmatrix} x+3 \\ 4+y \\ z+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x-2y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x^2 & y \\ x & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Se dau matricile :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze matricile:

$$A + B,\ A - B,\ (A + B) + C,\ A + (B + C),\ (A - B) + C.$$

3. Să se determine matricile X din egalitățile:

a) $X + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $X + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

4. Să se rezolve ecuațiile matriciale următoare:

$$\frac{1}{2}(X + A) = 3(X + (2X + B)) + C$$

$$2(X + B) = 3\left(X + \frac{1}{2}(X + A)\right) + C$$

5. Se dau matricile: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze: $A \cdot B$, $A \cdot (A + B)$, $B \cdot A$, $(B \cdot A) \cdot B$.

6. Se dau matricile: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Să se arate că: $(A + B)(A + B) \neq A^2 + 2AB + B^2$

$$(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2.$$

7. Se dă matricea:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^3 = E$.

8. Să se arate că matricea:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ este soluția ecuației: $A^2 - 5A + 7E = 0$.

9. Să se arate că dacă $a^2 + bc = 0$, atunci:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = 0$$

10. Se dă matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Să se verifice egalitatea: $A^2 - 2A + E = 0$.

11. Se dă matricea:

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze B^2 şi B^3, dacă $\theta = 120°$.

12. Să se arate că matricea:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

verifică relaţia $A^2 - (a + d) A + ad - bc = 0$.

13. Să se calculeze produsul matricilor:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

14. Să se calculeze expresiile:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$; b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$; c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$;

d) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

15. Să se rezolve ecuaţiile matriciale:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; b) $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

33—c. 1782

16. Să se arate că transpusele matricilor A şi B, notate A' şi B', satisfac următoarele proprietăţi :

$$(A+B)' = B'+A'$$
$$(A\,B)' = B'\,A'$$
$$(A^{-1})' = (A')^{-1}$$

17. Să se găsească matricea inversă a matricilor :

a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

18. Să se demonstreze că dacă $AB = BA$, atunci :

$(A+B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2$,

$(A^2 - B^2) = (A+B)\,(A-B)$

$(A+B)^n = A^n + \dfrac{n}{1} A^{n-1}\,\mathrm{B} + \dots + B^n$.

19. Să se calculeze $AB - BA$, dacă :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

20. Să se calculeze $f(A)$:

a) $f(A) = A^2 - \mathrm{A} - 1,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $f(A) = A^2 - 5A + 3,\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

21. Să se demonstreze că dacă : $AB = BA$, atunci $A^{-1}B = BA^{-1}$.

22. Să se afle rangul matricilor :

a) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Determinanţi

23. Să se afle valoarea determinanţilor :

a) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \log_b N & \log_a N \\ 1 & \log_a b \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 \\ y^2 & (y+1)^2 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} \log_x 8^a & \log_x 4^a \\ \log_4 x^a & \log_4 x^a \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & a^2 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} \sin\alpha + \sin\beta & \cos\beta + \cos\alpha \\ \cos\beta - \cos\alpha & \sin\alpha - \sin\beta \end{vmatrix}$

24. Să se calculeze valoarea determinanţilor următori :

a) $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2 & a-bi \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$

25. Să se calculeze valoarea următorilor determinanţi :

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

26. Să se stabilească în ce condiţii are loc egalitatea :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}$$

27. Să se aplice proprietăţile determinanţilor şi apoi să se calculeze :

a) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x & x' & ax + bx' \\ y & y' & ay + by' \\ z & z' & az + bz' \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a + b & c & 1 \\ b + c & a & 1 \\ c + a & b & 1 \end{vmatrix}$

28. Să se aplice proprietăţile determinanţilor şi apoi să se calculeze :

$$\begin{vmatrix} (a_1 + b_1)^2 & a_1^2 + b_1^2 & a_1b_1 \\ (a_2 + b_2)^2 & a_2^2 + b_2^2 & a_2b_2 \\ (a_3 + b_3)^2 & a_3^2 + b_3^2 & a_3b_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$$

29. Să se demonstreze următoarele egalităţi :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & cb \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b).$$

30. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a + b + c)(b - a)(c - a)(c - b)$

31. Să se demonstreze egalitățile :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \gamma \end{vmatrix} = \alpha(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)(\delta-\gamma).$$

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^2$$

$$\begin{vmatrix} \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix} =$$

$$= 2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a).$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 \\ b & b^2 & b^3 & b^4 \\ c & c^2 & c^3 & c^4 \\ d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix} = abcd\,(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

32. Să se arate că matricile :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, -K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

formează un grup față de operația de înmulțire.

33. Să se arate că matricile de forma:

$$M = \begin{bmatrix} t & s \\ s & t \end{bmatrix}, t \in R,\ s \in R,\ t^2 \cdot s^2 = 1$$ formează un grup față de operația de înmulțire.

34. Se dă matricea: $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Să se arate că mulțimea $\{A, A^2, A^3\}$ formează grup față de operația de înmulțire a matricelor.

35. Se dau matricile:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Să se arate că mulțimea formată de matricile:

$$\{T \cdot I \cdot T^{-1},\ T(-I) \cdot T^{-1},\ T\ KT^{-1},\ T(-K)\ \ T^{-1}\}$$

formează grup față de operația de înmulțire a matricilor.

36. Se dau matricile:

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Să se arate că toate matricile de forma: $xI + yK$ formează grup față de operația de înmulțire dacă $x^2 - y^2 \neq 0$.

Indicație. Matricea $xI + yK$ are forma:

$\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$ și problema se rezolvă ca la exercițiul 33.

37. Să se arate că dacă a, b, c, d sînt numere reale, mulțimea

matricelor de forma: $\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}$ constituie un inel fără divizori ai lui zero.

38. Se consideră transformarea lineară:

$$\begin{cases} x_1' = 3\,x_1 + 2\,x_2 \\ x_2' = x_1 \quad + x_2. \end{cases}$$

Să se afle transformatele bazelor $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$.

39. Se consideră două transformări lineare date prin matricile:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Să se afle produsul acelor două transformări.

b) Să se afle transformatele coordonatelor vectorilor bazei $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$.

c) Să se verifice formula: $(AB)' = B'A'$.

40. Să considerăm o omotetie de centru O şi de raport K. Coordonatele unui punct $M(x', y')$ se transformă după relaţiile următoare:

$$x_1' = Kx_1,\ x_2' = K\,x_2$$

a) Să se scrie matricea transformării. Să se arate apoi că produsul a două omotetii de acelaşi centru O şi de raport K_1 şi K_2 este o omoteţie de acelaşi centru şi de raport $K_1\,K_2$.

41. Se consideră o transformare dată de matricea:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că această transformare este o simetrie în raport cu axa Oy.

42. Se consideră transformările date de matricile:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Să se determine transformarea produs;

b) Să se arate, folosind rezultatele de la punctul (*a*), că produsul a două simetrii este o rotaţie de unghiul $\alpha = 180°$.

43. Se consideră matricea:

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Să se calculeze: $A^2, A^3 \ldots, A^n, n \in N$.

44. Se consideră matricea:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

a) Să se calculeze X^2, X^3, X^4;

b) Să se determine X^n.

45. Să considerăm matricea:

$$X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}, \quad x, y \in R.$$

Să se arate că X verifică relația:

$$X^2 - 2xX + x^2 \cdot I_2 = O_2.$$

I_2 și O_2 sînt matricile unitate și nulă de ordinul al doilea. Să se arate apoi că avem relația:

$$nX^{n+1} - (n+1)x \cdot X^n + x^{n+1} I_2 = O_2.$$

46. Să se determine matricea A, cunoscînd că:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

47. Se dau matricile:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & a+b \end{pmatrix}.$$

Să se rezolve ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a+b \end{pmatrix}, a, b \in R$.

48. Se consideră aplicația $R \to M$ dată prin egalitatea $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$, cu $x \in R$, unde M este mulțimea matricilor de forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \text{ cu } a \in R.$$

Să se arate că această aplicație este bijectivă.

Capitolul 20

CALCUL INFORMAȚIONAL

20.1. ENERGIA INFORMAȚIONALĂ. FORMULA ONICESCU

Să presupunem că efectuăm un anumit experiment al cărui rezultat nu este dinainte cunoscut. Rezultatele acestui experiment le vom numi evenimente și le vom nota cu $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Probabilitățile de realizare ale acestor evenimente le vom nota cu $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Să presupunem că sistemul de evenimente $A_1, \ldots, A_n$ este un sistem complet de evenimente, ceea ce înseamnă că dacă efectuăm experimentul nostru, unul din evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se produce cu certitudine.

Dacă notăm cu E evenimentul sigur, atunci avem:

$$E = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n,$$

$$p(E) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n) = 1 \tag{1}$$

Prin urmare:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \quad p_i \geqslant 0, \quad i = 1,2, \ldots, n$$

Experimentul nostru, pe care-l notăm cu A, pune în evidență un cîmp de probabilități și prin urmare o repartiție pe care o notăm:

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{2}$$

De aceea în cele ce urmează, cînd vom spune experiment, ne vom referi la un anumit cîmp de probabilitate.

Definiția 20.1 Se numește energie informațională a experimentului α și se notează $E(\alpha)$ expresia:

$$E(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2. \tag{3}$$

Exemple:

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$$

Avem: $E(\alpha) = \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{4}{10}\right)^2 + \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{3}{10}$

Definiția 20.2 Se numește sinergia informațională a unui sistem de evenimente expresia:

$s = -\log_2 E$, unde E este energia informațională a sistemului.

20.2. ENERGIA INFORMAȚIONALĂ A PRODUSULUI A DOUĂ EXPERIMENTE INDEPENDENTE

Să considerăm două experimente A și B date prin repartițiile de probabilitate:

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_m \\ q_1 & \dots & q_m \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} q_i = 1.$$

Să presupunem că evenimentele $A_1, \dots, A_n$ și $B_1, \dots, B_m$ sînt independente. Evenimentul care constă din realizarea concomitentă a evenimentelor A_k și B_h îl putem nota cu $(A_k \cap B_h)$. Să notăm cu π_{kh} probabilitatea de producere a evenimentului A_kB_h. Deoarece evenimentele A_k și B_h sînt independente avem:

$$\pi_{kh} = p(A_k \cap B_h) = p(A_k) \cdot p(B_h) \tag{4}$$

sau

$$\pi_{kh} = p_k q_h, \quad k = 1, \dots, n; \quad h = 1, \dots, m \tag{5}$$

Avem :

$$\sum_{kh} \pi_{kh} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} p_k q_h = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)\left(\sum_{h=1}^{m} q_h\right) = 1$$

Definiția 20.3. Se numește energie informațională a produsului a două experimente A și B expresia :

$$E(\alpha \times \beta) = \sum_{k}^{n} \sum_{h}^{m} \pi_{kh}^2$$

Proprietate

Energia informațională a produsului a două experimente independente este egală cu produsul energiilor.

Demonstrație

Aplicînd formula (5) obținem :

$$E(\alpha \times \beta) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} \pi_{kh}^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} p_k^2 \, q_h^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} p_k^2\right)\left(\sum_{h=1}^{m} q_h^2\right) = E(\alpha) \cdot E(\beta)$$

20.3. ENERGIA INFORMAȚIONALĂ CONDIȚIONATĂ

Fie două experimente α și β care nu mai sînt independente. Să presupunem că experimentul α pune în evidență schema :

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \dots A_n \\ p_1 & p_2 \dots p_n \end{pmatrix}$$

Experimentul β este condiționat de rezultatele experimentului α. Dacă în experimentul α s-a produs evenimentul A_k, atunci evenimentele experimentului β vor fi condiționate de producerea evenimentului A_k. Probabilitățile evenimentelor din experimentul β sînt condiționate de evenimentul A_k. Producerea evenimentului A_k în experimentul α pune în evidență, în experimentul β, următoarea schemă :

$$\beta / A_k = \begin{pmatrix} B_1/A_k & B_2/A_k & \dots & B_m/A_k \\ q_{k1} & q_{k2} & \dots & q_{km} \end{pmatrix},$$

unde prin q_{km} am notat probabilitatea ca în experimentul β să se producă evenimentul B_m cu condiţia ca în experimentul α să se fi produs evenimentul A_k. Avem evident relaţiile :

$$q_{kl} = p(B_l/A_k), \sum_{l=1}^{m} q_{kl} = 1, \qquad q_{kl} \geqslant 0;$$

$$1 \leqslant k \leqslant n, \quad 1 \leqslant l \leqslant m.$$

Dacă considerăm evenimentul produs $\alpha \times \beta$ atunci probabilitatea $\pi_{kl}, 1 \leqslant k \leqslant n, \ 1 \leqslant l \leqslant m$, a evenimentului $A_k \cap B_l$, $1 \leqslant l \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant n$, se va scrie :

$$\pi_{kl} = p(A_k \cap B_l) = p(A_k)\cdot p(B_l/A_k); \ 1 \leqslant k \leqslant n, \quad 1 \leqslant l \leqslant m.$$

Prin urmare, obţinem relaţia :

$$\pi_{kl} = p_k \cdot q_{kl}.$$

Definiţia 20.4. Se numeşte energie informaţională a experimentului β, condiţionată de realizarea evenimentului A_k în experimentul α, expresia :

$$E(\beta/A_k) = \sum_{l=1}^{m} q_{kl}^2$$

Definiţia 20.5. Se numeşte energie informaţională a experimentului β, condiţionată de experimentul α, expresia :

$$E(\beta/\alpha) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, E(\beta/A_i)$$

Proprietate : $E(\alpha \times \beta) \leqslant E(\beta/\alpha)$.
Demonstraţie : Din definiţiile anterioare avem :

$$E(\beta/A_i) \geqslant 0, \quad p_i \leqslant 1, \ p_i - 1 \leqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

$$E(\alpha \times \beta) - E\ (\beta/\alpha) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \, E(\beta/A_i) - \sum_{i=1}^{n} p_i \ E(\beta/A_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \ E(\beta/A_i)\,(p_i - 1) \leqslant 0$$

Prin urmare avem : $E(\alpha \times \beta) \leqslant E(\beta/\alpha)$.

Exerciții rezolvate

1. Să se determine energia informațională a experimentului ce constă din aruncarea consecutivă a două zaruri.

Soluție

Să notăm cu α și β experimentele ce constau în aruncarea celor două zaruri.

Experimentelor α și β le corespund evenimentele

A_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, B_j $(j = 1,2, \ldots, 6)$ ce constau din apariția fețelor 1,2, ..., 6.

Avem :

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \ldots & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} B_1 & \ldots & B_6 \\ \frac{1}{6} & \ldots & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$E(\alpha) = E(\beta) = \frac{1}{6}$$

Deoarece experimentele α și β sînt independente,

$$E(\alpha \times \beta) = E(\alpha) \cdot E(\beta) = \frac{1}{36}$$

2. Să se afle energia informațională a experimentului ce constă din aruncarea consecutivă a m zaruri.

Soluție

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ experimentele ce constau din aruncarea consecutivă a zarurilor. Avem :

$$E(\alpha_1) = E(\alpha_2) = \ldots = E(\alpha_m) = \frac{1}{6}$$

$$E(\alpha_1 \times \alpha_2 \times \ldots \times \alpha_m) = E(\alpha_1) \cdot E(\alpha_2) \ldots E(\alpha_m) = \frac{1}{6^m}$$

3. O urnă conţine 5 bile albe şi 3 bile negre. Se extrag din urnă la început două bile şi apoi încă una. Se notează cu α, respectiv β, experimentele care corespund celor două extracţii succesive. Să se calculeze $E(\alpha)$ şi $E(\beta/\alpha)$.

Soluţie

a) Experimentul α se realizează în condiţiile schemei bilei nerevenite. Vom distinge trei evenimente elementare posibile: A_1, A_2, A_3 — după cum la extracţia celor două bile s-au obţinut 0, 1, 2 bile negre. Prin urmare, avem:

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{C_5^2}{C_8^2} & \frac{C_5^1\, C_3^1}{C_8^2} & \frac{C_3^2}{C_8^2} \end{pmatrix}$$

sau: $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{10}{28} & \frac{15}{28} & \frac{3}{28} \end{pmatrix}, p_1 = \frac{10}{28},\ p_2 = \frac{15}{28}, p_3 = \frac{2}{28}$

$$E(\alpha) = \left(\frac{10}{28}\right)^2 + \left(\frac{15}{28}\right)^2 + \left(\frac{3}{28}\right)^2 = \frac{234}{784}$$

b) În experimentul β vom distinge două evenimente elementare, B_1 şi B_2, corespunzătoare scoaterii unei bile albe sau a unei bile negre.

Experimentele α şi β sînt dependente, deoarece realizarea evenimentelor B_1 şi B_2 din experimentul β depinde de probabilităţile A_1, A_2, A_3 din experimentul α. Experimentului β îi corespund trei scheme de repartiţie, după cum în experimentul α s-a produs unul din evenimentele A_1, A_2, A_3.

Prin urmare avem:

$$E(\beta/A_1) = \frac{9}{36} + \frac{9}{36} = \frac{1}{6}$$

$$E(\beta/A_2) = \frac{16}{36} + \frac{4}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

$$E(\beta/A_3) = \frac{25}{36} + \frac{1}{36} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

$$E(\beta/\alpha) = \sum_{i=1}^{3} p_i \; E(\beta/A_i) = \frac{10}{28} \cdot \frac{1}{6} + \frac{15}{28} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{28} \cdot \frac{13}{18} =$$

$$= \frac{30 + 150 + 39}{18 \cdot 28} = \frac{219}{504}$$

4. În agricultură, un anumit dăunător apare cu frecvența de 4% (adică din 100 de plante, 4 sînt atacate de dăunători). Pentru depistarea lui se folosește un anumit preparat, care în prezența dăunătorului capătă o culoare roșie, iar în lipsa lui primește în $\frac{1}{8}$ din cazuri culoarea roșie și în $\frac{7}{8}$ din cazuri culoarea albastră.

Notînd cu α experimentul ce constă în determinarea dacă o plantă are sau nu dăunători și cu β rezultatul reacției, să se determine $E(\alpha)$ și $E(\alpha/\beta)$.

Soluție

Să notăm cu A_1 și A_2 evenimentele ce constau din lipsa, respectiv prezența, dăunătorului, cu B_1, B_2 evenimentele ce constau din rezultatul identificării (apariția nuanței roșii sau albastre):

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{96}{100} & \frac{4}{100} \end{pmatrix}$$

Să observăm că evenimentul B_1, preparatul capătă culoarea roșie, se produce într-un număr de cazuri aflat din relația:

$4 + \frac{1}{8}(100 - 4) = 16$ cazuri din 100 de preparate posibile.

Prin urmare, realizarea experimentului pune în evidență schema următoare:

$$\beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{16}{100} & \frac{84}{100} \end{pmatrix}$$

Probabilitățile experimentului α condiționat de β vor fi:

$$P_{B_1}(A_1) = \frac{12}{16},\; P_{B_1}(A_2) = \frac{4}{16},\; P_{B_2}(A_1) = 1,\; P_{B_2}(A_2) = 0.$$

Prin urmare, avem :

$$E(\alpha/B_1) = \frac{12^2}{16^2} + \frac{4^2}{16^2} = \frac{160}{256} = \frac{5}{8},$$

$$E(\alpha/B_2) = 1,$$

$$E(\alpha/\beta) = \frac{96}{100} \cdot \frac{5}{8} + \frac{4}{100} = \frac{19}{25} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{25} = \frac{1}{25 \cdot 8} = \frac{12}{15}$$

5. Se consideră experimentul (α) caracterizat prin următoarea schemă :

$$\alpha \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ x & x+y & y \end{pmatrix}$$

Să se determine parametrii x şi y cunoscînd că energia informaţională a experimentului α este $E(\alpha) = \frac{3}{8}$.

Soluţie

Pentru $(x, y) \in R^2$ avem :

$$\begin{cases} x + x+y + y = 1 \\ x^2+(x+y)^2+y^2 = \frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{1}{2} \\ x^2+y^2+xy = \frac{3}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2xy = \frac{1}{4} \\ x^2+y^2+xy = \frac{3}{16} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{1}{2} \\ xy = \frac{1}{16} \end{cases}, \quad t^2 - \frac{1}{2}\, t + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow 16\, t^2 - 8t + 1 = 0$$

$$t_1 = t_2 = \frac{1}{4}$$

Prin urmare, avem :

$$x = y = \frac{1}{4}.$$

20.4. ENTROPIE. FORMULA LUI SHANNON. PROPRIETĂŢI

Să considerăm un experiment (α) căruia îi corespunde schema:

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 \dots A_n \\ p_1 \dots p_n \end{pmatrix}, \text{ unde } A_i \cap A_j = \emptyset;$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Evenimentele $A_1, \dots, A_n$ se numesc elementare, iar E se numeşte eveniment sigur.

Definiţie. Se numeşte entropia H a experimentului (α) expresia:

$$H = -\sum p_i \log_2 p_i$$

Exemplu: Două urne conţin, fiecare, 20 bile. Prima urnă conţine 10 bile albe, 5 negre şi 5 albastre. Cea de a doua urnă conţine 8 bile albe, 8 negre şi 4 roşii. Se extrage la întîmplare o bilă din fiecare urnă. Care este experienţa care conţine cea mai mică incertitudine.

Soluţie Să calculăm entropia H_1 a primei experienţe:

$$H_1 = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} \cong 1{,}50 \text{ biţi.}$$

Entropia H_2 a celei de a doua experienţe:

$$H_2 = \frac{2}{5}\log_2\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\log_2\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\log_2\frac{1}{5} \cong 1{,}528 \text{ biţi}$$

Experienţa care prezintă cea mai mică incertitudine este prima.

20.5. ENTROPIA PRODUSULUI A DOUĂ EXPERIMENTE INDEPENDENTE

Să considerăm două experimente independente α şi β.

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_m \\ q_1 & \dots & q_m \end{pmatrix}$$

Să notăm cu $A_k \cap B_l$ evenimentul ce constă din realizarea concomitentă a evenimentelor A_k şi B_l.

Conform cu regula stabilită anterior avem:

$$\pi_{kl} = p(A_k \cap B_l) = p(A_k) \cdot p(B_l) = p_k \cdot q_l$$

Să considerăm experimentul produs $\alpha \times \beta$, care reprezintă experimentul ce constă din realizarea concomitentă a experimentelor α şi β, şi care are $m \cdot n$ evenimente $A_k \cap B_l$ cu probabilităţile π_{kl}, $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant l \leqslant m$.

Nedeterminarea experimentului produs $\alpha \times \beta$ o vom nota $H(\alpha \times \beta)$ şi vom avea:

$$H(\alpha \times \beta) = \sum \sum \pi_{kl} \cdot \log \pi_{kl} = \sum \sum p_k \cdot q_l \cdot \log (p_k \cdot q_l) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} p_k q_l (\log p_k + \log q_l) =$$

$$= (\sum p_k \log p_k) + \left(\sum_{l=1}^{n} q_l \log q_l \right) = H(\alpha) + H(\beta).$$

20.6. ENTROPIA EXPERIMENTULUI α CONDIŢIONAT DE EXPERIMENTUL β

Dacă experimentul β este condiţionat de experimentul α, pentru experimentul β fiecare realizare a unui eveniment al experimentului α pune în evidenţă în β o repartiţie de probabilităţi şi prin urmare o nedeterminare.

De exemplu, dacă în experimentul α s-a produs evenimentul A_k, atunci acesta pune în evidenţă în β schema:

$$(\beta / A_k) = \begin{pmatrix} B_1/A_k & \dots & B_m/A_k \\ q_{1k} & \dots & q_{mk} \end{pmatrix},$$

a cărei nedeterminare este:

$$H_k(\beta) = \sum_{l=1}^{m} q_{lk} \log q_{lk}$$

Fiecărui eveniment A_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, îi corespunde o nedeterminare $H_k(\beta)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Putem considera repartiţia :

$$\begin{pmatrix} H_1(\beta) & H_2(\beta) & \ldots & H_n(\beta) \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$$

Nedeterminarea experimentului β condiţionată de întregul experiment α va fi :

$$H_\alpha\ (\beta) = \sum_{k=1}^{n} p_k\ H_k(\beta).$$

Exemplul 1

Să considerăm experimentul (α) ce constă din extragerea unei bile dintr-o urnă ce conţine 3 bile albe şi 2 bile negre. Schema acestui experiment este :

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$ A_1 — extragerea bilei albe ; A_2 — extragerea bilei negre.

Fie acum experimentul (β) ce constă în aruncarea unei monede. Schema acestui experiment este :

$$(\beta) = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Experimentul produs $\alpha \times \beta$ este experimentul ce constă din extragerea unei bile şi aruncarea unui zar căruia îi corespunde schema :

$$(\alpha \times \beta) = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_2B_1 & A_2B_2 \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$$

Entropia experimentului (α) este :

$$H(\alpha) = -\frac{3}{5}\log_2\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\log_2\frac{2}{5} = -\frac{3}{5}(\log_2 3 - \log_2 5) -$$

$$-\frac{2}{5}(\log_2 2 - \log_2 5) = \log_2 5 - \frac{3}{5}\log_2 3 - \frac{2}{5}.$$

Entropia experimentului β este : $H(\beta) = 1$

Entropia experimentului produs $(\alpha \times \beta)$ este :

$$H(\alpha \times \beta) = -\frac{6}{10}\log_2\frac{3}{10} - \frac{4}{10}\log_2\frac{2}{10} = -\frac{3}{5}\log_2\frac{3}{10} -$$

$$-\frac{2}{5}\log_2\frac{2}{10} = -\frac{3}{5}\log_2 3 + \frac{3}{5}\log_2 2 + \frac{3}{5}\log_2 5 -$$

$$-\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\log_2 5 + \frac{2}{5} = \log_2 5 - \frac{3}{5}\log_2 3 + \frac{3}{5}.$$

Se verifică imediat relația

$$H(\alpha) \cdot H(\beta) = H(\alpha \times \beta)$$

20.7. EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. O urnă conține 10 bile albe și 10 bile negre. Să considerăm experimentul (α) ce constă din extragerea la întîmplare a unei bile din urnă. Să se determine entropia experimentului (α).

2. O urnă conține 10 bile albe, 10 bile negre și 10 bile roșii. Se consideră experimentul ce constă din extragerea la întîmplare a unei bile din urnă. Să se calculeze entropia acestui experiment.

3. După un șir suficient de observații asupra timpului într-o anumită localitate s-a ajuns la concluzia că la data de 1 iulie probabilitatea de a avea precipitații este 0,35 și probabilitatea de a fi timp uscat este 0,65, iar la data de 15 octombrie probabilitatea de a avea precipitații este 0,8, iar probabilitatea de a avea timp uscat este 0,2. La care din aceste date nedeterminarea este mai mare?

4. O țintă este formată din 3 cercuri concentrice.
De la distanța de unde se trage, un trăgător nimerește în interiorul cercului mai mic cu probabilitatea 0,05, în coroana dintre cel mai mic cerc și al doilea cu probabilitatea 0,3, în ultima coroană cu probabilitatea 0,4 și în afara țintei cu probabilitatea 0,85. Care este entropia experimentului ce constă din tragerea a două gloanțe în țintă?

5. Se dă un experiment caracterizat prin schema :

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ x-y & y+z & x-z \end{pmatrix}$$

Să se determine parametrii reali x, y, z, astfel încît entropia experimentului să fie maximă.

$$R: x = \frac{1}{2}; z = \frac{1}{6}\ ; y = \frac{1}{6}$$

6. Se dă un experiment caracterizat prin schema:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ y+z & z+x & x+y \end{pmatrix}$$

Să se determine condiţia pe care trebuie să o satisfacă parametrii x, y, z astfel încît entropia experimentului să fie maximă.

7. Să se determine entropia experimentului căruia îi corespunde schema:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \frac{1}{4} & x & x & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ştiind că parametrul x este una din soluţiile ecuaţiei:

$$8x^3 - 25\,x^2 + 19\,x - 2 = 0.$$

8. Să se determine entropia experimentului căruia îi corespunde schema:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ \frac{3}{24} & x & y & z & \frac{10}{24} \end{pmatrix}$$

Ştiind că parametrii x, y, z satisfac sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 2x - y = \dfrac{5}{24} \\ \log x + 2\log y + \log\ 384 = 0 \end{cases}$$

9. Doi muncitori au produs un lot de piese; primul 60, din care 2 rebuturi, şi al doilea 72, din care 3 rebuturi. Din fiecare

lot se extrage, la întîmplare, cîte o piesă. Notînd cu α și β experimentul ce constă din extragerea unei piese din primul, respectiv al doilea lot, se cere $H(\alpha)$ și $H(\beta)$.

10. În două linii automatizate s-au produs, în ordine, un număr de 600 și respectiv 750 de piese. Notînd cu α și β experimentele ce constau din extragerea la întîmplare a cîte unei piese din producția primei și a celei de a doua linii, să se determine $H(\alpha)$ și $H(\beta)$ și $H(\alpha/\beta)$, dacă se știe că prima linie produce rebuturi în proporție de 5% și a doua în proporție de 5‰.

11. Să se determine entropia experimentului ce constă din aruncarea a 2 zaruri. Generalizare.

12. Trei vînători au văzut în același timp o vulpe și au tras simultan în ea. Notînd cu α, β și γ experimentele ce constau din tragerea unui singur foc de către primul, respectiv al doilea și al treilea vînător, să se calculeze $H(\alpha, \beta, \gamma)$ dacă se știe că, la distanța respectivă, oricare din cei trei vînători lovește mortal vulpea o dată la 3 focuri.

13. Dintr-un lot de 300 de cutii de mazăre, 100 de roșii și 100 cutii de ghiveci, s-a extras la întîmplare, pentru control, o cutie după care s-a mai scos încă o cutie (fără a se repune prima cutie la loc).

Notînd cu α experimentul ce constă din extracția primei cutii și cu β experimentul ce constă din extracția a încă unei cutii să se calculeze $H_\alpha(\beta)$.

14. Într-o cutie cu litere majuscule de rezervă, litera *A* apare de 6 ori, *B* de 4 ori și *C* de 8 ori.

Se extrag două litere oarecare (punîndu-se după fiecare extracție litera înapoi), după care se mai extrage încă o literă. Notînd cu α experimentul ce constă din extracția — în condițiile indicate — a două litere și cu β experimentul ce constă din extracția unei litere, să se calculeze :

$$H_\alpha(\beta) \text{ și } H_\beta(\alpha).$$

Indicație :

Din condițiile problemei rezultă că experimentele α și β sînt independente, deoarece după realizarea fiecărui experiment compoziția cutiei nu se mai modifică.

În aceste condiții :

$$H_\alpha(\beta) = H(\beta) \text{ și } H_\beta(\alpha) = H(\alpha)$$

15. Se dă un experiment caracterizat prin schema:

$$\alpha = \begin{pmatrix} A & B & C \\ y+z & z+x & x+y \end{pmatrix}$$

Să se determine parametrii reali x, y şi z, încît energia informaţională a acestui experiment să fie minimă.

16. Pe un segment OA de lungime l al axei numerice Ox se dau la întîmplare două puncte $B(x)$ şi $C(y)$. Să se găsească probabilitatea ca din cele trei segmente obţinute să se construiască un triunghi. (Problema triunghiului).

17. În interiorul unui cerc de rază R se alege la întîmplare un punct. Să se afle probabilitatea ca punctul ales la întîmplare să se găsească în interiorul:

a) pătratului înscris în cerc;

b) triunghiului echilateral;

c) hexagonului regulat înscris în cerc.

18. Un disc este împărţit într-un număr par de sectoare egale, vopsite alternativ alb şi negru. Discul se roteşte rapid şi se trage asupra lui cu o armă. Să se găsească probabilitatea ca glonţul să nimerească într-un sector alb.

19. Un plan este împărţit de mai multe drepte paralele care se găsesc la distanţa a una de cealaltă. Pe plan se aruncă la întîmplare o monedă cu raza $r < a$.

Să se găsească probabilitatea ca moneda să nu intersecteze nici una dintre drepte.

20. Se consideră familia tuturor coardelor dintr-un cerc de rază R. Care este probabilitatea ca luînd la întîmplare o coardă, ea să fie mai mică decît latura triunghiului echilateral înscris în acel cerc? (Problema lui Bertrand)

21. Se consideră mulţimea tuturor coardelor care trec printr-un punct fix A. Se cere probabilitatea ca, luînd la întîmplare o coardă din familie, aceasta să fie mai mică decît latura triunghiului echilateral înscris în cerc.

22. Se consideră triunghiul oarecare ABC, de laturi a, b şi c. Care este probabilitatea ca, luînd la întîmplare un punct de pe bisectoarea vîrfului A, distanţa de la acest punct la una din laturile AB

sau AC ale triunghiului să fie mai mică decît $\frac{S}{b+c}$ (S fiind aria triunghiului).

23. Într-un triunghi ABC se duce înălţimea AA'. Dintr-un punct oarecare al înălţimii se duce o paralelă la latura BC a triunghiului care taie laturile AC şi AB în punctele M şi N.

Se consideră mulţimea tuturor acestor paralele. Care este probabilitatea ca, luînd la întîmplare o paralelă, să avem relaţia: $NB + MC < MN$.

24. Într-un triunghi isoscel ABC ($AB = AC = a$; $BC = 2b$) se consideră mulţimea tuturor segmentelor de dreaptă de lungime $2l (l < b)$, paralele cu latura BC şi care au mijloacele situate pe înălţimea triunghiului. Care este probabilitatea ca, luînd la întîmplare un segment, acesta să intersecteze laturile triunghiului isoscel?

25. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ ($AD = b$; $AB = a$; $a > b$). Care este probabilitatea ca, luînd la întîmplare un punct M pe diagonala AC, distanţa de la acest punct D să fie mai mare decît b?

26. Să considerăm triunghiul dreptunghic ABC ($A = 90°$, $B = 30°$). Care este probabilitatea ca, luînd la întîmplare un punct M pe ipotenuza triunghiului, distanţa AM să fie mai mică decît jumătate din ipotenuză?

27. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC ($A = 90°$). Care este probabilitatea ca, luînd la întîmplare un punct D pe latura BC, diferenţa unghiurilor adiacente formate în punctul D de dreptele AD şi BC să fie mai mare decît $30°$?

Capitolul 21

ELEMENTE DE TEORIA JOCURILOR

21.1. GENERALITĂȚI. DEFINIȚII

Teoria jocurilor are ca obiect analiza matematică a situațiilor de conflict, situații în care se ciocnesc interesele unor părți ce urmăresc scopuri opuse. Aceste situații sînt în mod formal conflictuale, deoarece ele s-ar putea referi la cazuri care în vorbirea curentă sau în uzanța obișnuită nu le putem considera conflicte.

Astfel în jocul de șah, raportul dintre cei doi jucători nu este practic „conflictual" în sensul în care ne-am referi de exemplu la conflictul dintre doi concurenți. Cele două situații, jocul de șah și conflictul dintre doi concurenți, au anumite trăsături care pot fi exprimate matematic prin același model.

În general o situație de conflict apare atunci cînd din mai multe ipoteze ce se pot realiza cu anumite probabilități urmează să se facă o alegere după un anumit criteriu de eficiență.

O situație conflictuală luată din practică cuprinde un număr mult mai mare de factori care în cazul modelului matematic al teoriei jocurilor nu pot fi luați în considerare.

Conceptul matematic de joc cuprinde prin urmare un model simplificat. Jocul se deosebește de situația conflictuală reală prin faptul că se desfășoară după reguli bine stabilite. Pentru înțelegerea teoriei jocurilor este necesar să precizăm cîteva din elementele conceptului matematic de joc. Persoanele care participă la un joc cu interese opuse se numesc jucători sau parteneri.

În raport cu numărul jucătorilor care participă la un joc, jocurile se împart în jocuri cu doi parteneri sau cu mai mulți parteneri.

Realizarea unui joc se numește o partidă. Acțiunile simple întreprinse de jucători în cadrul unei partide poartă denumirea de mutări. Prin joc vom înțelege un șir de mutări ale jucătorilor. Partida se încheie cu cîștigul unuia dintre jucători.

Jocurile cu mutări aleatoare sînt caracterizate prin alegerea la întîmplare a unei mutări de către jucători din mulţimea posibilităţilor care se oferă. Se numeşte strategie un ansamblu de reguli care definesc mutările în funcţie de situaţiile posibile, prin urmare, alegerea unei decizii de joc din cele pe care le are jucătorul la dispoziţie.

Strategia determină, pentru fiecare jucător, modul în care el alege mişcările. Dacă pentru realizarea unui joc, un jucător are la dispoziţie mai multe alternative şi el alege una dintre ele, spunem că alegerea făcută reprezintă o strategie pură. Jocurile cu un număr finit de strategii pure se numesc jocuri finite.

Un joc finit între doi jucători astfel încît un jucător are m strategii pure şi adversarul său are n strategii pure se numeşte joc de tipul $(m \times n)$.

Dacă strategiile sînt aleatoare cu probabilităţi date în cadrul unui anumit joc, atunci jocul se numeşte cu strategie mixtă. Prin urmare o strategie mixtă se obţine atunci cînd jucătorii aleg strategiile pure, cu anumite frecvenţe.

Strategiile mixte sînt prin urmare combinaţii de strategii pure cărora le asociem anumite probabilităţi cunoscute.

Într-un joc fiecare jucător caută să aleagă această strategie care-i aduce maximum de cîştig. Strategia care aduce unui jucător maximum de avantaje se numeşte strategie optimă.

Prin cîştigul realizat la sfîrşitul fiecărei partide se înţelege rezultatul confruntării a două strategii pure ale jucătorilor.

Pentru cunoaşterea cîştigului ar trebui cunoscute plăţile făcute de jucători, în favoarea altor jucători, la sfîrşitul unei partide. Din punct de vedere al cîştigului, jocurile pot fi de sumă nulă cînd la sfîrşitul unei anumite partide suma pierdută de o parte din jucători este cîştigată de ceilalţi jucători, sau jocuri fără sumă nulă.

21.2. MATRICEA UNUI JOC

Jocurile finite cu sumă nulă, între doi jucători A şi B, se caracterizează prin corespondenţa dintre mulţimea strategiilor pure ale unui jucător şi mulţimea strategiilor pure ale celuilalt jucător.

Această corespondenţă poate fi reprezentată printr-o matrice în care liniile reprezintă strategiile pure ale unui jucător, iar coloanele strategiile pure ale celuilalt jucător. Dacă un joc se desfăşoară într-o singură partidă, jucătorul A cîştigă de la jucătorul B suma x_{ij} în ipoteza că jucătorul A a ales strategia corespunzătoare liniei i, iar jucătorul B strategia corespunzătoare coloanei j.

Să presupunem că jucătorul A are m strategii pure şi jucătorul B are n strategii pure.

Să notăm prin x_{ij} cîştigul primului jucător în situaţia în care el a ales strategia A_i, iar adversarul strategia B_j. Aceste valori pentru fiecare pereche de strategii pot fi înscrise într-un tablou dreptunghiular în care liniile corespund strategiilor pure ale jucătorului A, iar coloanele strategiilor pure ale jucătorului B.

A \ B	B_1	B_2	B_3	...	B_n
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1n}
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2n}
$\vdots$					
A_m	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	...	x_{mn}

Observaţie În cazul cînd partidele se repetă, atunci strategiile pure sînt folosite cu anumite frecvenţe. Elementele x_{ij} ale matricei jocului sînt date direct sau se deduc din regulile jocului.

21.3. VALOAREA SUPERIOARĂ ŞI INFERIOARĂ A UNUI JOC

Dacă într-un joc un anumit adversar alege strategia A_i, atunci se înţelege că celălalt jucător va alege strategia B_j, astfel încît cîştigul jucătorului A să fie minim. Această strategie a lui B corespunde numărului x_{ij} care are în linia i valoarea cea mai mică. Numărul $\bar{x}_i$ reprezintă cel mai mic număr din linia i.

Deoarece jucătorul A are la dispoziţie m strategii pure, el va căuta să aleagă pe aceea dintre ele pentru ca x_i să fie maxim.

Această valoare o vom nota cu x' şi reprezintă *valoarea inferioară a unui joc.*

$$x = \max_i \bar{x}_i = \max_i \min_j x_{ij}$$

În mod analog se deduce că adversarul B doreşte să minimizeze cîştigul maximal al lui A.

Va alege aceeași strategie care-i v-a procura lui un minimum de pierdere. Aceasta se va întîmpla dacă cîștigul lui A nu va fi mai mare decît : $\bar{x}_j = \max_i x_{ij}$.

Prin urmare $\bar{x}_j$ reprezintă elementul cu cea mai mare valoare așezat în coloana j.

Jucătorul B are însă la dispoziție n strategii pure și va alege pe aceea pentru care $\bar{x}_j$ este minim, adică cîștigul jucătorului A să fie cel mai mic posibil.

Să notăm : $y = \min_j \max_i x_{ij}$

și reprezintă valoarea superioară a jocului.

Strategia care corespunde valorii x' se numește maximin și ea garantează jucătorului A un cîștig egal cu valoarea inferioară a jocului. Strategia care corespunde valorii x'' se numește strategie minimax și asigură jucătorului B o pierdere egală cu valoarea superioară a jocului.

Dacă jucătorul A alege o strategie maximin atunci el se asigură de un cîștig a cărei valoare nu este inferioară lui x', indiferent de strategia aleasă de jucătorul B.

Dacă jucătorul B alege strategia minimax el se asigură că pierderea sa nu va fi mai mare decît x'', indiferent de strategia jucătorului A.

Exemplul 1

Să presupunem că matricea jocului a doi jucători A și B este :

A \ B	B_1	B_2	B_3	x_i
A_1	-1	-4	-5	-5
A_2	0	-3	-2	-3
A_3	2	0	-1	-1
y_j	2	0	-1	

(A) $x_i = \min_j x_{ij}$, (B) $y_j = \max_i x_{ij}$

x_i este valoarea minimă a tuturor cîștigurilor lui A, pentru toate strategiile B_1, B_2, B_3 ale lui B.

$$x_1 = \min_j x_{1j},\ x_2 = \min_j x_{2j},\ x_3 = \min_j x_{3j}.$$

Pentru a afla pe x_1, trebuie să alegem cea mai mică valoare din valorile înscrise în prima linie corespunzătoare lui A_1. În mod asemănător se află x_2, comparînd valorile înscrise pe linia lui A_2; x_3 comparînd valorile înscrise pe linia lui A_3; se găsește $x_1 = -5$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$. În mod asemănător se stabilesc valorile y_1, y_2, y_3, comparînd valorile înscrise pe coloanele B_1, B_2, B_3, $y_1 = \max_i x_{1j}$, $y_2 = \max_i x_{2j}$, $y_3 = \max_j x_{3j}$; $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $y_3 = -1$.

Avem : $x = \max_i x_i = \max(-5, -3, -1) = -1$,

$$y = \min_j y_j = \min(2, 0, -1) = -1.$$

Strategia *maximin* a jucătorului A este A_3. Jucînd A_3 jucătorul A se asigură de o pierdere maximală, cel puțin egală cu 1.

Strategia *minimax* a jucătorului B este B_3. Dacă de exemplu jucătorul A refuză să aleagă A_3 și alege de exemplu A_2, atunci jucătorul B poate replica alegînd B_2 și în felul acesta pierderea jucătorului A este egală cu 3.

Exemplul 2

Matricea jocului a doi jucători A și B este :

A \ B	B_1	B_2	x
A_1	1	-1	-1
A_2	-1	1	-1
y	$+1$	$+1$	

$$x = -1, \; y = +1$$

Concluzia în acest joc este trivială de aceea orice strategie a jucătorului A este o strategie maximin, după cum orice strategie a jucătorului B este minimax.

21.4. JOCURI ECHILIBRATE

Să revenim la jocul din exemplul 1, caracterizat de matricea sa. Avem : $x = \max_i \min_j x_{ij} = -1$

$$y = \min_j \max_i x_{ij} = -1$$

Prin urmare în acest joc valoarea superioară este egală cu valoarea inferioară ($x = y$). Jocurile care se bucură de această proprietate se numesc *jocuri echilibrate*. Punctul de coordonate $x = y = -1$ se numeşte *punct de echilibru* al matricei jocului.

Perechea dublă de strategii (A_i, B_j), corespunzătoare punctului de echilibru, se numeşte *soluţia jocului*. În cazul exemplului nostru soluţia jocului este perechea (A_3, B_3).

Valoarea superioară care este egală cu valoarea inferioară a unui joc se numeşte *valoarea jocului*.

21.5. CAZURI PARTICULARE

În cazul jocurilor de forma 2×2 se poate stabili în mod direct existenţa unui punct de echilibru.

Un joc reprezentat printr-o matrice pătratică de ordinul doi e strict determinat dacă matricea sa conţine un anumit termen U care este în acelaşi timp minim al liniei şi maxim al coloanei în care se găseşte. Dacă $U = 0$, jocul se numeşte echitabil.

Exemple

Să considerăm jocurile reprezentate de matricile:

a)

0	1
−2	4

b)

4	3
−6	−2

c)

0	2
3	0

1. Jocul (a) este strict determinat şi echitabil, deoarece elementul 0 este maximul elementelor din coloana unde se găseşte, max (−2, 0) = 0, şi minimul liniei în care el se află, min (0, 1) = 0. Prin urmare valoarea jocului este $U = 0$. Primul jucător va trebui să aleagă prima linie, iar cel de al doilea jucător prima coloană.

2. Jocul reprezentat de matricea (b) este strict determinat, deoarece elementul 3 este minimul elementelor din linia unde se găseşte, min (4, 3) = 3, şi maximul elementelor coloanei unde se găseşte max (3, −2) = 3. Jocul nu este echitabil deoarece $U = 3 \neq 0$.

3. Jocul reprezentat de matricea (c) nu este strict determinat. Pentru a afla valoarea acestui joc va trebui să cunoaştem probabilităţile cu care primul jucător alege liniile (1) sau (2), respectiv probabilităţile celui de al doilea jucător cu care va alege coloanele (1) sau (2).

Teoremă: Jocul de matrice:

$$J = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$$

nu este strict determinat dacă una din condiţiile următoare nu este realizată:

1) $a < b$, $a < c$, $d < b$ şi $d < c$;

2) $a > b$, $a > c$, $d > b$ şi $d > c$.

21.6. RELAŢIA DE DOMINARE ÎNTR-UN JOC

Dacă un joc nu admite punct de echilibru, rezolvarea sa este în general mai complicată. Matricea unui joc poate fi în general simplificată (simplificarea se referă aici la reducerea numărului de linii sau a numărului de coloane) în două situaţii posibile:

a) Dacă o coloană sau o linie se repetă. În acest caz, repetarea unei anumite strategii este nulă.

b) Dacă elementele unei linii sau ale unei coloane sînt mai mici sau cel mult egale cu elementele altei linii sau ale altei coloane.

Dominarea este strictă dacă toate elementele unei linii sau ale unei coloane sînt mai mici sau cel mult egale cu elementele altei linii sau ale altei coloane.

Dacă elementele unei anumite linii k sînt mai mici sau cel mult egale cu elementele altei linii i, $x_{kj} < x_{ij}$, pentru orice j, atunci strategia A_k, corespunzătoare liniei k, este dominată de strategia A_i, corespunzătoare liniei i.

Relaţiile de dominare într-un joc ne permit să simplificăm matricea unui joc eliminînd liniile sau coloanele dominate.

Exemplul 1

Să considerăm un joc caracterizat prin matricea:

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	1
A_2	4	0	−1
A_3	2	3	1

Se observă că strategia A_3 reproduce întru totul strategia A_2 şi prin urmare ea se poate simplifica şi se obţine matricea:

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	4
A_2	4	0	−1

Exemplul 2

Să considerăm un joc caracterizat prin matricea:

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	1
A_2	1	2	1
A_3	−4	5	7

În acest joc se observă că elementele liniei A_2 sînt mai mici sau cel mult egale cu elementele liniei A. Matricea acestui joc poate fi simplificată astfel:

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	1
A_3	−4	5	7

21.7. STRATEGII MIXTE

Se numeşte strategie mixtă o combinaţie aleatoare a mai multor strategii pure cu probabilităţi cunoscute.

Să considerăm un joc caracterizat de matricea:

$$X = \begin{pmatrix} & B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ A_1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ A_2 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_m & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Strategiile mixte ale celor doi jucători A şi B sînt :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \ldots A_m \\ p_1 \ldots p_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \ldots B_n \\ q_1 \ldots q_n \end{pmatrix}$$

$$\sum_1^m p_i = 1, \quad \sum_1^n q_j = 1$$

Valoarea x_{ij} se realizează cu probabilitatea corespunzătoare strategiei A_i (corespunzătoare liniei i) şi strategiei B_j (corespunzătoare coloanei j).

Expresia :

$$C(A, B) = \sum_i^m \sum_j^n x_{ij} p_i q_j \tag{1}$$

reprezintă cîştigul probabil care este aşteptat de jucătorul A.

Dacă notăm cu p şi q vectorii probabilităţilor de alegere a strategiilor S_A şi S_B, atunci funcţia $C(x, y)$ poate fi scrisă sub formă matricială astfel :

$$C(x, y) = p \times q.$$

Să revenim la jocul 2×2 avînd matricea :

$$\begin{matrix} & B_1 & B_2 \\ A_1 & x_{11} & x_{12} \\ A_2 & x_{21} & x_{22} \end{matrix}$$

Strategiile mixte ale celor doi jucători A şi B sînt :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

$p_1 + p_2 = 1$, $(0 \leqslant p_1 \leqslant 1)$, $q_1 + q_2 = 1$ $(0 \leqslant q_1 \leqslant 1)$.

Expresia $C(A, B)$ se mai scrie : $C(A, B) = x_{11} pq +$

$$+ x_{21}(1 - p)q + x_{12} p(1 - q) + x_{22}(1 - p)(1 - q). \tag{1}$$

Această expresie poate fi pusă sub forma :

$$C(A, B) = K(p - \alpha)(q - \beta) + V, \tag{2}$$

unde :

$$\alpha = \frac{x_{22} - x_{21}}{x_{11} - x_{21} + x_{22} - x_{12}}$$

$$\beta = \frac{x_{22} - x_{12}}{x_{11} - x_{21} + x_{22} - x_{12}}$$

$$V = \frac{x_{11}\, x_{22} - x_{12}x_{21}}{x_{11} - x_{21} + x_{22} - x_{12}}$$

Din relaţia (2) se vede că jucătorul A nu poate realiza un cîştig mai mare decît V, iar jucătorul B nu poate realiza o pierdere mai mare decît V.

Cîştigul V realizat poartă numele de valoarea jocului.

21.8. STRATEGII MIXTE OPTIME

În cazul unui joc $m \times n$ cu strategii mixte funcţia $C(A, B)$ dată de relaţia : $C(A, B) = \sum_i^m \sum_j^n x_{ij}p_i q_j$ poate fi scrisă sub forma :

$C(A, B) = q_1 \sum_{j=1}^m x_{j_1}p_j + q_2 \sum_{j=1}^m x_{j_2}p_j + \ldots + q_{n_j} \sum_{j=1}^m x_{jn}\, p_j$ cu condiţia $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Pentru ca această funcţie să aibă o valoare maximă este necesar să avem :

$$\sum_{j=1}^m x_{j1}p_j = \sum_{j=1}^m x_{j1}\, p_j = \ldots = \sum_{j=1}^m x_{jn}\, p_j = V, \qquad (2)$$

unde prin V am notat valoarea comună a acestor expresii.

Să considerăm jocul caracterizat de matricea :

$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, avînd strategiile mixte.

Condiţia (2) se scrie : $\begin{cases} x_{11} p_1 + x_{21} p_2 = V \\ x_{12} p_1 + x_{22} p_2 = V \\ p_1 + p_2 = 1 \\ 0 \leqslant p_1 \leqslant 1 ;\ 0 \leqslant p_2 \leqslant 1. \end{cases}$

Rezolvînd acest sistem, obţinem :

$$p_1 = \frac{x_{22} - x_{21}}{x_{11} + x_{22} - x_{21} - x_{12}}, \quad p_2 = 1 - p_1$$

Valoarea jocului V este dată de relaţia :

$$V = x_{11} p_1 + x_{21} p_2 = \frac{x_{11} x_{22} - x_{21} x_{22}}{x_{11} + x_{22} - x_{21} - x_{12}}.$$

Observaţie

Funcţia $C(A, B)$ mai poate fi scrisă :

$$C(A, B) = p_1 \sum_{j=1}^{n} x_{1j} q_j + p_2 \sum_{j=1}^{n} x_{2j} q_j + \ldots\ldots + p_n \sum_{j=1}^{n} x_{nj} q_j$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1.$$

Pentru ca această funcţie să aibă o valoare maximă este necesar să avem :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} q_j = \sum_{j=1}^{n} x_{2j} q_j = \ldots = \sum_{j=1}^{n} x_{mj} q_j = V,$$

în cazul jocului (2×2) se obţin condiţiile :

$$\begin{cases} x_{11} q_1 + x_{21} q_2 = V' \\ x_{21} q_2 + x_{22} q_2 = V' \\ q_1 + q_2 \qquad = 1 \\ 0 \leqslant q_1 \leqslant 1 ;\ 0 \leqslant q_2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem se obţine :

$$q_1 = \frac{x_{22} - x_{12}}{x_{11} - x_{21} + x_{22} - x_{12}} \; ; \; V' = \frac{x_{11}x_{22} - x_{21}x_{22}}{x_{11} - x_{21} + x_{22} - x_{12}}$$

Rezultă : $\boxed{V' = V}$.

Prin urmare obţinem pentru valoarea jocului aceeaşi expresie.

Exemple :

Un joc este caracterizat prin matricea :

B / A	B_1	B_2	x_i
A_1	1	2	1
A_2	-3	4	-3
y_j	1	4	

minimax $x_{ij} = 1$
maximin $x_{ij} = 1$

Soluţia jocului este (A_1, B_1) adică jucătorul A va alege strategia A_1 în timp ce jucătorul B strategia B_1.
Un joc este caracterizat de matricea :

B / A	B_1	B_2	x_i
A_1	$1(x_{11})$	$-1(x_{12})$	-1
A_2	$-2(x_{21})$	$1(x_{22})$	-2
y_j	1	1	

Soluţia jocului este dată rezolvînd sistemul :

$$p_1 = \frac{x_{22} - x_{21}}{x_{11} + x_{22} - x_{12} - x_{21}} = \frac{1 + 2}{1 + 1 + 2 + 1} = \frac{3}{5},$$

valoarea jocului este :

$$V = x_{11}p_1 + x_{12}\,p_2 = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

21.9. INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A SOLUŢIEI UNUI JOC DE DOUĂ PERSOANE

Să considerăm un joc de două persoane caracterizat de matricea :

A \ B	B_1	B_2
A_1	x_{11}	x_{12}
A_2	x_{21}	x_{22}

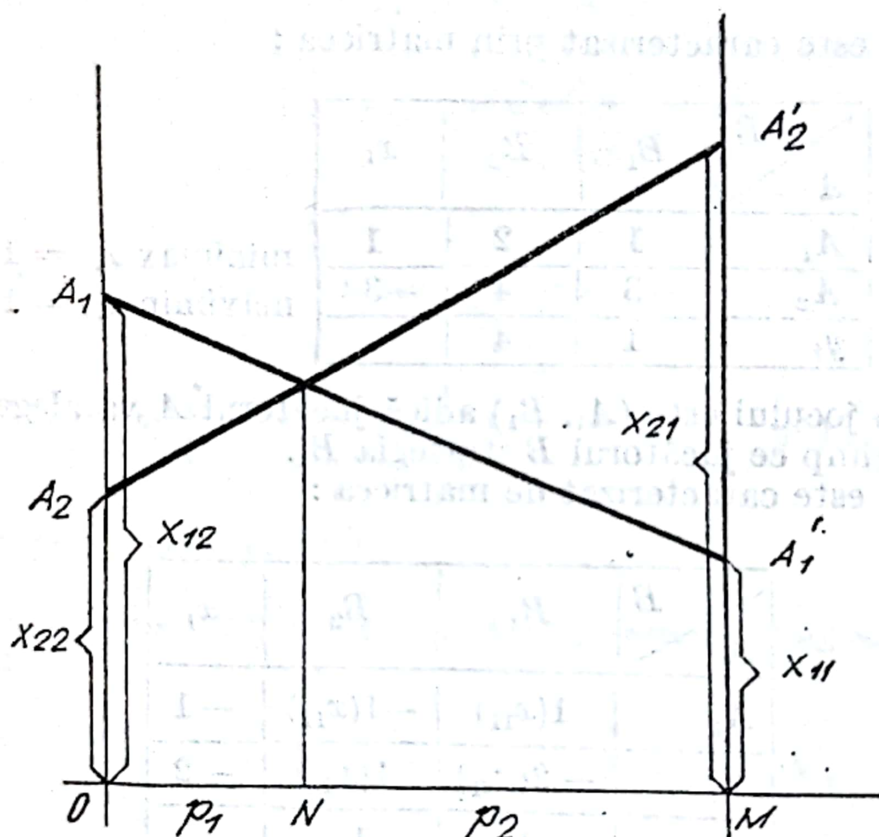


Fig. 21.1

Pe segmentul $OM = 1$, luăm două segmente de dreaptă $ON = p_1$ şi $NM = p_2$. Avem evident relaţia : $ON + NM = OM$ sau $p_1 + p_2 = 1$.

Pe o dreaptă perpendiculară în punctul O pe OM luăm un segment $OA_1 = x_{12}$ şi pe perpendiculara ridicată în punctul M, luăm un segment $MA_1' = x_{11}$. Dreapta $A'A_1$ reprezintă strategia A_1 a jucătorului A. În mod analog pe dreapta perpendiculară pe OM în punctul O luăm segmentul $OA_2 = x_{22}$ şi pe perpendiculara în punctul M luăm $MA_2' = x_{21}$. Dreapta A_2A_2' reprezintă strategia A_2 a jucătorului A.

Din ecuaţiile:

$$\begin{cases} x_{11}p_1 + x_{12}p_2 = V \\ x_{21}p_1 + x_{22}p_2 = V \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

rezultă că punctul de intersecţie al celor două drepte determină valoarea V a jocului cît şi strategia mixtă optimă a jucătorului A.

21.10. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Printre jocurile reprezentate de matricile următoare:

(a)

0	2
−1	4

(b)

5	0
0	2

(c)

3	1
−4	0

(d)

1	−1
−1	1

(e)

0	4
0	2

(f)

7	0
0	0

Să se determine acelea care sînt strict determinate. În cazul în care jocul este strict determinat să se găsească strategiile optime ale fiecărui jucător.

Răspuns.

(a) este strict determinat şi echitabil. Primul jucător va alege linia (1) iar cel de al doilea coloana (2);

(b) nu este strict determinat;

(c) este strict determinat dar nu este echitabil. Primul jucător va alege linia (1) iar jucătorul al doilea coloana (2):

2. Să se alcătuiască matricea unui joc care este strict determinat şi echitabil; a unui joc care este strict determinat şi neechitabil; a unui joc care nu este strict determinat.

3. Se consideră jocul reprezentat de matricea:

$$J = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline -1 & a \\ \hline \end{array}$$

a) Să se arate că jocul este strict determinat, oricare ar fi valoarea lui *a*.

b) Să se găsească valoarea jocului.

Răspuns: $V = 2$.

4. Se consideră jocul reprezentat de matricea:

$J =$

a	a
c	d

Să se arate că jocul este strict determinat oricare ar fi valorile lui a, c, d.

5. Se dau jocurile prin matricile:

(*a*)

1	2
3	4

(*b*)

1	0
−1	2

(*c*)

2	3
1	4

(*d*)

15	3
−1	2

(*e*)

7	−6
5	8

(*f*)

3	15
−1	10

Să se găsească valoarea jocului şi strategiile optime.

6. Să se găsească condiţia necesară şi suficientă pentru ca jocul:

$J =$

a	0
0	b

să fie strict determinat.

7. Să se găsească condiţiile necesare şi suficiente ca acest joc să nu fie strict determinat. Să se găsească strategiile optime pentru fiecare jucător şi valoarea jocului dacă el nu este strict determinat.

Răspuns. a, b trebuie să fie amîndouă pozitive sau amîndouă negative:

$$p_1 = \frac{b}{a+b}; \qquad p_2 = \frac{a}{a+b}$$

$$q_1 = \frac{b}{a+b}; \qquad q_2 = \frac{a}{a+b}; \qquad V = \frac{ab}{a+b};$$

8. Să se afle valoarea inferioară şi valoarea superioară a jocului reprezentat în matricea:

A \ B	B_1	B_2
A_1	-1	1
A_2	1	8

9. Un joc caracterizat prin matricea:

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2	-3	4
A_2	-3	4	-5
A_3	4	-5	6

Să se afle valorile:

$$x = \max_i \min_j x_{ij}$$

$$y = \min_i \max_j x_{ij}$$

Să se compare aceste valori.

10. Să se afle strategiile minimax şi maximin ale jocului reprezentat în matricea:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0,4	0,5	0,9	0,3
A_2	0,8	0,4	0,3	0,7
A_3	0,7	0,6	0,8	0,9
A_4	0,7	0,2	0,4	0,6

11. Un joc este caracterizat prin matricea:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	-1	4
A_2	5	3	2	-1
A_3	3	2	2	-1
A_4	1	2	-1	4

Să se elimine în această matrice strategiile identice şi cele dezavantajoase.

12. Să se determine soluţia jocului caracterizat prin matricea :

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	−1	3	2	−1
A_2	−2	−4	−1	−4
A_3	−5	3	2	−5
A_4	−1	3	2	0

13. Să se determine strategia optimală mixtă a jocului caracterizat de matricea :

A \ B	B_1	B_2
A_1	1	−1
A_2	−1	1

Determinaţi şi cîştigul mediu.

14. Să se determine strategia optimală mixtă şi cîştigul mediu al jocului caracterizat prin matricea :

A \ B	B_1	B_2
A_1	1	0
A_2	0	1/2

15. Să se reprezinte grafic strategiile jucătorilor A şi B, ale jocului caracterizat de matrice şi apoi să se determine grafic valorile aproximative ale probabilităţilor p_1, p_2 ale strategiilor jucătorului A.

A \ B	B_1	B_2
A_1	1	2
A_2	3	1/2

$$A\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}.$$

16. Să se reprezinte grafic strategiile jucătorilor A şi B din jocul caracterizat de matricea :

$A \backslash B$	B_1	B_2
A_1	1	8
A_2	5	3

şi să se arate grafic că valoarea jocului este 3.

17. Să se reprezinte grafic strategiile jucătorilor A şi B din jocul caracterizat de matricea dată şi să se stabilească limita inferioară a cîştigului.

$A \backslash B$	B_1	B_2
A_1	1	6
A_2	4	3

18. Să presupunem că o armată posedă trei tipuri de arme A_1, A_2, A_3 şi că inamicul posedă trei tipuri de avioane B_1, B_2, B_3 Scopul armatei este de a doborî avioanele B_1, B_2, B_3, iar al adversarului de a feri avioanele de efectul acestor arme.

Probabilităţiile de a atinge avioanele B_1, B_2, B_3 cu arma A_1 sînt respectiv 0,9 ; 0,4 ; 0,2. Probabilitatea de a atinge avioanele B_1, B_2, B_3 cu arma A_2 sînt 0,3 ; 0,6 ; 0,8 ; cu arma A_3 sînt 0,5 ; 0,7 ; 0,2. Se cere să se formuleze această problemă în termeni de teoria jocului şi să se găsească strategia optimală.

19. Un aviator are două strategii posibile de zbor A_1 şi A_2. Strategia A_1 — zboară sus ; strategia A_2 — zboară jos. Artileria aeriană are două strategii posibile. Strategia B_1 — trage ; strategia B_2—nu trage. Situaţia conflictuală dintre cei doi adversari este deschisă de matricea :

	$Q \backslash p$	p_1	p_2
zboară sus	Q_1	1	4
zboară jos	Q_2	2	0

Să se afle valoarea jocului.

20. Un joc de două persoane A şi B este caracterizat de matricea :

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2	−3	−1
A_2	−3	4	−3
A_3	4	−5	6

Să se determine strategiile optimale ale jucătorilor A şi B şi valoarea jocului.

21. Două întreprinderi A şi B fabrică trei feluri de produse, A_1; A_2; A_3, respectiv B_1; B_2; B_3. La un concurs de produse cele două întreprinderi schimbă produsele, astfel încît să obţină cel mai mare număr de puncte. Din situaţiile anterioare se cunosc probabilităţile de a obţine cel mai mare număr de puncte în concurs la toate produsele întreprinderii A faţă de întreprinderea B, date prin matricea :

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	0,7	0,8	0,2
A_2	0,4	0,6	0,9
A_3	0,1	0,7	0,3

Să se determine frecvenţa cu care fiecare întreprindere trebuie să varieze exponatele, astfel încît să se asigure cel mai mare număr de puncte.

22. La o întrecere sportivă participă două şcoli. Şcoala A poate alinia echipele A_1 şi A_2, iar şcoala B poate alinia echipele B_1 şi B_2. Rezultatul întîlnirilor precedente a permis să se stabilească următoarea matrice de probabilităţi a victoriei şcolii A.

A \ B	B_1	B_2
A_1	0,7	0,4
A_2	0,2	0,5

Să se determine frecvenţa cu care fiecare şcoală trebuie să varieze compoziţia echipelor, astfel ca să asigure cel mai mare număr de victorii.

23. În figura alăturată sînt reprezentate grafic strategiile a doi jucători. Să se determine aproximativ soluția optimală și valoarea jocului (fig. 21.2).

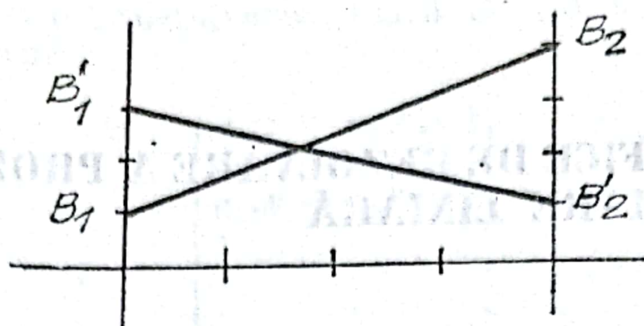


Fig. 21.2

24. În figura 21.2 sînt reprezentate grafic strategiile a doi jucători. Să se determine valoarea jocului.

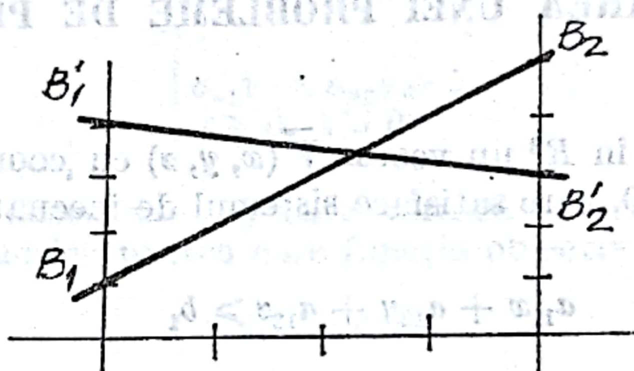


Fig. 21.3

25. Să se afle valorile strategiilor optimale ale jocurilor reprezentate prin graficele desenate în figura 21.4.

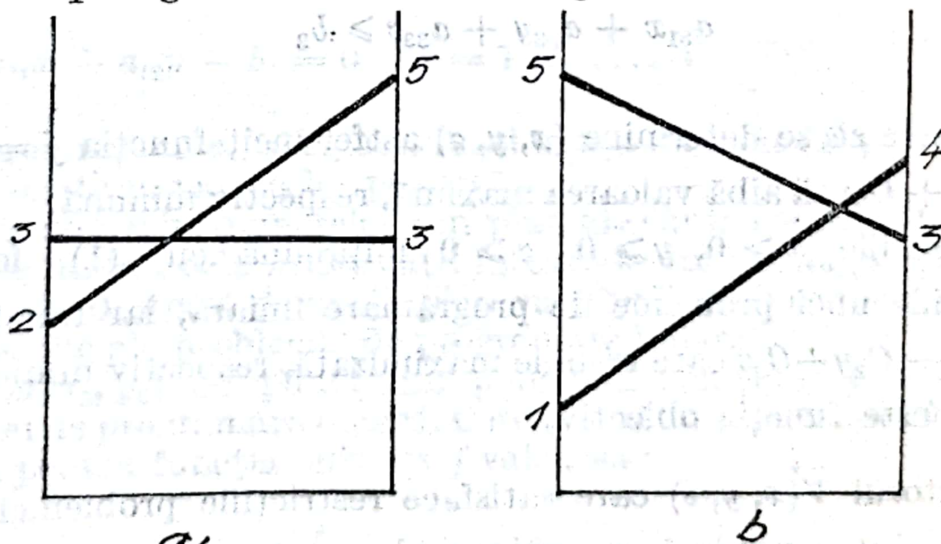


Fig. 21.4

26. Să se rezolve grafic jocurile caracterizate de matricile:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Capitolul 22

METODE GRAFICE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE PROGRAMARE LINIARĂ

22.1. FORMULAREA UNEI PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ

Se consideră în R^3 un vector $\overrightarrow{V}(x, y, z)$ cu coordonatele nenegative $x, y, z \geqslant 0$, care satisface sistemul de inecuaţii.

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &\geqslant b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &\geqslant b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &\geqslant b_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

Se cere să se determine (x, y, z) astfel încît funcţia $f = C_1x + C_2y + C_3z$ să aibă valoarea maximă, respectiv minimă.

Condiţiile $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ împreună cu (1) formează restricţiile unei probleme de programare liniară, iar funcţia $f = C_1x + C_2y + C_3z$ care trebuie maximizată, respectiv minimizată, se numeşte funcţie obiectiv.

Vectorul $\overrightarrow{V}(x, y, z)$ care satisface restricţiile problemei se numeşte soluţie posibilă a unei probleme de programare liniară. Dacă în plus soluţia posibilă a unei probleme de programare liniară maximizează sau minimizează funcţia obiectiv, se numeşte soluţie optimă a problemei de programare liniară.

22.2. REZOLVAREA GRAFICĂ A PROBLEMELOR DE PROGRAMARE LINIARĂ CU DOUĂ NECUNOSCUTE

Problemele de programare liniară cu două necunoscute au următoarea formă:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \geqslant b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y \geqslant b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y \geqslant b_3 \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ a_{i1}x + a_{i2}y \geqslant b_i \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ a_{n1}x + a_{n2}y \geqslant b_n \\ x \geqslant 0, \; y \geqslant 0 \end{cases}$$

Dintre necunoscutele x, y care verifică sistemul de restricții să se găsească acelea pentru care funcția obiectiv

$$f = c_1x + c_2y$$

are o valoare maximă, respectiv minimă.
Pentru rezolvare reprezentăm grafic dreptele de ecuații:

$$(D_i) \qquad a_{i1}x + a_{i2}y - b_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Presupunem că a_{i1} și b_{i1} sînt luați în așa fel încît (D_i) taie axele de coordonate în partea lor pozitivă.

Fie Δ domeniul punctelor din plan ale căror coordonate (x, y) verifică simultan cele n inecuații la care se mai adaugă condițiile $x \geqslant 0$ și $y \geqslant 0$. Acest domeniu plan va fi poligonul convex al soluțiilor posibile ale problemei de programare liniară.

Fie $M(x_0, y_0)$ un punct din poligonul soluțiilor posibile ale problemei de programare liniară. Corespunzător punctului $M(x_0, y_0)$ obținem pentru funcția obiectiv f valoarea:

$$f_0 = c_1x_0 + c_2y_0.$$

Să considerăm dreapta (D_0) de ecuație:

$$c_1x + c_2y - f = 0.$$

Să notăm cu d distanța de la origine la dreapta (D) și atunci avem :

$$d = \frac{|-f|}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{f}{K},$$

unde
$$K = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

Prin urmare obținem : $f = Kd$.
Valoarea funcției obiectiv este direct proporțională cu distanța d. Rezultă că funcția f are o valoare maximă (sau minimă) dacă d are valoare maximă (sau minimă).

Să scriem funcția obiectiv sub forma :

$$y = -\frac{c_1}{c_2}x + \frac{f}{c_2}.$$

Deoarece f este variabil, ecuația :

$$y = -\frac{c_1}{c_2}x + \frac{f}{c_2}$$

reprezintă un fascicul de drepte paralele cu dreapta (D_0) de ecuație

$$y = -\frac{c_1}{c_2}x.$$

Aflarea soluției optime a unei probleme de programare liniară constă în a găsi punctul $M(x_0, y_0)$ care aparține domeniului soluțiilor posibile căruia îi corespunde ordonata la origine cea mai mare, respectiv cea mai mică.

Prin urmare rezolvarea grafică a unei probleme de programare liniară cu două necunoscute poate fi formulată astfel :

dintre toate punctele aparținînd domeniului soluțiilor posibile să se găsească acelea ale căror coordonate (x, y) maximizează, respectiv minimizează, funcția liniară

$$f = c_1x + c_2y.$$

Pentru o valoare particulară d a funcției f, obținem ecuația $d = c_1x + c_2y$ al cărei grafic este o dreaptă în plan (fig. 22.1).
Cînd d variază în intervalul $(-\infty, +\infty)$, dreapta $c_1x + c_2y = d$ se deplasează rămînînd paralelă cu direcția dată.
Punînd condiția ca dreapta de ecuație $c_1x + c_2y = d$ să treacă prin vîrful A (fig. 22.2) obținem $d = d_1$ care este cea mai mică dintre toate distanțele de la origine la dreptele fasciculului care intersec-

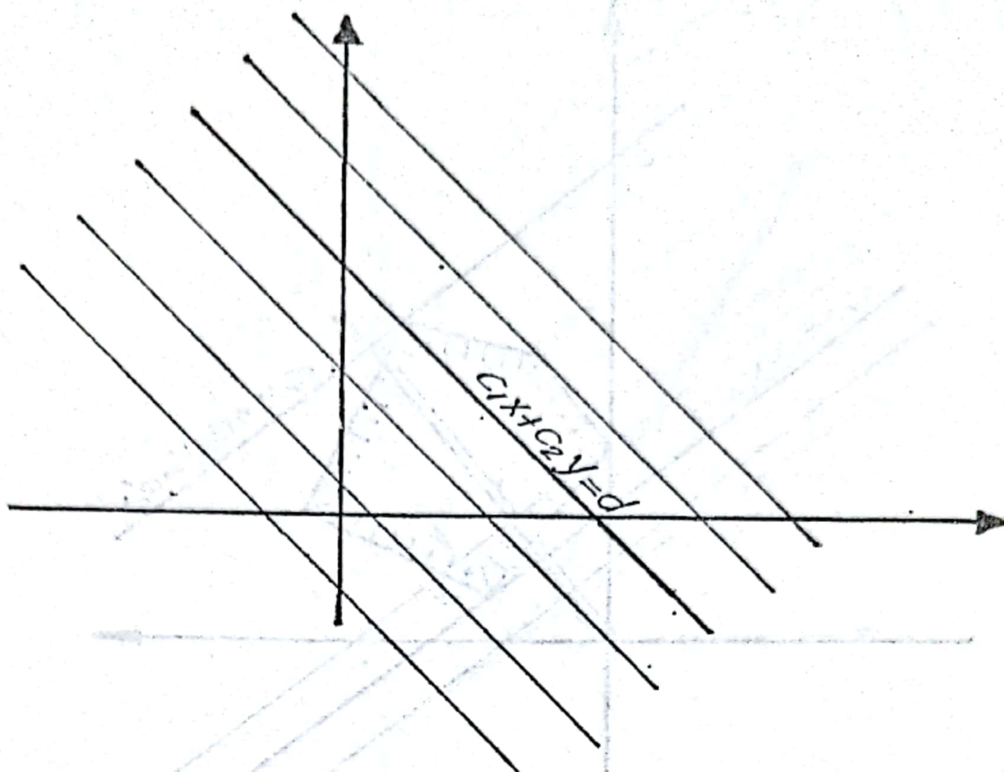


Fig. 22.1

tează domeniul soluţiilor. În mod asemănător dacă punem condiția ca punctul $B(x, y)$ să aparţină dreptei de ecuaţie : $c_1x + c_2y = d$, obţinem $d = d_2$, care este cea mai mare dintre distanţele de la originea O la dreptele fasciculului care intersectează poligonul soluţiilor posibile.

Este evident că cea mai mare valoare a funcţiei obiectiv $f = c_1x + c_2y$ este obţinută pentru valorile (x, y) care satisfac restricţiile problemei de programare liniară şi sînt coordonatele vîrfului B.

Prin urmare, pentru a rezolva grafic o problemă de programare liniară se construieşte poligonul soluţiilor de bază, determinat de sistemul de inecuaţii (1) şi apoi se rezolvă sistemul format din ecuaţiile a două drepte la intersecţia cărora se află vîrful cel mai apropiat şi respectiv cel mai îndepărtat de dreapta de ecuaţie $c_1x + c_2y = 0$. Dacă una din laturile poligonului de bază este paralelă cu dreapta (D_0) a cărei ecuaţie este $c_1x + c_2y = 0$, (fig. 22.3), atunci problema admite o infinitate de soluţii. Coordonatele tuturor punctelor segmentului AD minimizează valoarea funcţiei $f = c_1x + c_2y$ şi coordonatele tuturor punctelor segmentului AB maximizează valoarea funcţiei $f = c_1x + c_2y$. În funcţie de forma poligonului soluţiilor posibile sînt cazuri cînd funcţia obiectiv nu are un maxim sau minim finit. În cazul unui domeniu deosebit (fig. 22.4) nu există puncte pentru care funcţia obiect să atingă maximul.

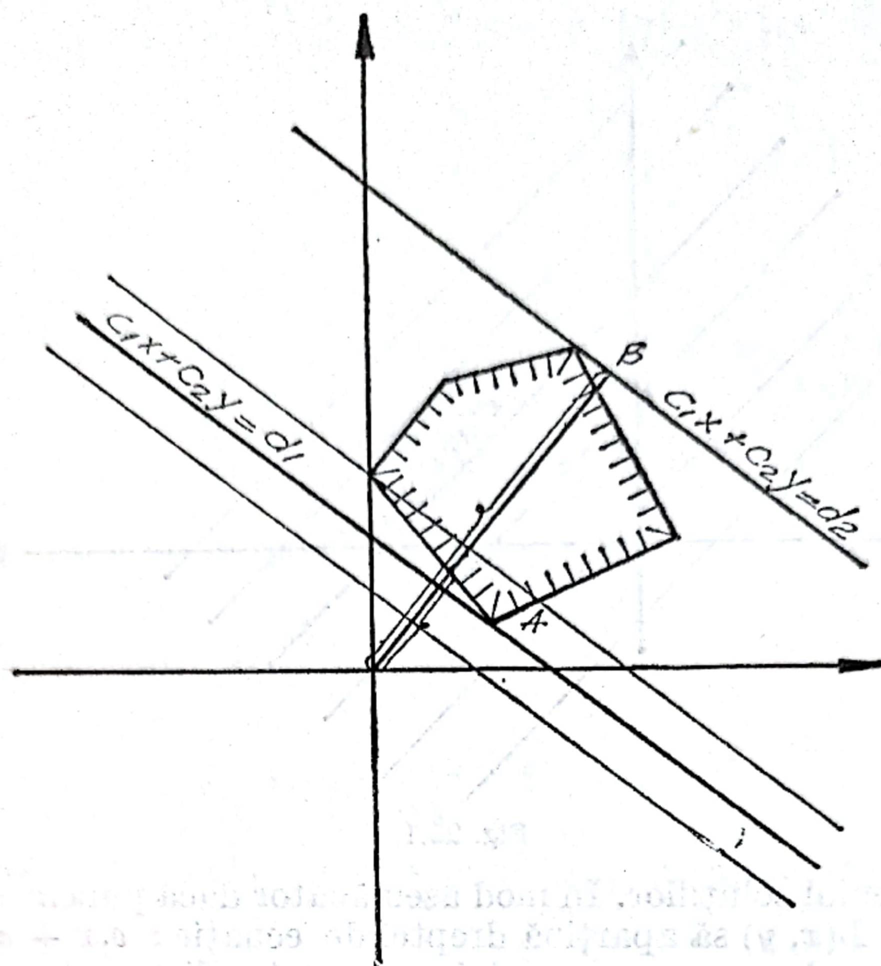


Fig. 22.2

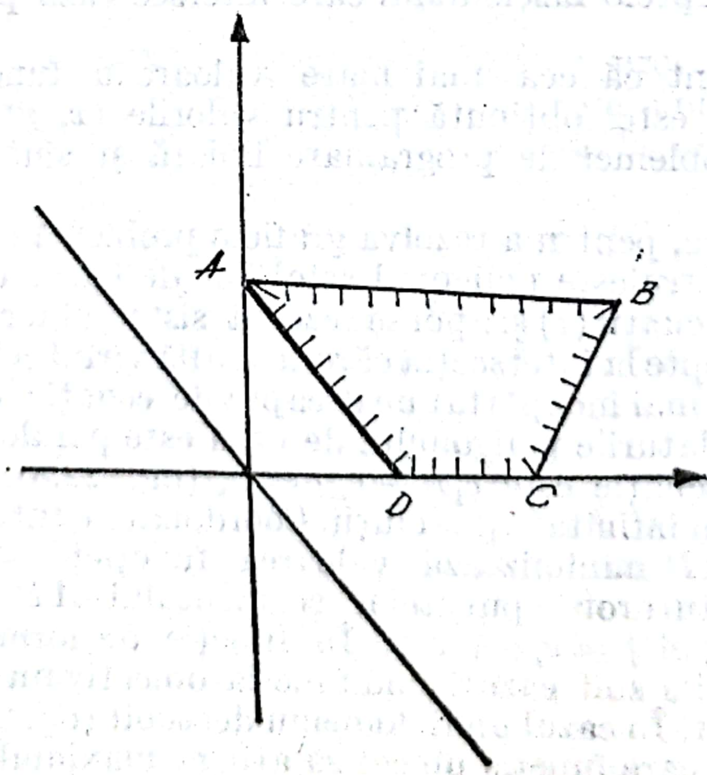


Fig. 22.3

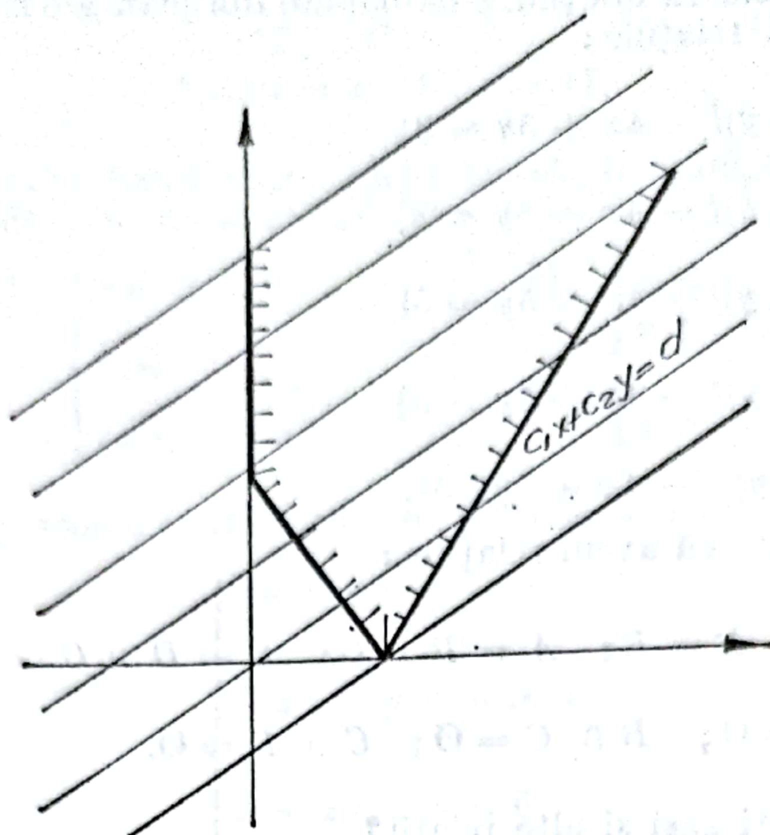


Fig. 22.4

22.3. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Să se reprezinte grafic mulţimile poligonale convexe care conţin soluţiile următoarelor inecuaţii simultane :

a) $\begin{cases} 2x + 3y \leqslant 6 \\ x + y \leqslant 2 \\ x + y \leqslant 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \\ x \leqslant 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y \geqslant 6 \\ 3x + 2y \leqslant 6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - y \geqslant 0 \\ x + y \leqslant 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y > 7 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x + 2x \geqslant 6 \\ 2x + 3y \geqslant 6 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

2. Se consideră mulţimile de puncte din plan ale căror coordonate verifică relaţiile:

$$A = \{(x, y) / -4x + 5y \leqslant 3\}$$

$$B = \{(x, y) / -4x + 5y < 3\}$$

$$C = \{(x, y) / -4x + 5y = 3\}$$

$$D = \{(x, y) / -4x + 5y > 3\}$$

$$E = \{(x, y) / -4x + 5y \geqslant 3\}.$$

Să se arate că avem relaţiile:

$$\overline{A} = D; \quad \overline{B} = E; \quad A = B \cup C; \quad E = D \cup C$$

$$A \cap B = \emptyset; \quad B \cap C = \emptyset; \quad C \cap D = \emptyset.$$

Mai puteţi găsi şi alte relaţii?

3. Să se găsească vîrfurile poligonului convex definit prin următoarele sisteme de inecuaţii:

a) $\begin{cases} x \leqslant 3 \\ y \leqslant 2 \\ 2x + 3y \geqslant 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y \geqslant 6 \\ -x + y \leqslant 2 \\ x + y \leqslant 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \leqslant 2 \\ x \geqslant -2 \\ y \leqslant 3 \\ y \geqslant -3 \end{cases}$

4. Să se arate că dreptele ale căror ecuaţii sînt:

$$2x + 3y + 9 = 0$$

$$-x + 3y + 6 = 0$$

$$x + 2y - 3 = 0$$

împart planul în şapte regiuni. Să se numeroteze aceste regiuni.

Pentru fiecare din aceste regiuni să se scrie cîte un sistem de inecuaţii pe care le verifică coordonatele punctelor din aceste regiuni.

5. Să se găsească maximul şi minimul funcţiei :

$$f(x, y) = 2x + 5y - 17,$$

dacă (x, y) sînt coordonatele unui punct din poligonul convex determinat de inecuaţiile simultane :

a) $\begin{cases} x \leqslant 3 \\ y \leqslant 2 \\ 2x + 3y \geqslant 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \leqslant 2 \\ x \geqslant -2 \\ y \leqslant 3 \\ y \geqslant -3. \end{cases}$

6. Să se găsească vîrfurile poligonului convex dat de inecuaţiile :

$$\begin{cases} 2x + y + 9 \geqslant 0 \\ -x + 3y + 6 \geqslant 0 \\ x + 2y - 3 \leqslant 0 \\ x + y \leqslant 0. \end{cases}$$

Să se găsească apoi valoarea maximă şi valoarea minimă a funcţiei

$$f(x, y) = 7x + 5y - 3,$$

pentru coordonatele (x, y) ale punctelor M din interiorul acestui poligon.

7. Un poligon convex are vîrfurile punctele $(-1, 1)$; $(3, 6)$; $(0, -3)$ şi $(1, 8)$. Să se găsească sistemul de inecuaţii care definesc acest poligon convex.

8. Într-o familie soţului nu-i plac preparatele culinare bogate în grăsimi, iar soţiei îi plac preparate cu grăsimi. Pentru prepararea unui meniu necesar hranei lor pentru cîteva zile, soţului îi trebuie cel puţin 0,300 kg carne fără grăsime, iar soţiei 0,100 kg carne cu grăsime. Cunoscînd că pentru prepararea acestui meniu se cumpără numai carne de porc care conţine 40 % grăsimi şi carne de vacă care conţine 10 % grăsimi, să se construiască mulţimea convexă a punctelor din plan care reprezintă cumpărăturile (x greutatea carnei de porc; y greutatea carnei de vacă) ce satisfac nevoile alimentare minime ale celor doi soţi.

Să se afle regimul cel mai economic ştiind că în kilogram de carne de porc costă 25 lei iar un kilogram de carne de vacă costă 28 lei.

9. Să se reprezinte grafic regiunea din plan în care inegalităţile liniare date mai jos sînt satisfăcute simultan şi să se determine vîrfurile acestei regiuni:

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - 10 \leqslant 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6 \leqslant 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2 \geqslant 0. \\ -x_1 + 3x_2 - 3 \leqslant 0. \end{cases}$$

10. Să se determine valoarea maximă a funcţiei $f = 2x + 5y$ cu condiţiile:

$$x \leqslant 4(1+m)$$
$$y \geqslant 3(1+m)$$
$$x + y = 6$$
$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0 \qquad \text{unde } m \in R.$$

Ce valori poate lua m?

11. O întreprindere dispune de 3 tipuri de minereuri: M_1 în cantitate de 800 t, M_2 în cantitate de 300 t, M_3 în cantitate de 400 t. Din aceste minereuri trebuie să se facă un amestec de cel puţin 500 t şi care să conţină cel puţin 9 % aluminiu. Se ştie că M_1 conţine 5 % Al, M_2 10 %, iar M_3 15 %. Costul unitar (tonă) la M_1 este de 3 u. b., la M_2 de 2 u. b., iar la M_3 de 5 u. b. Cum trebuie făcut amestecul pentru a-l obţine la un cost minim?

12. Unui oraş i s-au repartizat următoarele materiale pentru construcţia de locuinţe: 13 000 000 cărămizi, 150 000 saci cu ciment, 11 000 t plăci prefabricate. Se pot alege două tehnologii: prima, pentru o locuinţă sînt necesare 20 000 cărămizi, 100 saci cu ciment şi 10 t prefabricate, la a doua 10 000 cărămizi, 300 saci cu ciment şi 20 t de prefabricate. Cîte locuinţe urmează să se construiască cu fiecare tehnologie pentru a se obţine un număr cît mai mare de locuinţe? (Se cere modelul matematic şi rezolvarea pe cale geometrică.)

13. Să se rezolve pe cale grafică :

$$[\min] f = 500x + 600y$$

$$\frac{x}{60} + \frac{y}{50} \geq 1$$

$$x + y \leq 60$$

$$x \geq 30,\ y \geq 20.$$

14. Să se rezolve pe cale grafică :

$$[\min] f = x_2 - x_1$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 - 2x_2 \leq -8$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

15. Să se rezolve pe cale geometrică :

$$[\min] f = x_2 - x_1$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_i + x_2 \geq 5$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

16. Să se rezolve pe cale geometrică :

$$[\max] f = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

17. O întreprindere fabrică două tipuri de produse P_i $(i = 1;2)$ în cantitățile 30, respectiv 50 unități și dispune de trei resurse $R_j (j = 1, 2, 3)$ în cantitățile de 50, 80, respectiv 40 unități.

Pentru realizarea produsului, P_1, sînt necesare 10 unități din R_1 și 20 unități din R_2, iar pentru realizarea lui P_2 sînt necesare cîte 10 unități din cele trei resurse.

Dacă beneficiul pe unitate de produs este de 300 lei respectiv 500 lei, să se determine numărul de unităţi de produse fabricate astfel încît beneficiul realizat să fie cît mai mare.

18. Pentru obţinerea a două tipuri de produse $P_i (i = 1,2)$, un atelier şcoală foloseşte patru resurse R_j $(j = 1, 2, 3, 4)$, avînd la dispoziţie 20, 21, 10 respectiv 12 unităţi. O unitate din produsul P_1, necesită 2 unităţi din R_1, 3 unităţi din R_2, 2 unităţi din R_3, iar pentru realizarea unei unităţi din P_2 sînt necesare 5 unităţi din R_1, 3 unităţi din R_2 şi 4 unităţi din R_4.

Ştiind că fiecare unitate de produs P_i aduce un beneficiu de 200 lei, respectiv 400 lei, să se afle cîte unităţi din fiecare produs trebuie să se execute pentru obţinerea unui beneficiu total maxim.

19. Să se afle cea mai mare valoare a funcţiei:

$$f = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3,$$

cu condiţiile: $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leqslant 8.$$

20. Să se rezolve pe cale grafică:

$$(\max) \quad f = -x_1 + 2x_2$$

$$x_1 - 8x_2 \leqslant 10$$

$$x_1 + x_2 > 1$$

$$x_1 - 5x_2 \geqslant -5$$

$$3x_1 + 10x_2 \leqslant 30.$$

21. Să se afle cea mai mică valoare a funcţiei $f = -2x_1 - x_2 + 3x_3$, ţinînd seama de condiţiile:

$$x_1 + x_2 \geqslant 2;\ 3x_1 + x_2 \leqslant 6;\ x_3 \leqslant 3.$$

22. Să se găsească cea mai mare valoare a funcţiei $f = 3x_1 + 3x_2$ ţinînd seama de condiţiile:

$$5x_1 + 3x_2 \leqslant 15;\ 2x_1 + 6x_2 \leqslant 12;\ 2x_1 \leqslant 6;\ 2x_2 \leqslant 4;\ x_1 \geqslant 4;\ x_2 \geqslant 0.$$

23. Să se afle cea mai mică valoare a funcţiei

$$f = 10x_1 + 14x_2,$$

ţinînd seama de condiţiile :

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \geqslant 35 \\ 2x_1 \geqslant 4 \\ x_2 \geqslant 1. \end{cases}$$

24. Să se afle cea mai mare valoare a funcţiei

$$f = 8x_1 + 6x_2,$$

ţinînd seama de condiţiile :

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leqslant 12 \\ 7x_1 + 5x_2 \leqslant 35 \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 3 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant \dfrac{19}{3}. \end{cases}$$

Capitolul 23

EXERCIȚII DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

23.1. EXERCIȚII REZOLVATE

Limite

1. Să se calculeze limita șirului:

$$S_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^n}}.$$

Soluție

$$S_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^n}} = \frac{\dfrac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}}{\dfrac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}}};$$

Prin urmare avem:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{3}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{3^n}} = \frac{4}{3}$$

2. Să se calculeze :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}, \ |a|<1;\ |b|<1.$$

Soluție

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}} =$$

$$= \frac{1-b}{1-a} \cdot \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty} a^{n+1}}{1-\lim\limits_{n\to\infty} b^{n+1}} = \frac{1-b}{1-a}.$$

3. Se dă șirul cu termen general :

$$u_n = \frac{n(a-1)+1}{n(a+2)-1}\left(1+\frac{1}{na}\right)^n, \quad n \in N, \quad a \in R.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Soluție

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(a-1)+\dfrac{1}{n}}{(a+2)-\dfrac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{na}\right)^{na}\right]^{\frac{1}{a}} = \frac{a-1}{a+2}\, e^{\frac{1}{a}}.$$

4. Să se demonstreze că numărul e este irațional.

Demonstrație. Să presupunem că numărul e este rațional. Fie $e = \dfrac{m}{n}$, unde m și n sînt două numere întregi.

Avem :

$$e = \frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!} \text{ unde } 0 < \theta_n < 1.$$

Înmulțind ambii membri ai acestei expresii cu $n!$, obținem :

$$m(n-1)! - n!\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}\right) = \frac{\theta_n}{n}.$$

Aceasta ne duce la o contradicţie, deoarece în membrul sting al acestei egalităţi avem un număr întreg, iar în partea dreaptă o fracţie.

5. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$$

Soluţie. Să notăm:

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}.$$

Atunci avem:

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{5}{2^3}-\frac{3}{2^3}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{2n-1}{2^n}-\frac{2n-3}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

sau:

$$S_n=1+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}=$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}.$$

În felul acesta avem:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+2-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)=$$

$$= 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-2}} - 2\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Se observă că:

$$\left|\frac{n}{2^n}\right| = \frac{n}{(1+1)^n} = \frac{n}{1 + n + \frac{n(n+1)}{2} + \ldots + 1} < \frac{2n}{n(n-1)}.$$

Prin urmare: $0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n-1}$, sau:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0. \text{ Deci } \lim_{n\to\infty} S_n = 3.$$

6. Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2})$.

Soluție. Expresia de sub semnul limitei se scrie astfel:

$$S_n = \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\sqrt[2^n]{2} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}} = 2^{1-\frac{1}{2^n}} = \frac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}}$$

Pentru $n > 2$ avem:

$$\left(2^{\frac{1}{2^n}}\right)^{2^n} = \left[1 + \left(2^{\frac{1}{2^n}} - 1\right)\right]^{2^n} > \left[1 + \left(2^{\frac{1}{2^n}} - 1\right)\right]^n = 1 + n\left(2^{\frac{1}{2^n}} - 1\right) +$$

$$+ \ldots + \left(\frac{1}{2^{2^n}} - 1\right)^n > n\left(2^{\frac{1}{2^n}} - 1\right).$$

Din relația: $0 < 2^{\frac{1}{2^n}} - 1 < \frac{2}{n}$, deducem că $\lim_{n\to\infty}\left(2^{\frac{1}{2^n}} - 1\right) = 0$.

Prin urmare avem:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = 2.$$

7. Să se arate că: $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

Soluţie. Să demonstrăm mai întîi următoarea inegalitate : $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$.
Vom folosi metoda inducţiei complete relativ la n.
Pentru $n = 1$, inegalitatea este evidentă. Să arătăm că dacă este adevărată pentru n, atunci va fi adevărată şi pentru $n+1$.
Pentru $n+1$ vom avea :

$$(n+1)! = n!(n+1) > \left(\frac{n}{3}\right)^n (n+1) = \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Avem :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$ Prin urmare avem :

$$(n+1)! > \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}.$$

Din această relaţie deducem :

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0 \text{ şi deci } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

8. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, un şir de numere reale. Să se cerceteze legătura dintre convergenta respectiv divergenţa şirurilor :

$$(a_n)_{n\geq 1},\ ([a_n])_{n\geq 1} \text{ şi } (a_n - [a_n])_{n\geq 1}.$$

Soluție. Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $(\forall)$ $n \geq 1$ este convergent în timp ce șirurile $([a_n])_{n\geq 1}$ și $(a_n - [a_n])_{n\geq 1}$ sînt divergente.

Într-adevăr este suficient să observăm că:

$$\left[\frac{(-1)^n}{n}\right] = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n \text{ par} \\ -1, \text{ dacă } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$\frac{(-1)^n}{n} - \left[\frac{(-1)^n}{n}\right] = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ dacă } n \text{ par} \\ -\frac{1}{n} + 1, \text{ dacă } n \text{ impar.} \end{cases}$$

Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_n = \begin{cases} 1, \text{ dacă } n \text{ par} \\ \frac{3}{2}, \text{ dacă } n \text{ impar,} \end{cases}$ este divergent în timp ce șirul $([a_n])_{n\geq 1}$ este convergent deci $(a_n - [a_n])_{n\geq 1}$ este divergent.

Într-adevăr avem: $[a_n] = 1$, $(\forall)$ $n \geq 1$.

Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_n = n + \frac{1}{n}$ $(\forall)$ $n \geq 1$ este divergent, șirul $([a_n])_{n\geq 1}$ este divergent în timp ce șirul $(a_n - [a_n])_{n\geq 1}$ este convergent.

Într-adevăr $[a_n] = n$ și $a_n - [a_n] = \frac{1}{n}$ $(\forall)$ $n \geq 1$.

Prin urmare nu există nici o legătură între convergența respectiv divergența șirurilor considerate.

9. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir convergent de numere reale care are limita a și $(b_n)_{n\geq 1}$ un șir definit astfel: $b_n = b + (-1)^n \sin a_n$, $\forall$ $n \geq 1$ cu $b \in R$ fixat. Pentru ce valori ale lui a șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este convergent și care este în acest caz limita sa.

Indicație. Evident $b_{2n} \to b + \sin a$; $b_{2n+1} \to b - \sin a$, deci $(b_n)_{n\geq 1}$ este convergent $\Leftrightarrow$ $\sin a = 0 \Leftrightarrow a = k\pi$, $k \in Z$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Limite. Continuitate.

Funcții.

1. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}.$$

Soluție.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x - \sin x}{\cos^2 x(\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sin x\sqrt[3]{\sin x} + \sin^2 x)} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,(\sin^2 x - 1)}{\cos^2 x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin x\cos^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{3}.$$

2. Să se calculeze :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}.$$

Soluție.

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1 + \cos x - \cos 3x + 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-(1-\cos x) + (1-\cos 3x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2} = 2\left[\lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{4} +\right.$$

$$\left. + \frac{9}{4}\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\frac{3x}{2}}{\frac{9x^2}{4}}\right] = 2\left(-\frac{1}{4} + \frac{9}{4}\right) = 4.$$

3. Să se calculeze :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}.$$

Soluție.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{3}$$

4. Să se calculeze : $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[4]{x^4+1} - x)$.

Soluție. Avem :

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[4]{x^4+1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt[4]{x^4+1} - x)(\sqrt[4]{x^4+1}+x)(\sqrt{x^4+1}+x^2)}{(\sqrt[4]{x^4+1}+x)(\sqrt{x^4+1}+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[4]{x^4+1}+x)(\sqrt{x^4+1}+x^2)} = 0.$$

5. Să se studieze limita funcției :

$$f(x) = \frac{2x - \sin x}{\sqrt{1-\cos x}}, \text{ în punctul } x = 0.$$

Soluție. Avem $f(x) = \dfrac{2x - 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\sqrt{2\sin^2\dfrac{x}{2}}} = \dfrac{2x - 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\sqrt{2}\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}$

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \begin{cases} -\sin\dfrac{x}{2}, & \text{dacă } x < 0 \\ \sin\dfrac{x}{2}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Prin urmare obținem :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2x - 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{4\dfrac{x}{2}}{\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}} -$$

$$-\frac{2}{\sqrt{2}}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \cos\frac{x}{2} = \frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{2x - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{4\frac{x}{2}}{-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}} +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{2}}\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \cos\frac{x}{2} = -\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

6. Să se calculeze : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$.

Soluție. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}\left[\sqrt[m]{1+\alpha x}-1\right]}{x} +$$

$$+\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\sqrt[n]{1+\beta x}\,\alpha \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{\alpha x} +$$

$$+\beta\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{\beta x} = \frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}.$$

7. Să se calculeze :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$$

Soluție.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 1$$

8. Să se calculeze :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$$

Soluție. Punînd $x=1+t$ ($t\to 0$ pentru $x\to 1$), avem

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^m-1}{(1+t)^n-1}=\lim_{t\to 0}\frac{1+C_m^1t+C_m^2t^2+\ldots+C_m^mt^m-1}{1+C_n^1t+C_n^2t^2+\ldots+C_n^nt^n-1}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t(C_m^1+C_m^2t+\ldots+C_m^mt^{m-1})}{t(C_n^1+C_n^2t+\ldots+C_n^nt^{n-1})}=\lim_{t\to 0}\frac{C_m^1+\theta(t)}{C_n^1+\theta'(t)}=$$

$$=\frac{m}{n};\quad \theta(t)\underset{t\to 0}{\to}0,\ \theta'(t)\underset{t\to 0}{\to}0.$$

9. Să se calculeze :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x},\quad (x\in R).$$

Soluție. Punînd $\sqrt[n]{1+x}-1=t$, atunci $x=(1+t)^n-1$.

Pentru $|x|<1$, avem : $1-|x|<\sqrt[n]{1+x}<1+|x|$, de unde rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$

Prin urmare avem : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{(1+t)^n-1}$.

Ținînd seama de exercițiul precedent vom avea :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{(1+t)^n-1}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{nt+\theta(t)}=\frac{1}{n}.$$

10. Să se calculeze : $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$

Soluție. Să notăm $x = \pi + t$ $(t \to 0)$ și atunci vom avea :

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(m\pi + mt)}{\sin(n\pi + nt)} = \lim_{t\to 0} \frac{(-1)^m}{(-1)^n} \cdot \frac{\sin mt}{\sin nt} =$$

$$= (-1)^{m-n} \cdot \frac{m}{n} \lim_{t\to 0} \frac{\sin mt}{mt} \cdot \frac{nt}{\sin nt} = (-1)^{m-n} \frac{m}{n} .$$

11. Să se calculeze : $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$.

Soluție. Aplicînd formula : $\lim\limits_{x\to\infty} u(x)^{v(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} e^{v(x)\ln u(x)}$, obținem :

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} e^{x^2 \ln \frac{x+2}{2x+1}}$$

cum însă $\ln \dfrac{(x+2)}{2x+1} < 0$, pentru $x \to \infty$ vom avea :

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \ln \frac{1+\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x}}} = e^{-\ln 2 \lim\limits_{x\to\infty} x^2} = 0.$$

12. Să se calculeze : $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Soluție. $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{1+\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x(1+\sin x)}} = e^0 = 1.$$

13. Să se calculeze : $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$.

Soluţie. Să notăm $u = \dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}$, $v = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ şi atunci avem:

$$(u - 1)\, v = \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{1 + \sin x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\lim_{x \to 0} (u - 1)\, v = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x (1 + \sin x)} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^2}{2} + \theta(x^2)}{\left[1 - \dfrac{x^2}{2} + \theta(x^2)\right](1 + x + \theta(x)) \cdot (x^2 + \theta(x^2))} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^2}{2} + \theta(x^2)}{x^2 + \theta'(x)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2};\ \ (\underset{x \to 0}{\theta(x^2)};\ \underset{x \to 0}{\theta'(x^2) \to 0}).$$

Dar $\lim\limits_{x \to 0} u^v = \lim\limits_{x \to 0} \{[1 + (u - 1)]^{\frac{1}{u-1}}\}^{(u-1)v} = e^{\lim\limits_{x \to 0}(u-1)v}$.

Prin urmare avem:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

14. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to 1-0} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{1 - x}$; *b*) $\lim\limits_{x \to 1+0} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{1 - x}$

Soluţie.

a) Să notăm $\dfrac{1}{1 - x} = \operatorname{tg} t$. Atunci $\operatorname{tg} t \to +\infty$ pentru $x \to 1 - 0$, astfel încît dacă $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$, atunci $t =$ $= \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{1 - x} \to \dfrac{\pi}{2}$, pentru $x \to 1 - 0$.

15. Să se determine a astfel încît funcţia :

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geqslant 0 \\ a(1 + \cos x), & x < 0 \end{cases}, \text{ să aibă limită în punctul } x = 0.$$

Soluţie. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \cos x = 1.$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} a(1 + \cos x) = 2a$$

Din definiţie rezultă că $f(x)$ are o limită dacă $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$

sau $2a = 1$; $a = \dfrac{1}{2}$.

16. Se dă funcţia : $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$.

Să se studieze continuitatea funcţiei în punctul $x = 0$.

Soluţie.

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(x + \frac{x}{x}\right) = 1.$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(x - \frac{x}{x}\right) = -1.$$

Funcţia nu este deci continuă în punctul $x = 0$.

DERIVATE

1. Se dă funcţia : $f(x) = \sqrt{1 - \cos(2\pi \sin x)}$.

Să se studieze derivabilitatea funcţiei în punctul $x = 0$

Soluţie.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{(1 - \cos\ (2\pi \sin x)}}{x} = \frac{\sqrt{2 \sin^2 (\pi \sin x)}}{x} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,|\sin (\pi \sin x)|}{x}.$$

$$|\sin\ (2\pi \sin x)| = \begin{cases} \sin\ (\pi \sin\ x),\ x > 0 \\ -\sin\ (\pi \sin x),\ x < 0 \end{cases}$$

Prin urmare vom avea :

1) $$f'_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{2}\ \sin(\pi \sin x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{2}\,\pi \sin(\pi \sin\ x)}{\pi\ \sin x}\cdot$$

$$\cdot \frac{\sin x}{x} = \pi \sqrt{2} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin\ (\pi \sin x)}{\pi \sin x} \cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \cdot \frac{\sin x}{x} = \pi\sqrt{2}$$

2) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left[-\pi\sqrt{2}\cdot \frac{\sin\ (\pi \sin\ x)}{\pi\ \sin\ x}\cdot \frac{\sin\ x}{x}\right] =$$

$$= -\ \pi\sqrt{2} \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\sin(\pi \sin x)}{\pi \sin x} \cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\sin x}{x} = -\pi\sqrt{2}$$

Prin urmare funcţia nu este derivabilă în punctul $x = 0$.

2. Se consideră funcţia $f(x) = \begin{cases} \sin^3\ \pi|x|, \text{ pentru } x \neq 0 \\ 0\qquad\quad, \text{ pentru } x = 0 \end{cases}$

Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei în punctul $x = 0$.

Soluţie. Studiem mai întîi continuitatea.

1) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin^3 \pi\ x}{\pi^3\ x^3} \cdot \pi^3\, x^3 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{\sin\ \ \pi x}{x}\right)^3 \cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \pi^3\, x^3 = 0$$

2) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\frac{\sin^3 \pi x}{\pi^3 x^3}\cdot \pi^3 x^3 = -\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^3 \cdot$$

$$\cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (\pi^3 x) = 0.$$

Funcţia este prin urmare continuă.

Derivabilitatea :

$$f_d'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(\pi x)}{\pi^3 x^3}\cdot \pi^3 x^2 = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin (\pi x)}{\pi x}\right]^3 \cdot \pi^3 x^2 = 0.$$

$$f_s'(0) \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(0)}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(\pi x)}{\pi^3 x^3}\, \pi^3 x^2 = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right]^3 \cdot \pi^3 x^2 = 0.$$

Funcţia este derivabilă în punctul $x = 0$.

3. Să se determine valorile a şi b pentru ca funcţia :

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + b, & \text{dacă } x \in (-2,2] \\ 2ax^3 + 11a, & \text{dacă } x \in (2, +\infty) \end{cases}$$, să fie continuă şi derivabilă pe intervalul $(-2, +\infty)$.

Soluţie.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{x\to 2} (2x^2 + b) = 8 + b.$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} 2ax^3 + 11a = 16a + 11a = 27\,a.$$

Pentru ca funcţia să fie continuă în punctul $x = 2$ este necesar şi suficient să fie satisfăc ută relaţia :

$$8 + b = 27\,a.$$

$$f'_s(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} 2(x + 2) = 8.$$

$$f'_d(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>2}} \frac{2ax^3 - 16a}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{2a(x^3 - 8)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} 2a(x^2 + 2x + 4) = 24a.$$

Pentru ca funcţia să admită o derivată în punctul $x = 2$, trebuie să fie satisfăcută egalitatea:

$$f'_d(2) = f'_s(2),$$

sau $24\,a = 8 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{3}$ şi din relaţia $b + 8 = 27\,a$, rezultă $b = 1$.

4. Să se calculeze derivata funcţiei:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, \text{ pentru } -\infty < x < 1 \\ (1 - x)(2 - x), \text{ pentru } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ -(2 - x), \text{ pentru } 2 < x < 8 \end{cases}$$

Soluţie.

Funcţiile $1 - x$; $(1 - x)(2 - x)$ şi $-(2 - x)$ sînt derivabile pe domeniile corespunzătoare $-\infty < x < 1$; $1 < x < 2$ şi $2 < x < \infty$.

Prin urmare avem:

$$f'(x) = \begin{cases} -1, \text{ pentru } -\infty < x < 1 \\ 2x - 3, \text{ pentru } 1 < x < 2 \\ 1, \text{ pentru } 2 < x < +\infty \end{cases}$$

Să calculăm acum derivatele la dreapta şi la stînga în punctele $x = 1$, $x = 2$.

Din definiţie avem :

$$f_d'(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{(1-x)(2-x)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x-2)=-1$$

$$f_s'(2)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{(1-x)(2-x)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(x-1)=1.$$

$$f_d'(2)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{-(2-x)}{x-2}=1$$

Prin urmare avem :

$$f_s'(1)=f_d'(1)=f'(1)$$

$$f_s'(2)=f_d'(2)=f'(2)$$

Derivata poate fi scrisă sub forma :

$$f'(x)=\begin{cases}-1, \text{ pentru } -\infty<x<1\\ 2x-3, \text{ pentru } 1\leqslant x\leqslant 2\\ 1, \text{ pentru } 2<x<\infty\end{cases}$$

5. Fie funcţia : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, \text{ pentru } 0\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{x}, \text{ pentru } 1<x<\infty\end{cases}$

Să se determine valoarea lui c, din formula creşterilor finite $f(x+h)-$ $-f(x)=hf'(c)$, aplicată funcţiei $f(x)$ pe intervalul $[0,2]$.

Soluţie.

Va trebui să studiem la început derivabilitatea funcţiei $f(x)$ în punctul $x=1$.

Din definiţia derivatei avem :

$$f_s'(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{\frac{3-x^2}{2}-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{1-x^2}{2(x-1)}=-\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x^2-1}{2(x-1)}=-1$$

$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x-1} = -\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x(x-1)} = -1.$$

Prin urmare funcţia f este derivabilă pe intervalul [0,2]. Aplicînd formula creşterilor finite funcţiei f pe intervalul [0,2], obţinem :

$$f(2) - f(0) = 2f'(c)\,;\ 0 < c < 2$$

Dar $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(0) = \frac{3}{2}$

$$f'(x) = \begin{cases} -x \text{ pentru } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\frac{1}{x^2} \text{ pentru } 1 < x < 2 \end{cases}$$

Atunci obţinem : $f'(c) = \begin{cases} -2c, \text{ pentru } 0 < c \leqslant 1 \\ -\frac{2}{c^2}, \text{ pentru } 1 < c < 2 \end{cases}$

de unde rezultă că : $c_1 = \frac{1}{2}$; $c_2 = \sqrt{2}$.

6. Se consideră o funcţie continuă $f(x)$, avînd proprietatea că

$$f(a) = 0\,;\ f(b) = 0.$$

Să notăm $\varphi(x) = (x-a)(x-b)\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$.

Aplicînd teorema lui Rolle, funcţiilor $f(x) - \varphi(x)$ şi $f'(x)$, arătaţi că există o valoare γ pe intervalul (a, b) astfel ca să fie satisfăcută relaţia :

$$f'(c) = (c-a)(c-b)\frac{f''(\gamma)}{2}.$$

Soluţie. Să notăm : $F(x) = f(x) - \varphi(x) = f(x) - (x-a)\ (x-b)$

$\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$

Avem :

$$F'(x) = f'(x) - (2x - a - b) \cdot \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

$$F''(x) = f''(x) - \frac{2\,f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

Deoarece $F(a) = F(c) = F(b) = 0$; după teorema lui Rolle există un număr α $(a < \alpha < c)$ şi un număr β $(c < \beta < b)$ astfel încît să avem :

$$F'(\alpha) = 0; \quad F'(\beta) = 0; F''(\gamma) = 0, \ \alpha < \gamma < \beta.$$

Prin urmare : $f''(\gamma) - \dfrac{2f'(c)}{(c-a)(c-b)} = 0.$

7. Să se calculeze : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^x - 1}{\ln x - x + 1}$.

Soluţie. Avem cazul de excepţie $\dfrac{0}{0}$. Aplicînd regula lui l'Hospital obţinem :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^x(\ln x + 1)}{\dfrac{1}{x} - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^{x+1} \quad (\ln x + 1)}{1 - x} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \left[1 - x^{x+1}(\ln x + 1)\,(1 + \frac{1}{x} + \ln x) - x^2\right] = -2$$

8. Să se calculeze : $Z = \lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Soluţie. Avem cazul de excepţie 1^∞.
Folosind formula $u^v = e^{v \ln u}$ $(u > 0, \ v > 0)$,

Obţinem :

$$u = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right)} = e^{-1}.$$

9. Să se afle intervalul de monotonie al funcţiei :

$$f(x) = x + |\sin 2x|.$$

Soluţie. Ţinînd seama de definiţia funcţiei modul, avem :

$$f(x) = \begin{cases} x + \sin 2x, \text{ pentru } e\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x - \sin 2x, \text{ pentru } \pi\left(k + \frac{1}{2}\right) < x < \pi + k\pi \\ \frac{k\pi}{2}, \text{ pentru } x = \frac{k\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

Derivata funcţiei $f(x)$ este :

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 2\cos 2x, \text{ dacă } k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 1 - 2\cos 2x, \text{ dacă } \frac{\pi}{2} + k < x < \pi + k\pi. \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul de inecuaţii :

$$\begin{cases} 1 + 2\cos 2x > 0 \\ k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 - 2\cos 2x > 0 \\ \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi, \end{cases} \tag{1}$$

se deduce că $f'(x) > 0$, pentru $k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$ şi pentru

$$\pi\left(k + \frac{1}{2}\right) < x < \frac{\pi}{2} + \pi\left(k + \frac{1}{2}\right) \text{ sau } x \in \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{3}\right) \cup$$

$$\cup \left(\pi k + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{k}{2}\right)$$

Soluţiile sistemului de inecuaţii (1) pot fi reprezentate pe cercul trigonometric.

Soluţia celor două sisteme este : $x \in \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right)$

Prin urmare funcţia $f(x)$ este crescătoare pe intervalul :

$$\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right) \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots)$$

Pe intervalul $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ funcţia $f(x)$ este descrescătoare deoarece pe aceste intervale $f(x) < 0$.

10. Să se stabilească asimptotele funcţiei

$$f(x) = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} \quad ,(x > 0).$$

Soluţie. Ecuaţia asimptotei oblice are forma $y = kx + b$. Trebuie să aflăm pe k.

Avem $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^x}{(x+1)^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}$.

Pentru determinarea lui b, avem

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^{x+1}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} - \frac{1}{e}\right] = \frac{1}{e^2}\lim_{x\to\infty} x\left[e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] =$$

$$= \frac{1}{e^2}\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\left[\frac{e-(1+t)^{\frac{1}{t}}}{t}\right] = \frac{1}{e^2}\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}(1+t)^{\frac{1}{t}}\left[\frac{1}{t(t+1)} -\right.$$

$$\left.- \frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right] = -\frac{1}{e^2}\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)} =$$

$$= -\frac{1}{e^2}\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{-\ln(1+t)}{2t+3t^2} = \frac{1}{2e}.$$

Ecuaţia asimptotei este $y = \frac{1}{e} x + \frac{1}{2e}$.

11. Să se construiască graficul funcţiei

$$y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}.$$

Soluţie.

1) Funcţia dată este continuă, definită şi negativă, pentru orice x.
Funcţia este simetrică faţă de axa Oy pentru că $f(x)=f(-x)$.

2) $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2(x^2+1)} + \sqrt[3]{(x^2+1)^4}} = 0.$$

Funcţia dată nu are alte asimptote.

3) $$f'(x) = \frac{2[(x^2+1)^{2/3} - x^{4/3}]}{3x^{1/3}\ (x^2+1)^{2/3}}$$

Pentru $x = 0$, $f(0) = -1$ (minim).

4) $$f''(x) = -\frac{2}{9}\ x^{-\frac{4}{3}}(x^2+1)^{-\frac{5}{3}}\left[(x^2+1)^{\frac{5}{3}} + 3x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{10}{3}}\right] < 0$$

5) Tabelul de variaţie

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$- - - - -$		0	$+ + + + +$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	0

6) Graficul funcţiei (Lăsăm în seama cititorului reprezentarea grafică).

Calcului integral

1. Să se demonstreze că dacă $\int f(x)\,dx = F(x) + C$,

atunci $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F\,(ax+b)+C \quad (a \neq 0)$.

Demonstrație. În mod evident $f(ax+b)dx = \frac{1}{a} f(ax+b)\ d(ax+b)$. $(a \neq 0)$

Aplicînd metoda schimbării de variabile obținem:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\ d(ax+b) = \frac{1}{a}\int f(u)\,du =$$

$$= \frac{1}{a} F(u) + C, \text{ unde } u = ax+b.$$

2. Să se calculeze integrala:

$$I = \int \sqrt[3]{1-4x}\ dx$$

Soluție. Folosind rezultatul precedent avem:

$$\int u^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} u^{\frac{4}{3}} + C.$$

Prin urmare: $\int (1-4x)^{\frac{1}{3}} dx = -4 : \frac{3}{4}\ (1-4x)^{\frac{4}{3}} + C = -$

$$-3(1-4x)^{\frac{4}{3}} + C = -3\ (1-4x)\sqrt[3]{1-4x} + C.$$

3. Să se calculeze integrala:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}.$$

Soluție.

$$\int \frac{dx}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + C\left(x \neq -\frac{\pi}{4} + 2k\right)$$

4. Să se calculeze integrala: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Soluție. Pentru $x \neq 0$, avem $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{n^2+1}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} =$

$$= \int - \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = -\ln\left(\frac{1}{|x|} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) +$$

$$+ C = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right| + C.$$

5. Să se calculeze integrala $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\, dx$.

Soluție. Din egalitatea

$$\frac{x^2-1}{x^4+1}\, dx = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\, dx = \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2},$$

avem

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\, dx = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} + C.$$

23.2. EXERCIȚII PROPUSE

ȘIRURI

1. Folosind metoda inducției, să se demonstreze inegalitățile:

$\dfrac{1}{n+1} < \ln\dfrac{n+1}{n} < \dfrac{1}{n}$ și apoi considerînd șirurile:

$$a)\ a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$b)\ b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n},$$

să se arate că sînt convergente şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ln 2$

2. Să se demonstreze inegalităţile:

$$\sqrt{a^{n-m}} < \frac{m}{n} \frac{b-a}{\sqrt[n]{b^m} - \sqrt[n]{a^m}} < \sqrt[n]{b^{n-m}},$$

unde $a, b, m, n \in R_+$; $a < b$, $m < n$.

3. Să considerăm: $U_1 = a$, $U_2 = b$, $U_3 = \frac{1}{2}(U_2 + U_2) \ldots$

$$U_n = \frac{1}{2}(U_{n-1} + U_{n-2}) \ldots$$

a) Să se arate că termenii $V_n = U_n - U_{n-1}$ formează o progresie geometrică.

b) Să se afle U_n în funcţie de a, b, n şi apoi $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

4. Şirul de numere reale: $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ satisface condiţia:

$$1 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots$$

Şirul $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ este definit prin

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}$$

Să se arate că $0 \leqslant b_n \leqslant 2$ pentru orice n natural.

Fără a se aplica regula lui l'Hospital, să se calculeze limitele:

5. $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - (a+b)} \frac{\cos(a+b)\sin(a+x) - \cos b \sin x}{\cos(a+b+x)};$$

6. $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{\sin(a+x)\cos x - \sin(a+b)\cos b}{\sin(x-b)}$;

7. $\lim\limits_{a\to 1} \dfrac{(a^n-1)(a^{n-1}-1)\ldots(a^{n-p+1}-1)}{(a-1)(a^2-1)\ldots(a^n-1)}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{2x^2-3x+5} - \sqrt{2x^2+3x+1})$

9. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} [\sqrt[3]{(x+m)(x+n)(x+p)} - x]$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1})$;

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$;

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$;

14. Să se determine constantele a, b, astfel încît:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = 0;$$

15. Să se determine λ şi μ astfel încît:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3} - \lambda x - \mu) = 0;$$

16. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{nx^{n+2}-(n+2)x^{n+1}+(n+2)x-n}{(x-1)^3}$;

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(a+x) - \operatorname{arctg}(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}$;

18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x-2)\,e^x + x + 2}{x(1 - \cos x)}$;

19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \sin x + \ln(1-x) + x - 1}{x(x - \sin x)}$;

20. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(\cos \pi x + 2) + a(x-1)^2}{\ln(2 - 2x^n + x^{2n})}$;

21. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 + a}{x^2 + b}\right)^{x^2 + c}$; $a \neq b$

22. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{nx}{n^2 - 1}\right)^n$;

23. $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$;

24. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

25. $\lim\limits_{x \to a} \left(2 - \dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}$; 26. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1 - \sin \dfrac{\pi}{x}}{1 + \sin \dfrac{\pi}{x}}\right)^x$

27. $\lim\limits_{x \to 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$; 28. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}\right)^{e^x}$;

29. $\lim\limits_{x \to 0} (\ln x)^{\frac{1}{x - e}}$; 30. $\lim\limits_{x \to 0} \left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\right]^{\operatorname{ctg} \pi x}$

31. $\lim_{x\to\infty} [x(e^{\frac{1}{x}} - 1)]$; 32. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$;

33. $\lim_{x\to 0} \left[\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2} - \frac{1}{x}\right]$; 34. $\lim_{x\to 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$

35. *a*) Să se demonstreze identitatea:

$$\operatorname{tg}^2 a \ \operatorname{tg} 2a = \operatorname{tg} 2a - 2\operatorname{tg} a$$

b) Să se calculeze cu ajutorul ei, suma:

$$S_n = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\ \operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \ldots + 2^{n-1}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{n-1}}$$

c) Să se calculeze $\lim_{x\to 0} S_n$;

Să se calculeze limitele şirurilor:

36. $u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{2n}{3n+1}$;

37. $u_n = \frac{1}{n}\cos n^3 - \frac{3n}{6n+1}$;

38. $u_n = \frac{3n^2+2}{5n^2-1}$;

39. $u_n = \frac{n^2+1}{(n+1)^2}$; $u_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$;

40. $u_n = \dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}}$;

Să se găsească limitele:

41. $\lim\limits_{n\to 0}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; 42. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$;

43. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{5}}$; 44. $\lim\limits_{n\to\infty}[\ln(n+1)-\ln n]^n$

Să se calculeze limitele şirurilor avînd termenul general

45. $u_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$; 46. $u_n = \frac{C_n^k}{n^k}$;

47. $u_n = \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{n^n}$;

Să se calculeze limitele şirurilor avînd termenul general

48. $u_n = \frac{1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2}{n^3}$;

49. $u_n = \frac{1\cdot 3+2\cdot 4+\ldots+n(n+2)}{n^3}$

50. $u_n = \frac{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}$.

Să se calculeze limita şirului avînd termen general:

51. $S_n = U_1+U_2+\ldots+U_n$, dacă $U_n = \ln\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+4)}$

Să se demonstreze următoarele egalități:

52. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$; 53. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, $(a > 1)$;

54. $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$; 55. $\lim_{x\to\infty} nq^n = 0$, dacă $|q| < 1$.

56. $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$, $a > 1$.

57. Să se calculeze: $\lim_{x\to\infty} \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdots \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$

Funcții

Să se calculeze:

58. $\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^3}{2x^3 + 3x - 1}$; 59. $\lim_{x\to\infty} \frac{10x^2 + 3x + 1}{x^3 - x^2 - x}$; $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x}$.

60. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$; $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$.

61. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$; $\lim_{x\to 0} (1 + \mathrm{tg} x)^{\mathrm{ctg} x}$;

62. Să se afle: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2}$; 63. $\lim_{x\to\infty} x \ln \frac{2a + x}{a + x}$;

64. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{\sin 2x}$ 65. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{1 - \cos x}$;

Să se studieze limitele laterale ale funcțiilor:

66. $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ pentru } -\infty < x < 1 \\ 2x - 1, \text{ pentru } 1 \leqslant x < \infty \end{cases}$, în punctul $x = 1$.

67. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{pentru } 0 < x < 1 \\ x, & \text{pentru } 1 \leqslant x < 2 \\ 3, & \text{pentru } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$, în punctul $x = 1$ şi $x = 2$.

Să se calculeze limitele:

68. $\lim_{x \to 0} (\cos \sqrt{x} - \cos \sqrt{x+1})$; 69. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$

70. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + k \sin x} - \cos x}$; 71. $\lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x}{x(1 - \cos 3x)}$;

72. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$;

73. Să se calculeze limitele:

$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - ax)$ şi să se discute după valorile lui a.

74. Să se calculeze:

$\lim_{x \to \pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 1} - x)$;

Să se calculeze limitele:

75. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \operatorname{tg} 2x$; 76. $\lim_{x \to 0} \left[\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right]$;

77. $\lim_{x \to 0} \frac{2x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$; 78. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos \alpha x}{\ln \cos \beta x}$;

79. $\lim_{x \to a} \frac{a^x - x^a}{x - a} (a > 0)$; $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} (\cos x)^{\sqrt{2}}}{x^2}$;

80. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\alpha x^2} \cos^2 x^\alpha - 1}{x^2}$; 81. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}^a x}{x}$ $(a \neq 0)$;

82. Să se determine a astfel încît să avem:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{1 + x^2} - ax}{x} = 0$$

83. Se dă funcţia:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sin x}, & x \neq 0; \\ \sqrt{2}, \ x = 0 \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea în punctul $x = 0$.

84. Să se determine parametrul a, astfel ca funcţia:

$$f(x) = \begin{cases} a \ln (x + 2), & x \geqslant 0, \\ (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}}, & x < 0, \end{cases}$$

să fie continuă în punctul $x = 0$.

85. Să se afle domeniile maxime de definiţie al funcţiilor:

a) $f(x) = \sqrt{2^{2x+4} - 4^x - 30}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{\cos 2x - 3 \cos x + 2}{1 - \cos x}}$;

c) $f(x) = \arccos \sqrt{\ln (x^2 - 1)}$;

86. Se consideră funcţia: $f(x) = \ln [mx^2 + 2(m + 2)x + 9]$.

a) Să se determine m astfel încît funcţia dată să fie definită pe toată axa reală.

b) Să se arate că pentru valorile găsite ale lui m, funcţia are un minim.

87. Se dau funcţiile : $f(x) = \ln(-2x^2 - x + 1), g(x) = -4x^2 - x$

Se cere : *a*) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

b) Domeniul maxim de definiţie al funcţiei $F(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$

88. Să se reprezinte grafic funcţia :

$f(x) = \min [\,|x - 4|\,, 2]$.

89. Să se reprezinte grafic funcţia :

$f(x) = \text{arctg}\, x + \text{arctg}\, x \frac{1 - x}{1 + x}$

90. Să se calculeze domeniul de definiţie şi asimptota oblică pentru funcţia $f(x) = x \ln \left(e + \frac{1}{x}\right)$.

91. Fie funcţia $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{x^2 + 2x + 4}$. Să se construiască graficul funcţiei $f(x)$, determinîndu-se şi punctele de inflexiune.

92. Să se reprezinte grafic funcţiile :

a) $y = \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^2}$; *b*) $y = \frac{x(x - 4)}{x^2 + 2}$;

c) $y = \frac{x(x^2 - 9)}{x^2 - 1}$; *d*) $y = \frac{(x + 2)^2(x - 3)}{(x + 3)^2}$;

e) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 10}}{x + 1}$; *f*) $y = \sqrt{\frac{x(2 - x)}{x^2 - 4x + 3}}$;

g) $y = \sqrt{\dfrac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 + x - 4}}$.

93. Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f(x) = \dfrac{|x^3 - x|}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x^3 - x|}{x^2 - 1}}$

c) $y = \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+1)}$

d) $y = |x^2 - 4x| + 4$

94. Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $y = \ln \dfrac{|x^2 - 7x + 10|}{x - 1}$

b) $y = \ln \left| \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 1} \right|$

c) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x}$

d) $y = \dfrac{2 \sin 2x - 2(\sin x + \cos x) + 1}{\sin x + \cos x}$

95. Se dă funcţia $y = (1 + \cos x)e^x$, $x \in [0, 2\pi]$

a) Să se determine pantele tangentelor în punctele de inflexiune.

b) Să se reprezinte grafic şi să se calculeze aria cuprinsă între grafic, axa Ox şi dreptele $x = \pi$, $x = 2\pi$.

96. Să se reprezinte grafic funcţia $f(x) = e^x - 1 - x$.

Să se calculeze aria domeniului limitat de graficul funcţiei pentru $0 \leq x \leq 1$, segmentul $[0, 1]$ de pe axa Ox şi paralela $x = 1$ la Oy.

97. Se consideră funcţia:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln a, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \ (a > 0). \end{cases}$$

Să se reprezinte grafic şi să se calculeze aria cuprinsă între grafic, axa Ox şi punctele de intersecţie a graficului cu această axă. Fie x_1 rădăcina nenulă a ecuaţiei $f(x) = 0$ şi x_2 abscisa punctului de extrem.

Considerînd x_1, x_2 termenii consecutivi ai unei progresii geometrice infinite, să se calculeze suma S a acestei progresii.

Să se calculeze $\lim\limits_{a \to 0} (e^a - 1)S$.

98. Să se reprezinte grafic funcţia $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x^2 - x}$ şi să se arate că punctul de intersecţie al curbei cu asimptota oblică, este centru de simetrie al curbei.

99. Se dă funcţia: $y = \dfrac{x + 2}{(x + 1)^2}$

a) Să se reprezinte grafic şi să se arate că tangenta la grafic în punctul de intersecţie cu axa Ox, intersectează din nou graficul în punctul de intersecţie cu axa Oy.

b) Să se calculeze suma:

$$S = y(0) + y'(0) + y''(0) + \ldots + y^{(2n)}(0) - 1$$

c) Notînd cu $F(\lambda)$ aria limitată de grafic şi axa Ox pentru $0 \leqslant x \leqslant \lambda$, să se calculeze $F'(0)$.

d) Să se determine valorile $y \in N$, pentru care x este raţional şi să se afle suma inverselor tuturor acestor valori.

100. Se dă funcţia $f(x) = mx + x^2 \ln x$. Să se afle locul geometric al punctelor de extrem cînd m este un parametru variabil şi să se reprezinte grafic acest loc geometric.

101. Să se afle conul de axă totală minimă circumscris unei sfere date de rază R.

102. Dintre toate triunghiurile dreptunghice care au suma unei catete cu ipotenuza constantă şi egală cu k să se afle cel de arie maximă.

103. Dintre toţi cilindrii de arie totală dată $2a^2$, să se determine cilindrul de volum maxim.

104. Să se înscrie într-o sferă de raza R, un trunchi de con avînd ca bază un cerc mare, a cărei arie laterală să fie maximă (se va alege ca variabilă x, raza mică a trunchiului de con).

105. Se dă triunghiul ABC dreptunghic în A. Notînd cu a, b, c laturile şi $y = \frac{a+b+c}{2}$, să se exprime y în funcţie de $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = x^2$. Din studiul funcţiei obţinute să se afle între ce limite poate varia y.

106. Pe segmentul AB se ia punctul C şi se descrie un cerc cu centrul în C, de rază CB. Din A se duce tangenta AD la cerc. Să se afle maximul ariei triunghiului ACD cînd C parcurge segmentul AB ($AB = \alpha$).

107. Să se aplice formula creşterilor finite funcţiilor:

a) $f(x) = \operatorname{arctg}(2x - \sqrt{3})$, în intervalul $(0, \sqrt{3})$;

b) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1/4)$, în intervalul $(0, 3)$.

Calcul integral

108. Să se calculeze următoarele integrale de funcţii reale:

a) $\int \frac{2dx}{x^2 - 4x + 3}$; b) $\int \frac{dx}{3x^2 - 10x + 3}$; c) $\int \frac{dx}{x^2 - (a+b)x + ab}$;

109. *a*) $\int \frac{dx}{2x^2 + 5ax - 3a^2}$; *b*) $\int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)}$;

c) $\int \frac{dx}{x^2(x+2)}$; *d*) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$;

e) $\int \frac{dx}{a^2x^2 + 2abx + a^2 + b^2}$; *f*) $\int \frac{(x+1)dx}{(x-1)(x^2+x+1)}$;

110. $\int \frac{(x^3 + 2x - 1)dx}{(x^2 - 2x + 3)x^2 + 4}$; $\int (2x + a)\left[1 + \frac{1}{x^2 + a^2}\right] dx$;

111. Să se calculeze cu ajutorul unor substituţii convenabile, integralele:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2e^x}}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x(3+x)}}; \quad \int \frac{dx}{2x-3\sqrt{x+1}};$$

112. $$\int \frac{dx}{(x+a^2)\sqrt{x-2a^3}}; \quad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx; \quad \int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx;$$

113. Să se calculeze cu ajutorul integrării prin părţi integralele:

a) $\int (x^2+x)e^x\,dx$; $\int (ax^2+2x+2a^3)e^{ax}\,dx$;

$$\int \frac{xe^{ex}\,dx}{(1+ax)^2}; \quad \int \left[\frac{x^2+x+2}{2}+(2x+1)\ln x\right]dx;$$

b) $$\int \left[\frac{2x^2-a}{x^2+a^2}+\ln(x^2+a^2)\right]dx;$$

$$\int \left[1+\frac{x}{1+x^2}+(2x+1)\,\mathrm{arctg}\,x\right]dx;$$

$\int [(x^2+2x-1)\cos x-(x-1)^2\sin x]dx$;

c) $\int [(1-a^2+ax)\cos ax+(1-a^2-ax)\sin ax]dx$;

$\int x^3\sin x\,dx$; $\int x^3\cos x\,dx$; $\int \sin(\ln x)dx$; $\int \cos(\ln x)\,dx$;

114. Să se calculeze integralele:

$$I_1=\int \frac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x}; \qquad I_2=\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x+\cos x};$$

115. Să se calculeze următoarele integrale definite:

a) $$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+4\cos x}; \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5-3\sin x};$$

b) $$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}; \quad \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x}; \quad \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{3\sin x+\cos x};$$

c) $\int_0^a \frac{dx}{x + a^2 - x^2}$; $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1 - (\ln x)^2}}$; $\int_1^e \frac{\ln x \, dx}{(1 + x)^2}$;

d) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} + 2}$; $\int_{-a}^{a\sqrt{3} - 2a} \frac{dx}{x^2 + 4ax + 5a^2}$;

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1 + |x|}{1 + x^2} dx - 2\int_1^2 \left| \frac{x - 1}{x^2 - 2x - 15} \right| dx ;$$

116. Să se demonstreze egalitatea:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{m^2 + 2m \cos x + 1} = \frac{2}{m^2 - 1} \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4} \right) (m > 1).$$

117. Să se arate că:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{a}{b};$$

118. Se consideră funcţiile:

$x = a(1 + \cos\theta) \cos\theta$;

$y = a(1 + \cos\theta) \sin\theta$;

Să se calculeze integrala:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} d\theta ;$$

119. Să se calculeze integrala:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2^n + 1}} \sin x \cos x \cos 2x \ldots \cos 2^{n-1} x \, dx ; \quad (n \in N)$$

120. Se dau funcţiile:

$$x = 2 \cos t - \cos 2t$$

$$y = 2 \sin t - \sin 2t$$

a) Să se elimine parametrul t între cele două funcţii;

b) Să se expliciteze relaţia obţinută în raport cu y;

121. Să se calculeze integrala:

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)dx}{1+x^2}$$

Aplicații ale calculului diferențial și integral

122. Se consideră funcția: $f(x) = ax(x-b)(x-c)$

a) Să se determine constantele a, b, c, știind că funcția admite un minim egal cu -6 în $x = 6$ și un maxim în $x = \frac{4}{3}$.

b) Să se reprezinte graficul funcției în condițiile de la punctul *a*.

c) Să se determine constanta d, astfel ca ecuația $f(x) - d = 0$, să aibă o rădăcină reală și apoi să se rezolve.

d) Să se calculeze aria mărginită de graficul funcției $f(x)$, determinată la punctul *a*, axele Ox, Oy și dreapta $x = 3$.

123. Se dă funcția: $f(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3-3x^2})$

Se cere:

a) Să se reprezinte grafic;

b) Să se calculeze aria limitată de curbele: $y = f(x)$ și $y = \frac{x}{2}$.

124. Se dă ecuația: $2x^3 - (5m-3)x^2 + (4m-1)x - m = 0$
Determinînd $m(x)$ din ecuația dată ca raport de polinoame (coeficientul termenului de grad maxim din $P(x)$ fiind luat pozitiv) și notînd: $m(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $f(x) = \frac{5}{2}\,\frac{P(x) + x(1-x)}{Q(x) + 4(x+1)}$, să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]^x$; *b*) $\int_0^1 f(x)\,dx$;

c) Să se determine parametrul m, întreg, în așa fel încît rădăcinile ecuației să fie în progresie geometrică.

125. Să se afle aria limitată de curba $y = \ln x$, axa Oy, axa Ox şi dreapta $y = 2$.

126. Să se calculeze aria limitată de curbele $y = e^{-x} \sin x$, $y = 0$, $x \geqslant 0$.

127. Să se afle raportul k în care parabola $y^2 = 2x$, împarte aria cercului $x^2 + y^2 = 8$.

128. Să se afle volumul obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a curbei $(x - 4a)y^2 = ax(x - 3a)$ pentru $0 \leqslant x \leqslant 3a$.

129. Se consideră funcţia : $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

Să se calculeze :

a) Aria cuprinsă între arcul de curbă, axa Ox şi dreptele $x = -a$; $x = a$.

b) Volumul corpului obţinut prin rotirea curbei în jurul axei Ox între dreptele $x = -a$, $x = a$.

c) Lungimea arcului de curbă cuprins între dreptele $x = -a$; $x = a$.

d) Coordonatele centrului de greutate a ariei plane cuprinsă între arcul $y = y(x)$, axa Ox şi dreptele $x = -a$; $x = a$.

130. Se dă funcţia : $y = 4\sqrt{ex} + 2e \ln \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\sqrt{x} + \sqrt{e}}$,

a) Să se calculeze aria cuprinsă între curbă, axa Ox şi dreptele $x = 2e$, $x = 3e$.

b) Să se calculeze lungimea arcului de curbă $y = y(x)$, cuprins între aceleaşi drepte.

Capitolul 24

PROBLEME CU CONȚINUT PRACTIC

1. Un bazin metalic cu masa de 20 kg conține 120 l apă la o temperatură de $t = 15°C$. Ce cantitate de apă la temperatura de 80°C trebuie adăugată în bazin, pentru ca temperatura apei să fie între 30°C și 40°C?

2. Suprafața pardoselii dintr-o locuință este în general mai mare decît suprafața ferestrelor, raportul dintre ele fiind mai mare de 100%. După acest raport se apreciază și higiena unei locuințe. Aprecierea este cu atît mai bună, cu cît acest raport este mai mic, existînd o normă după care suprafața ferestrelor unei locuințe nu are voie să depășească suprafața pardoselii. Raportul higienic al unei locuințe se îmbunătățește sau nu, dacă mărim proporțional suprafața pardoselii și a ferestrelor. Care este variația acestui raport, dacă atît la numărător cît și la numitor adăugăm același număr?

3. Distanța focală a unei oglinzi sferice concave este egală cu f. La ce distanță de focarul oglinzii trebuie așezat un obiect, pentru ca mărimea liniară a imaginii să fie cel mult de două ori mai mare, și cel puțin mai mică de trei ori decît obiectul?

4. Un sul de hîrtie are masa m (kg) și diametrul d (cm). Din acest sul se folosește o parte astfel încît hîrtia luată să nu fie mai puțină de m_1 (kg) și nu mai mare de m_2(kg), $(m_1 \leqslant m \leqslant m_2)$. Pînă la ce diametru trebuie desfășurată hîrtia de pe sul?

5. La o rezistență specifică a pămîntului de $f = 8\ N/cm^2$ aratul unui hectar de pămînt se face în mai puțin de o oră și la o rezistență specifică $f_1 = 12\ N/cm^2$ nu depășește 1,4 ore. Adîncimile la arat sînt admise în limitele 0,1 m pînă la 0,85 m. Determinați puterea utilă a tractorului și adîncimea arăturii pentru ca datele din problemă să fie respectate?

6. O barcă cu motor transportă o încărcătură de la portul A la portul B (distanţa între A şi B este 24 km în sensul rîului). La întoarcere cu o nouă încărcătură, din cauza curentului apei, care este 6 km/h, barca merge mai repede. Cît de mare trebuie să fie viteza bărcii cu motor în apa liniştită, astfel încît cursa de la A la B să nu dureze mai mult de 3 ore, neţinînd seama de timpul afectat încărcării şi descărcării?

7. Arătaţi că rezistenţa totală la o legare în serie a n conductori, este mai mare de n^2 ori decît rezistenţa la o legare în paralel cu acelaşi număr n de conductori?

8. La construcţia locuinţelor şi construcţiilor industriale se folosesc ferestre pătrate. Proiectul unei asemenea construcţii prevede un tablou de tîmplărie cuprinzînd n ferestre, cu o suprafaţă totală de A m². Calculaţi cheltuielile maxime posibile pentru tocurile acestor n ferestre, ştiind că 1 m³ de lemn pentru tocuri costă d lei.

9. Prin simulare în laborator se face testul asupra unei bărci cu ajutorul unui model într-un bazin de experimentare. La simulări pot varia atît vitezele cît şi curenţii apei, astfel ca barca model să parcurgă o distanţă de 60 m, în sensul de curgere al apei într-un timp mai mic de 5,4 s. Aceeaşi distanţă trebuie parcursă acum însă împotriva curentului apei într-un timp care să nu depăşească 7,2 s. Care sînt valorile vitezei pentru model şi pentru apă, pentru a obţine o mişcare uniformă?

10. Lămpile de iluminat se prevăd de obicei cu un abajur pentru protecţia ochilor, care atenuează efectul sursei de lumină. Efectul de protejare este cu atît mai mare cu cît unghiul $\widehat{DAC}$ este mai mare (fig. 24.1), unghi format de orizontală

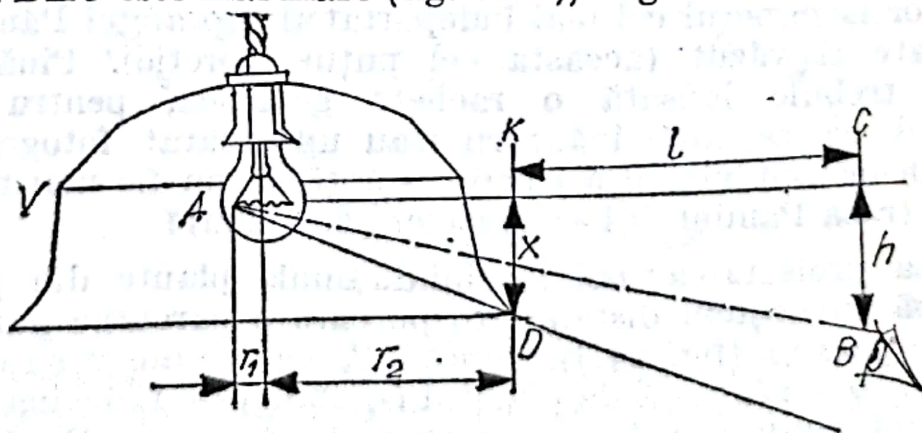


Fig. 24.1

şi dreapta AD (dusă prin punctul extern al sursei de lumină şi marginea opusă a abajurului). Unghiul astfel format se numeşte

unghi de protejare al ochiului. Notăm cu r raza cercului de bază şi r_1 raza spiralei filamentului, distanţa pe orizontală care trece prin filament, ochi şi un punct de pe cercul cu rază r_2 să nu fie mai mică de l, iar distanţa pe verticală dintre ochi şi orizontală să fie maximum h. Determinaţi la ce distanţă de nivelul filamentului trebuie să fie marginea de jos a abajurului, pentru ca ochiul să nu vadă filamentul.

11. Într-o mină din galeria principală se vor deschide alte două galerii laterale (fig. 24.2), astfel că galeria AC să fie perpendiculară pe peretele galeriei principale şi să aibă 200 m lungime, iar cealaltă galerie BD, să facă un unghi de 120° cu peretele galeriei principale

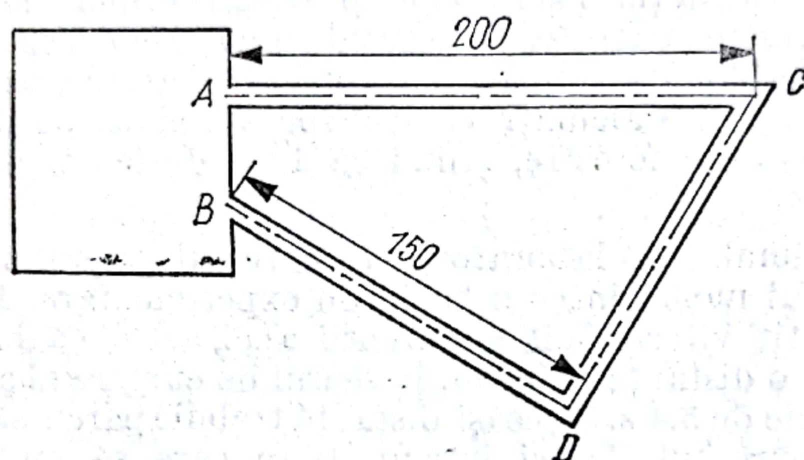


Fig. 24.2

şi un unghi de 30° faţă de direcţia primei galerii laterale, măsurînd o lungime de 150 m. Galeriile laterale vor fi legate printr-o altă galerie de legătură CD. Care este distanţa AB dintre intrările galeriilor laterale, pentru ca lungimea galeriei de legătură să nu depăşească 130 m?

12. Prin distanţa orizontului vizibil, se înţelege distanţa de la observator la punctul cel mai îndepărtat al suprafeţei Pămîntului care poate fi văzut (aceasta cel puţin teoretic). Pînă la ce înălţime trebuie lansată o rachetă geofizică, pentru ca observatorul ce se află înăuntru (sau un aparat fotografic) să obţină un orizont vizibil a cărui distanţă să nu fie mai mică de 2000 km (raza Pămîntului se consideră 6370 km)?

13. La proiectarea unei maşini de smuls plante din pămînt, trebuie să cunoaştem distanţa S_c pe care o parcurge punctul C al ghearei maşinii (fig. 24.3). Punctul C, care se mişcă cu o viteză uniformă, se depărtează de punctul O, unde este rădăcina plantei şi în acest timp are loc smulgerea din pămînt. Dacă a este lungimea rădăcinii, l_0 — lungimea plantei de la pămînt pînă la gheară, atunci smulgerea este efectuată dacă punctul C, avînd distanţa iniţială de la punctul $O, CO = l_0$, se mişcă pînă în punctul

C_1, aflat la distanţa $C_1O = l_0 + a$. Găsiţi distanţa S_c, cunoscînd a, l_0 şi unghiurile γ şi δ (unghiul γ precizează direcţia deplasării, iar unghiul θ poziţia iniţială a plantei).

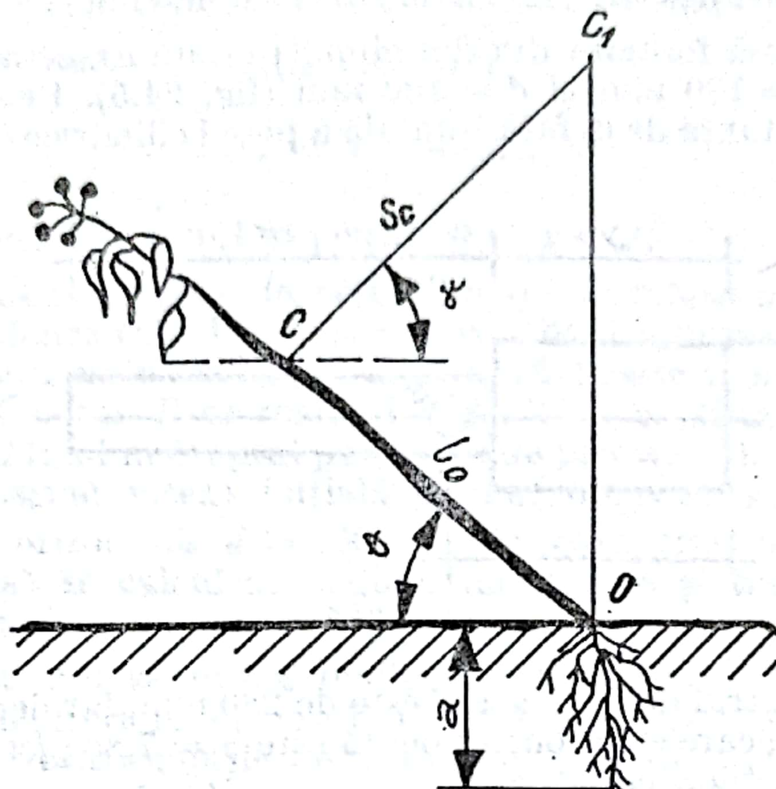


Fig. 24.3

14. Din trei scînduri egale cu lăţimea a (cm) se confecţionează un jgheab a cărei secţiune are forma unui trapez $ABCD$, unde $AB + BC + CD = 3a$ (fig. 24.4). La ce valoare a unghiului $\widehat{BAD}$, suprafaţa secţiunii jgheabului este maximă?

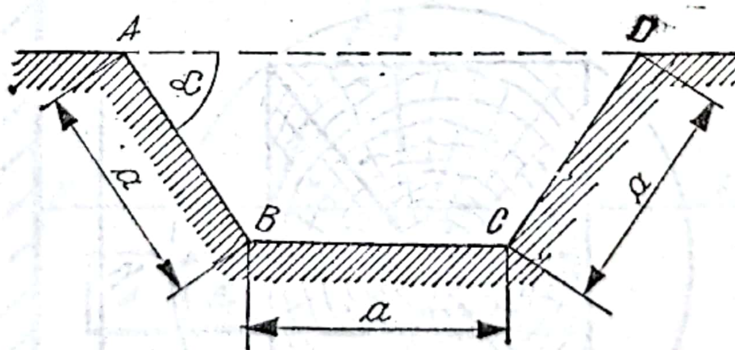


Fig. 24.4

15. Dintr-o bară rotundă cu diametrul d, se taie o bară pătrată. Stabiliţi mărimile tăieturilor astfel încît deşeurile să fie minime.

16. Dintr-o foaie de tablă din oţel, de formă dreptunghiulară, avînd suprafaţa A (m²), se confecţionează o cisternă cilindrică. Ce rază şi ce înălţime trebuie să aibă cisterna astfel încît volumul ei să fie maxim?

17. Prin transportul neglijent al sulurilor de hîrtie, la suprafață aceasta se strică. Aceste deșeuri sînt cu atît mai mici cu cît suprafața rolei este mai mică. Determinați la ce proporții între diametrul și înălțimea rolei deșeurile de hîrtie sînt cele mai mici?

18. O piesă formată din doi cilindri cu un ax comun, are diametrele $D = 180$ mm și $d = 100$ mm (fig. 24.5). Piesa are masa de 85 kg, distanța de la fața frontală a piesei cilindrice cu diametrul

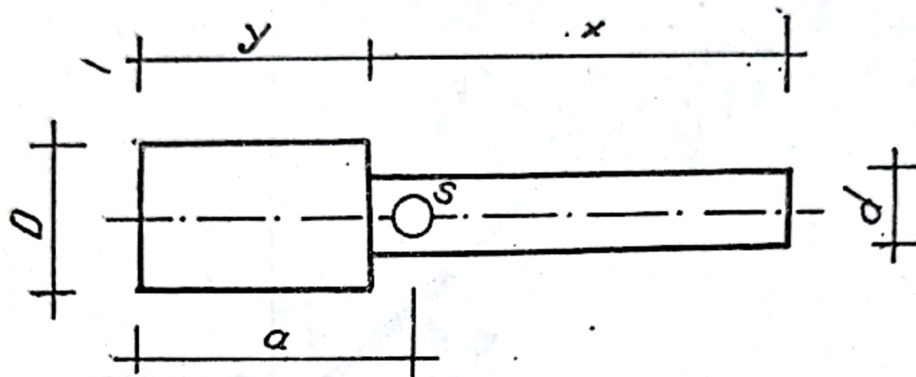


Fig. 24.5

D pînă la centrul de greutate S este de 280 mm, iar densitatea materialului din care este confecționată este $\rho = 7{,}85$ g/cm ^{3}. Stabiliți lungimile părților cilindrice.

19. Dintr-un copac care are forma unui cilindru, se confecționează o grindă de forma unui paralelipiped. Să se afle ce dimensiuni trebuie să aibă grinda, astfel încît la confecționarea ei să avem pierderi tehnologice minime din materialul lemnos (fig. 24.6).

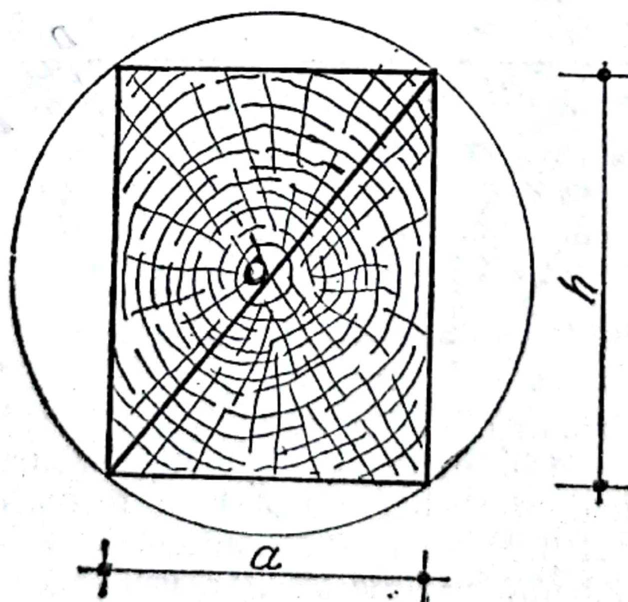


Fig. 24.6

20. O bară cu lungimea l (cm) se taie în trei părţi. Aceste părţi trebuiesc îmbinate în unghiuri drepte, astfel încît să formeze un schelet al unui chioşc de formă piramidală. Ce lungime trebuie să aibă fiecare parte, pentru ca acesta să aibă volumul cît mai mare?

21. Să se rezolve ecuaţia (Kepler)

$$x = a + e \sin x,$$

în cazul $a = 2$ şi $e = 0{,}1$ şi pentru $0 \leqslant x \leqslant 2$.

22. Viteza apei unui rîu este V(m/s), iar viteza unui înotător în apă stătătoare este V_1(m/s). Sub ce unghi x format cu direcţia perpendiculară pe cursul apei trebuie să înoate înotătorul ca să ajungă în punctul B al malului celălalt la o distanţă l(m) de punctul C (C fiind în dreptul punctului de plecare A).

23. Cunoscînd viteza iniţială a unui proiectil $V_0 = 300$ m/s şi distanţa orizontală $d = 1200$ m, la care trebuie să ajungă proiectilul, să se calculeze unghiul de tragere şi timpul în care ajunge la ţintă.

24. Piesa AB se mişcă (culisează) în ghidajul $K'K$ şi $L'L$ (fig. 24.7). În interiorul ei există un canal în care se mişcă o piesă M legată printr-o articulaţie de bară OM cu lungimea $a = 10$ cm, care se roteşte în jurul unui punct fix O, făcînd 6 ture pe minut.

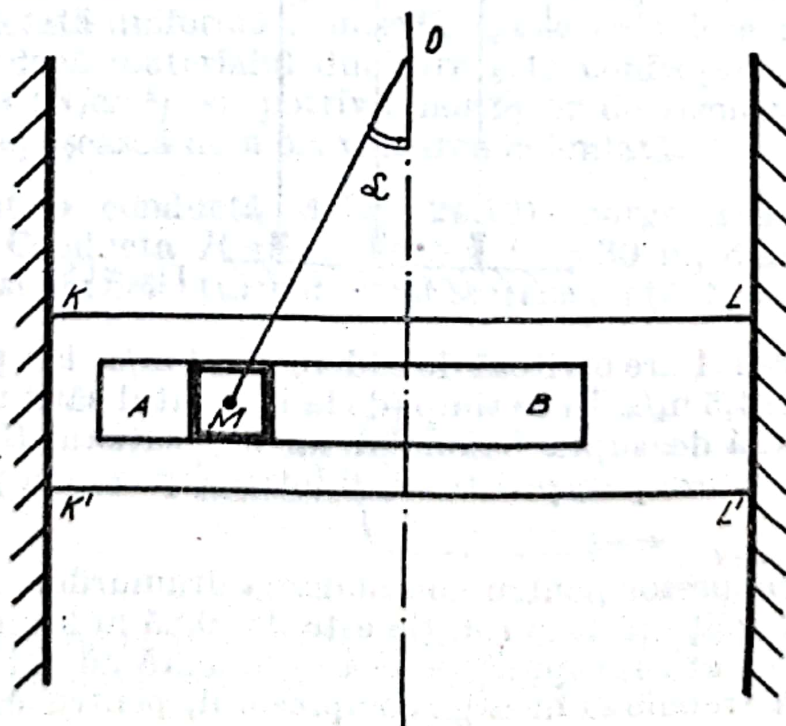


Fig. 24.7

Să se determine viteza V de deplasare a culisei AB în momentul cînd pistonul formează cu verticala unghiul α (caz particular $\alpha = 30°$).

25. Pămîntul unei gospodării cu mărimea de 5000 ha, trebuie să fie arat în mai puţin de 200 ore.

Pentru arat se dă adîncimea de 35 cm şi se întrebuinţează un plug cu 5 brazde, la care fiecare cuţit are lăţimea de 40 cm. Cîte tractoare cu puterea de 60 CP sînt necesare pentru arat, dacă rezistenţa pămîntului are în medie 12 N/cm^2.

26. Un balon staţionar se află la o înălţime de 1400 m. În regiunea balonului (C), sar în acelaşi timp doi paraşutişti cu paraşute care se deschid automat, şi anume paraşutistul A de la o înălţime de 1900 m, iar paraşutistul B de la o înălţime de 1580 m (fig. 24.8).

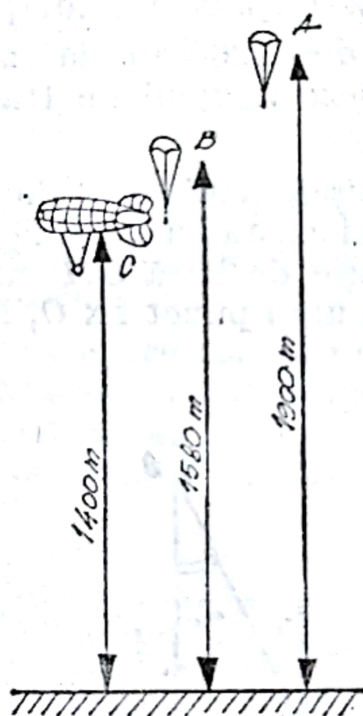


Fig. 24.8

Paraşutistul A are o viteză de cădere de 4 m/s, iar paraşutistul B, o viteză de 4,5 m/s. În ce timp (de la începutul săriturii) paraşutistul A se află deasupra balonului, iar paraşutistul B sub balon, cunoscînd că viteza paraşutistului B întrece pe cea a paraşutistului A?

27. Un compresor pentru consolidarea drumurilor) are lăţimea 0,85 m (fîşia vălţuită la o rotaţie este de 0,85 m lăţime). Fiecare fîşie trebuie să se suprapună pe cea anterioară cu 1/4 din lăţime. Cu ce viteză trebuie să meargă compresorul, pentru ca strada de

750 m lungime şi 6,50 m lăţime, să nu fie vălţuită de două ori în mai puţin de 5 h şi nu mai mult de 6 h ?.

28. La o frînă cu doi saboţi, aceştia acţionează cu forţe egale $\vec{F}$ printr-un sistem de pîrghii pe un *ax* (fig. 24.9). Momentul de frî-

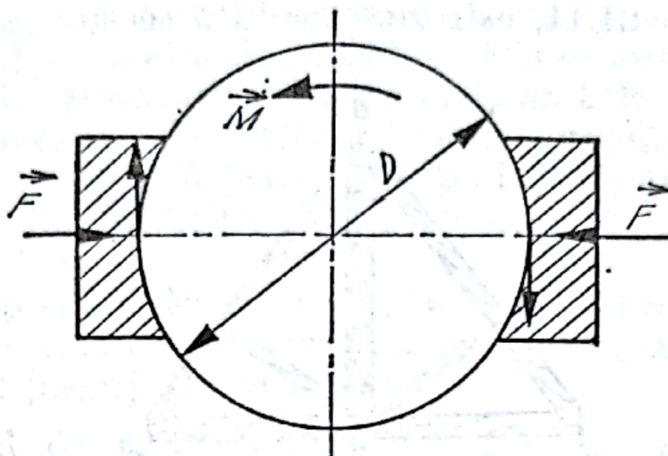


Fig. 24.9.

nare calculat, $\vec{M}_f$, trebuie să fie de β ori mai mare decît momentul de rotire $\vec{M}$ al axului. Aceasta se exprimă $M_{frînare} \geqslant \beta M$, unde $\beta = 1{,}75$ este un factor de siguranţă pentru frînă. Să se stabilească forţa $\vec{F}$, dacă $M = 34000$ N, diametrul axului frînei $D = 50$ cm, iar coeficientul de frecare între sabotul frînei din fontă şi a axului de oţel este $\mu = 0{,}15$.

29. Cabina unui ascensor cîntăreşte *m* kg şi se deplasează cu viteza accelerată uniformă *a* ($\mathrm{m.s^{-2}}$). Să se calculeze secţiunea *X* a cablului, dacă materialul din care este confecţionat are limita de rupere σ ($\mathrm{N/cm^2}$) şi potrivit normelor de securitate, nu este voie să se depăşească de *n* ori valoarea calculată.

30. Printr-o conductă *A*(fig. 24.10), curge apă cu debitul $q = 25$ l/s. Conducta *B* are lungimea $l_1 = 30$ m, diametrul $d_1 =$ $= 50$ mm şi coeficientul hidraulic se rezistenţă $\lambda_1 = 0{,}04$.

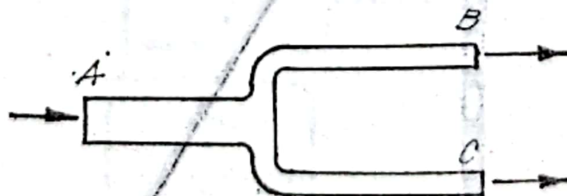


Fig. 24.10

Pentru conducta *C* avem $l_2 = 50$ m, $d_2 = 100$ mm, $\lambda_2 = 0{,}03$. Căderea de presiune *h* într-o conductă se stabileşte după formula :

$h = 0{,}83 \text{ kg cm}^{-3}\ \lambda_1 \frac{5}{d^2}$. Să se determine cantitatea de apă care curge în conductele paralele B şi C în unitatea de timp. Se consideră că, în conducte drepte cu secţiunea uniformă, căderea de presiune este constantă.

31. În figura 24.11, este reprezentată secţiunea unui acoperiş

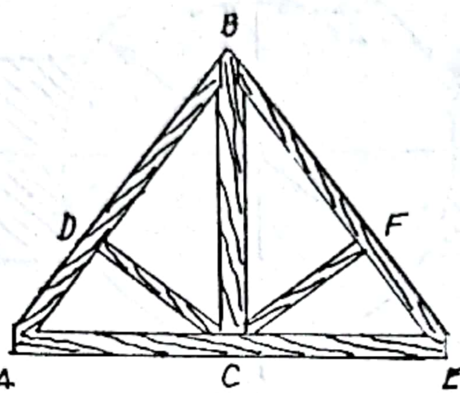


Fig. 24.11

cu două pante. Dreapta CD este perpendiculară pe AB. Să se arate că avem relaţia : $CD \leqslant \frac{AC + BC}{2\sqrt{2}}$.

32. Circulaţia trenurilor între două oraşe A şi B se face printr-o staţie intermediară C astfel încît direcţiile $\overline{AC}$ şi $\overline{CB}$ sînt perpendiculare (fig. 24.12). Să se arate că lungimea liniei ferate,

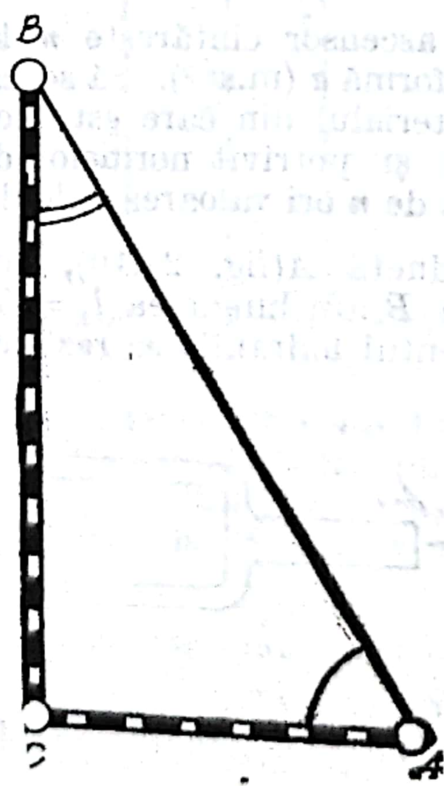


Fig. 24.12

care unește direct orașele A și B reprezintă 0,293 din lungimea drumului vechi: $\overline{AB} = 0,293\ (\overline{AC} + \overline{CB})$.

33. Într-o întreprindere sînt două instalații de stropire artificială. La prima orificiile se găsesc pe suprafața curbată a unui sector de sferă, iar la a doua pe suprafața bazei conului.

Suprafața de bază și înălțimea conului corespund suprafeței de bază și înălțimii sectorului de sferă. Diametrul găurilor, densitatea așezării lor și presiunea apei sînt la ambele instalații la fel.

Pentru ce mărimi ale unghiului sferic, productivitatea primei instalații este mai mare, față de cea de a doua instalație (prin productivitate se înțelege cantitatea de apă, care se împrăștie în unitatea de timp).

34. Un corp coboară pe un plan înclinat, parcurgînd 20 m în 5 s. Să se afle înclinarea planului față de orizontală și viteza la care ajunge mobilul (neglijîndu-se frecarea).

35. Modulul de rezistență polar w_p este dat de formula: $w_p = \dfrac{\pi(D^4 - d^4)}{16\,D}$ și reprezintă raportul dintre cuplul care solicită axul la răsucire și rezistența admisibilă a materialului din care este confecționat axul. Se cere să se calculeze diametrul exterior al unui ax prevăzut cu un canal central cu $d = 20$ mm, pentru care $w_p = 2,71\ \text{cm}^3$.

36. Figura 24.13 reprezintă modul cum se efectuează frezarea suprafeței unei piese cu ajutorul frezei frontale. La ce distanță x trebuie să iasă freza peste muchia $b = 80$ mm, a cărei lungime este egală cu lățimea suprafeței dreptunghiulare frezate, dacă diametrul frezei este de $d = 100$ mm?

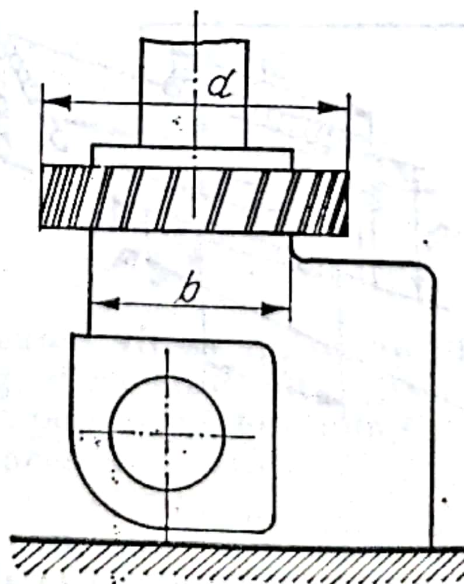


Fig. 24.13

37. Distanţa mijlocie între Pămînt şi Lună este de $3,84 \cdot 10^5$ km. Masa Lunii reprezintă a 81,5-a parte din masa Pămîntului. La ce distanţă de centrul Pămîntului forţele de atracţie ale Lunii şi Pămîntului sînt egale?

38. În cadrul unor sistematizări, se proiectează un parc a cărei suprafaţă totală este A (m²). Suprafaţa de bază are forma unui dreptunghi terminat la capete cu cîte un semicerc (fig. 24.14). Toată suprafaţa parcului trebuie îngrădită. Ce lungime şi ce

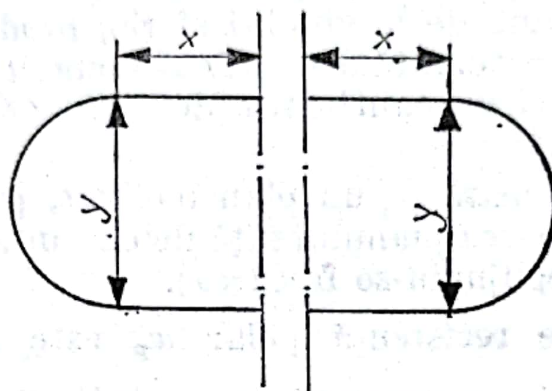


Fig. 24.14

lăţime trebuie să aibă partea dreptunghiulară a acestei suprafeţe, pentru ca îngrădirea ei să aibă lungime minimă?

39. Un cornier, ale cărui laturi sînt fiecare $b = 75$ mm şi de grosime $t = 8$ mm, este sudat prin două cusături în puncte nodale de un schelet metalic. Stabiliţi lungimea cea mai mică admisă l a acestor cusături, dacă forţa de întindere $F = 150$ N atacă în aşa fel aripa verticală cum este arătat în figura 24.15. Tensiunea permisă în secţiunea cusăturilor este egală cu 10.000 N.

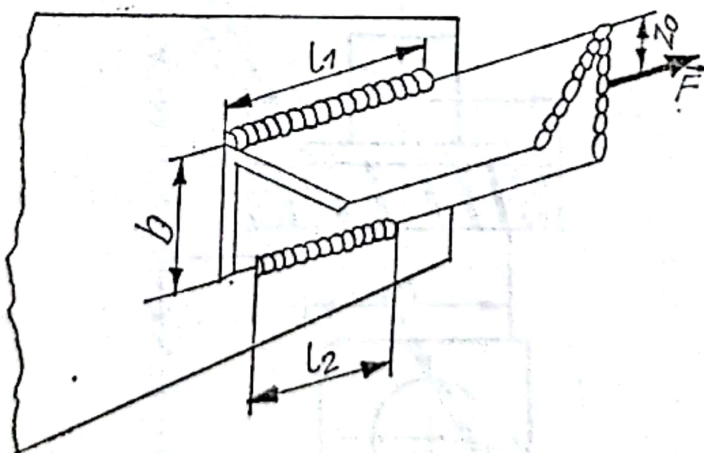


Fig. 24.15

40. Două arcuri elicoidale cilindrice (fig. 24.16) cu diametre diferite şi înălţimi egale sînt aşezate unul în altul şi sînt compri-

mate cu forța $\vec{F}$. Stabiliți cît din forța $\vec{F}$ acționează pe arcul interior și cît pe arcul exterior, dacă constanta arcului, la primul arc este C_1 și la al doilea C_2?

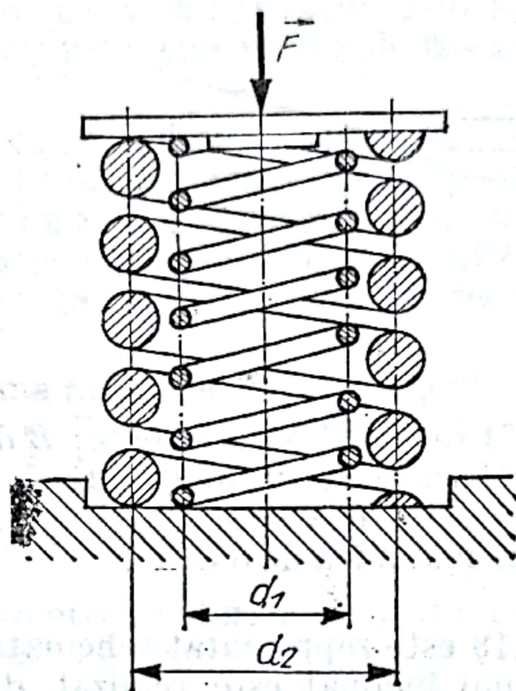


Fig. 24.16

41. Tracțiunea și puterea elicei unui elicopter (fig. 24.17) se calculează după formulele $F = \alpha \rho n_B^2 D^4$ și $P = \beta \rho n_B^3 D^5$, unde α este coeficientul de tracțiune, β coeficientul puterii, n_s numărul de rotații ale elicii pe secundă, D diametrul elicii și ρ densitatea aerului. Să se calculeze tracțiunea și puterea elicii pentru : $\alpha = 0{,}18$; $n_s = 25$ rot/s ; $\beta = 0{,}28$; $D = 2{,}1$ m ; $\rho = 0{,}125$ kg/m ^{3}.

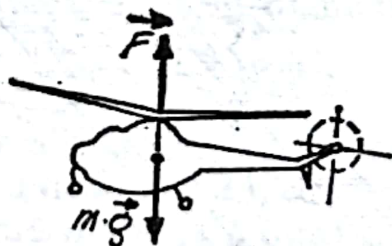


Fig. 24.17

42. Să se stabilească viteza de tăiere optimă la prelucrarea fontei pe un strung, dacă adîncimea șpanului este $S = 2$ mm, avansul $\lambda = 0{,}4$ mm pe rotație. Formula pentru stabilirea vitezei de tăiere optimă în acest caz, este :

$$v_{0_p} = \frac{32{,}6}{S^{0,16}\lambda^{0,38}} \text{ m/min.}$$

43. O barcă de încercare este trasă din port cu două şlepuri. Cablurile şlepurilor formează cu direcţia de mişcare unghiuri ascuţite (fig. 24.18). Ce valori trebuie să ia unghiurile, pentru ca la o

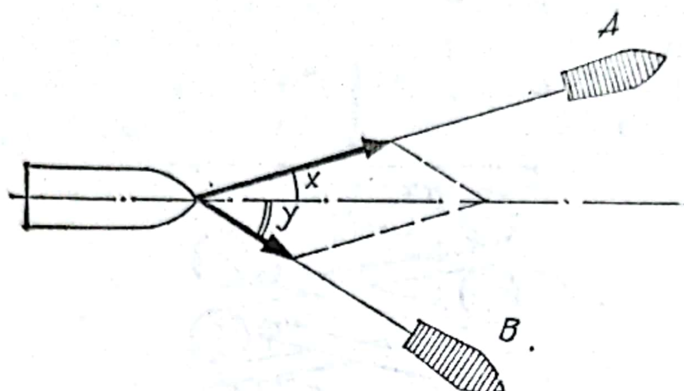


Fig. 24.18

tracţiune a şlepului A de 6 CP şi a şlepului B de 4 CP să acţioneze pe barcă o forţă care să fie mai mare de 5 N. În cazul că tracţiunea şlepului A este 10 CP şi a şlepului B este 5 CP tracţiunea bărcii să nu fie mai mică de 8 CP.

44. În figura 24.19 este reprezentat schematic un plan înclinat cu transportor. Planul înclinat este realizat din două şine. Pe

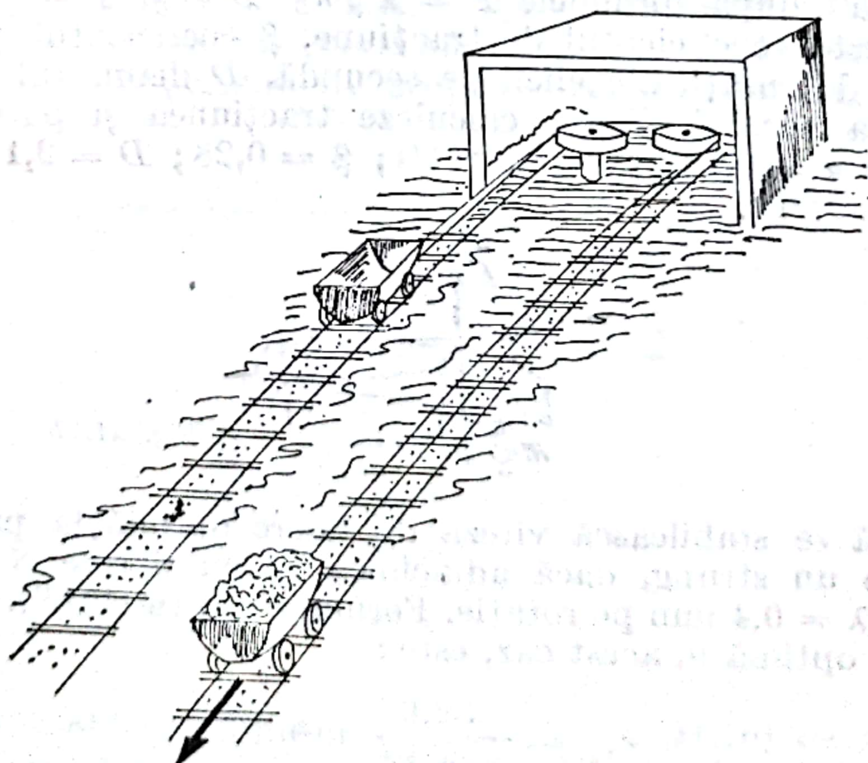


Fig. 24.19

o şină coboară vagoneţii goi cu ajutorul unor cabluri care trec printr-o rolă. Acest utilaj este folosit în mine. Ştiind că un vagonet încărcat are masa m_1 (t), vagonetul gol are masa $m_2(t)$ (m_1 mai mare decît m_2), iar coeficientul de frecare între roţile vagonetului şi şine este μ. Determinaţi ce unghi de înclinare φ trebuie să aibă planul înclinat, pentru ca un vagonet plin să tragă cel puţin n vag oneţi descărcaţi (nu se ţine seama de frecarea rulmenţilor).

45. În laboratoarele chimice, se folosesc filtre din hîrtie de formă conică. Sectorul de cerc b_2 se împătureşte, astfel încît restul sectorului cu arcul b_1 să formeze mantaua conului. La ce mărime a arcului α (corespunzător sectorului b_2) filtrul conic care se obţine din cercul de rază r are volumul cel mai mare.

46. Să se exprime aria secţiunii unei ţevi laminate, în funcţie de diametrul exterior D şi de raportul a dintre diametrul interior şi cel exterior (în afară de diametrul exterior D şi cel interior d în calculele tehnice, intervine şi raportul $a = \dfrac{d}{D}$).

Determinaţi diametrul exterior D şi diametrul interior d pe care trebuie să le aibă o coloană cilindrică de secţiune circulară ştiind că :

— aria secţiunii $A = 132{,}63\ \text{cm}^2$;

— grosimea peretelui $S = 24$ mm.

47. Un ax tubular din oţel trebuie să aibă secţiunea $A = 37{,}68\ \text{cm}^2$, iar raportul dintre diametre $a = 0{,}5$. Să se determine diametrele axului.

48. Pentru măsurarea diametrului d al bazei unei găuri conice, (avînd cunoscut unghiul de la vîrf α), se introduce o sferă de rază cunoscută r şi se măsoară distanţa h dintre punctul cel mai de sus al sferei şi planul bazei. Să se afle d.

49. Diametrele mari se pot calcula prin metoda măsurării coardei şi înălţimii segmentului. Pentru această măsurare, se foloseşte un instrument care este arătat în figura 24.20. Deduceţi o formulă pentru determinarea diametrului, dacă distanţa dintre role este l, înălţimea segmentului H şi raza rolei r.



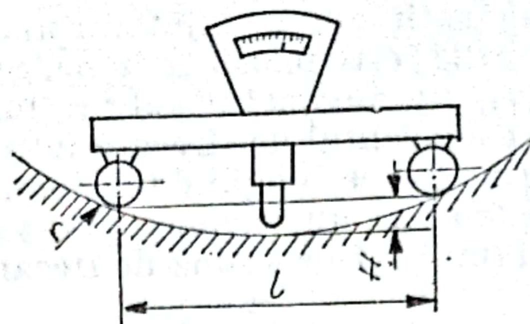


Fig. 24.20

50. Într-o fabrică se confecţionează piese ca acelea din figura 24.21. Este o piesă interioară a unui cuplaj electro-

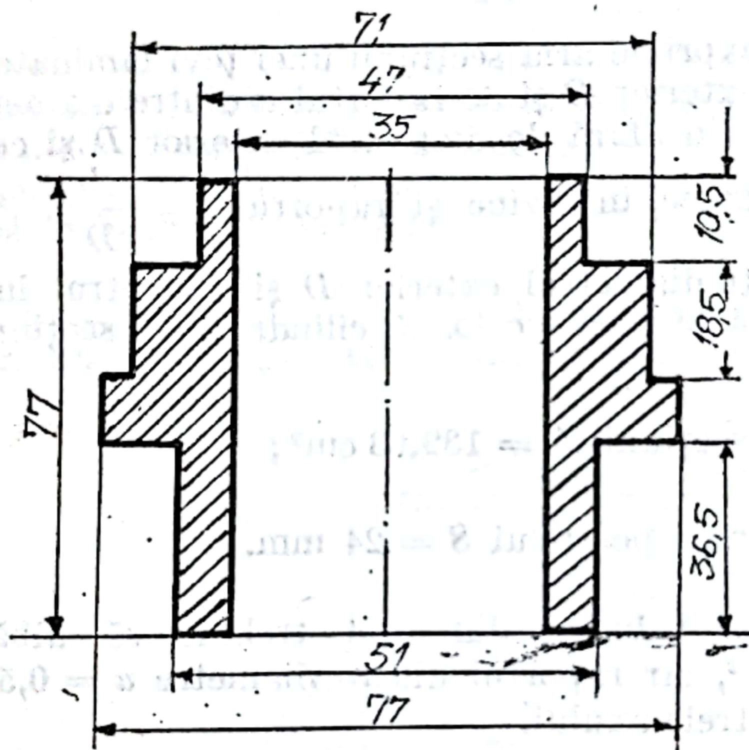


Fig. 24.21

magnetic, confecţionată dintr-un aliaj crom-nichel ($\rho = 7{,}7\ kg/dm^3$).
Desenul reprezintă secţiunea axială a corpului care se obţine prin strunjirea unei piese brute cilindrice cu $D = 85$ mm, $d = 30$ mm şi $h = 85$ mm.

Determinaţi masa pierderilor tehnologice care se obţin pentru a aduce piesa brută la forma finisată din figură.

51. Un fund de cazan bombat se execută prin matriţare dintr-o tablă circulară cu diametrul D şi grosimea S.

Determinați diametrul D, cunoscînd următoarele date: $d = 800$ mm, $R_1 = 700$ mm, $R_2 = 120$ mm, $h = 80$ mm, $S = 20$ mm (fig. 24.22).

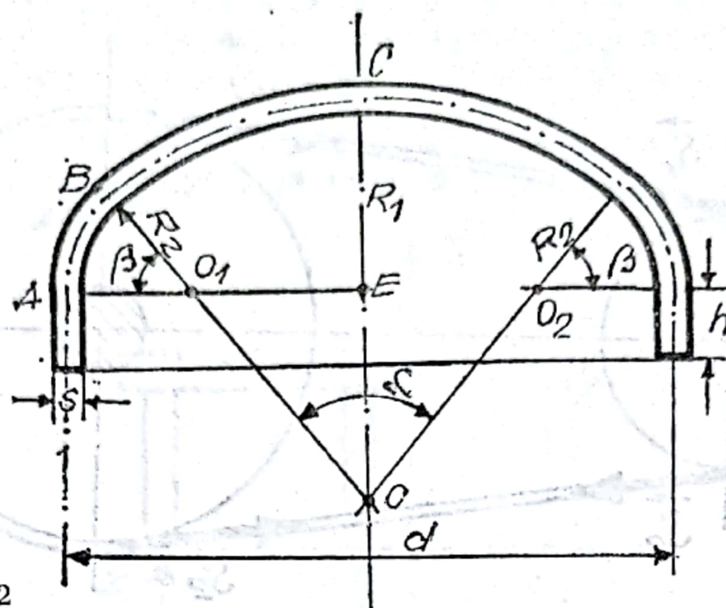


Fig. 24.22

52. Secțiunea unui bac are forma unui trapez cu laturi egale (fig. 24.23). Masa bacului cu încărcătură este de $m = 3{,}8$ t, lungimea de $l = 6$ m, lățimea fundului $a = 1{,}5$ m, unghiul de înclinare al pereților laterali față de verticală este $\alpha = 8°$ și densitatea apei este $\rho = 1$ g/cm^3.

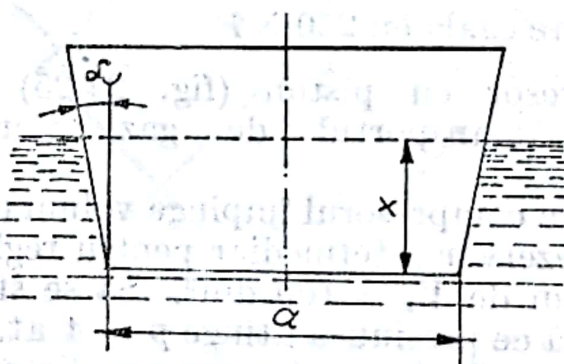


Fig. 24.23

Să se calculeze adîncimea de scufundare a bacului considerînd că secțiunea bacului este constantă.

53. Forța periferică admisă F la o transmisie prin curele este, la o viteză de lucru mică, egală cu diferența forțelor de întindere $\vec{S}_1$ și $\vec{S}_2$ în partea de curea acționată și cea care acționează

(fig. 24.24) $\vec{F} = \vec{S}_1 - \vec{S}_2$. Forța de întindere inițială a curelei în stare liberă S_0, se poate calcula din S_1 și S_2 cu ajutorul formulei

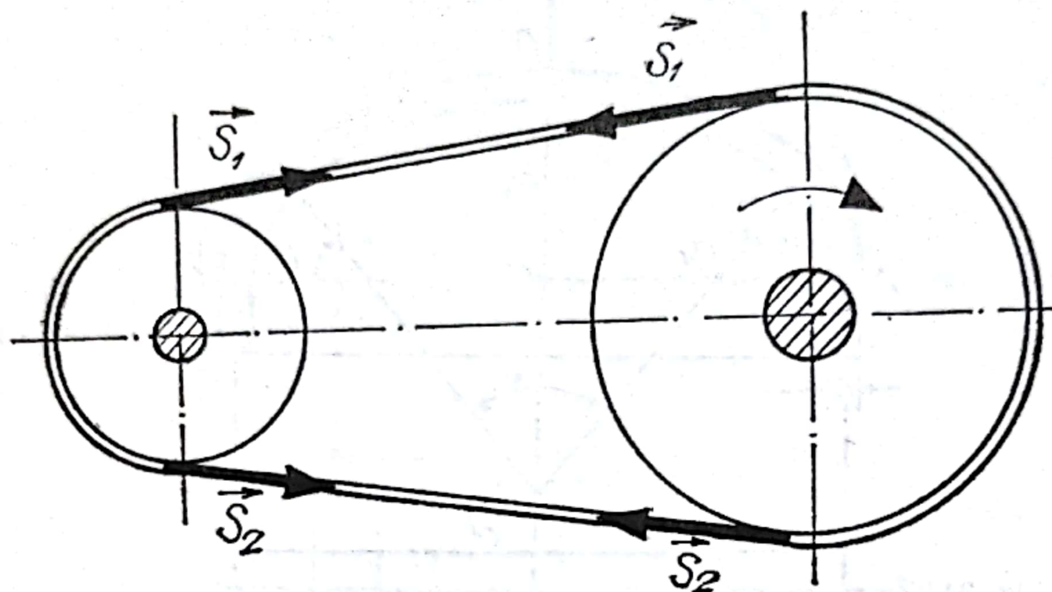


Fig. 24.24

$S_0 = \dfrac{S_1 + S_2}{2}$. Să se stabilească forțele de întindere S_1 și S_2, dacă $F = 200$ N și S_0 este egală cu 250 N?

54. Un compresor cu piston (fig. 24.25) (mașină pentru comprimarea și transportul de gaz) pornește cu $n = 150$ rot/min.

La fiecare rotire compresorul împinge volumul $V = 0{,}5$ dm³ de gaz în rezervor (rezervor intermediar pentru reglarea presiunilor), care are un volum de $V_k = 100$ dm³. Să se stabilească timpul care se scurge pînă ce presiunea atinge $p = 4$ at. Se presupune că aerul nu se încălzește. La început presiunea din cazan a fost aceeași cu presiunea aerului de afară.

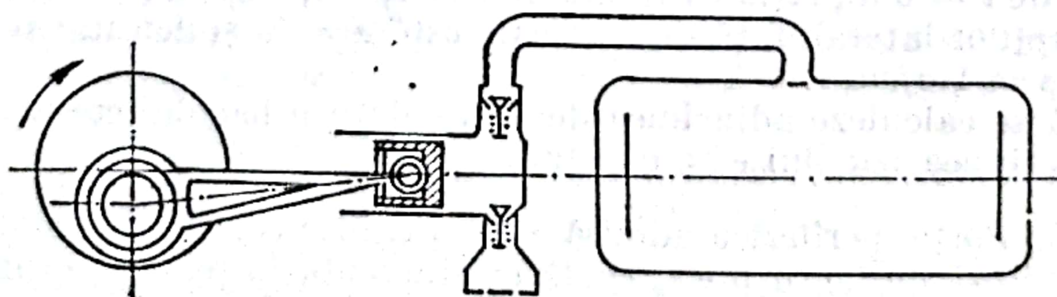


Fig. 24.25

55. Zgomotul produs la căderea unei pietre pe fundul unui puţ, ajunge după timpul t, din momentul începerii căderii, la observatorul care se află la gura puţului. Să se determine adîncimea H a puţului şi timpul de cădere a pietrei τ, dacă v este viteza sunetului iar g este acceleraţia căderii libere. Se consideră că piatra nu avea viteza iniţială şi rezistenţa aerului este neglijabilă.

56. Să se determine presiunea în picioarele mesei metalice prezentată în (fig. 24.26), pe care se va aşeza o placă turnată

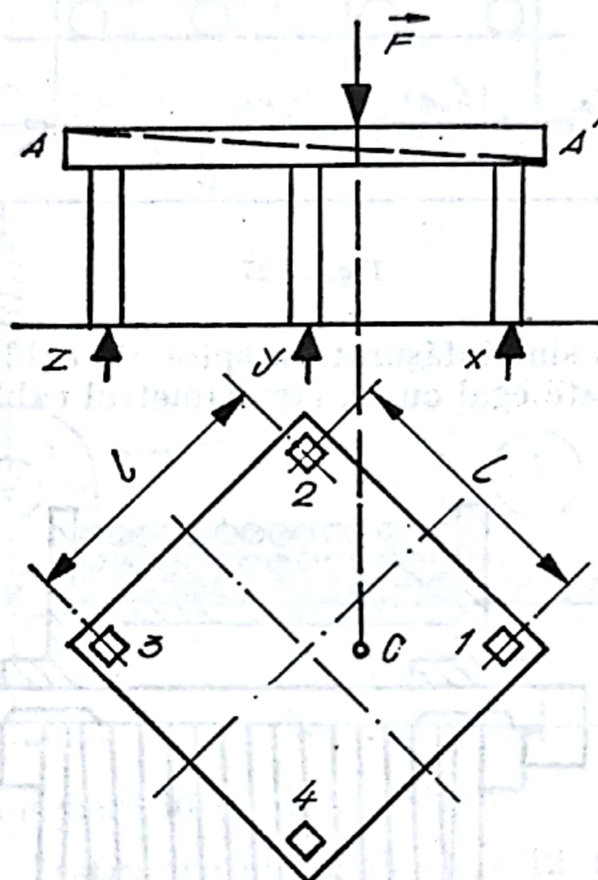


Fig. 24.26

ce apasă cu forţa $F = 3000$ N. Distanţa dintre picioarele mesei este $l = 1$ m şi greutatea rezultantă acţionează în punctul C, la distanţa $t = 10$ cm de la fiecare axă de simetrie a mesei.

57. Două camioane merg cu vitezele $\vec{v}_A$ şi $\vec{v}_B$ (fig. 24.27), unde $v_A > v_B$, iar camionul A îl ajunge pe B. La distanţa a_1 de camionul B, şoferul camionului A începe depăşirea şi o termină, după ce a depăşit camionul B cu distanţa a_2. Lungimea camionului A este de l_A, iar cea a camionului B, este l_B. Să se stabilească distanţa pe care trebuie s-o aprecieze şoferul camionului A, pentru ca din motive de securitate să fie considerată dublu cît distanţa l, pe care el o depăşeşte ; depăşirea se face pe o distanţă cu circulaţie în ambele

sensuri, distanţă unde viteza fiecărui camion care vine din sens opus poate avea aceeaşi viteză cu camionul care depăşeşte.

Fig. 24.27

58. Pe o tobă sînt înfăşurate n spire ale cablului (fig. 24.28). Diametrul tobei este egal cu D, iar diametrul cablului cu d. Pe o lungime a tobei sînt m înfăşurări. Să se stabilească o formulă pentru determinarea lungimii cablului înfăşurat pe tobă. (Se va neglija faptul că acesta este deformat).

Fig. 24.28

59. Pentru controlul prelucrării corecte a părţilor conice se măsoară diametrul în unele secţiuni transversale în lungul piesei. Să se stabilească diametrul d într-o secţiune la distanţa λ de la diametrul cel mai mare al conului, dacă se cunoaşte că partea conică are lungimea l, diametrul cel mai mare este d_1 şi diametrul cel mai mic d_2 (fig. 24.29).

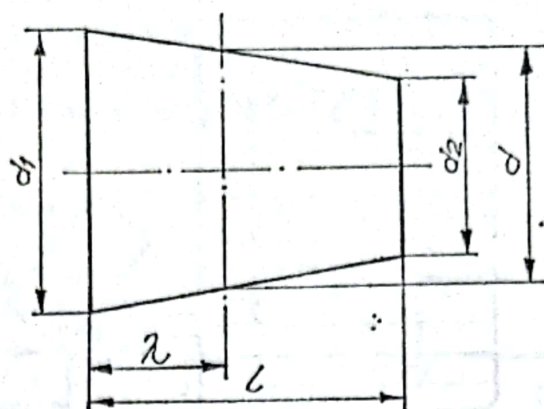


Fig. 24.29

60. Să se găsească centrul de greutate al unei piese (fig. 24.30) care în punctul A este așezată pe o prismă triunghiulară fixă.

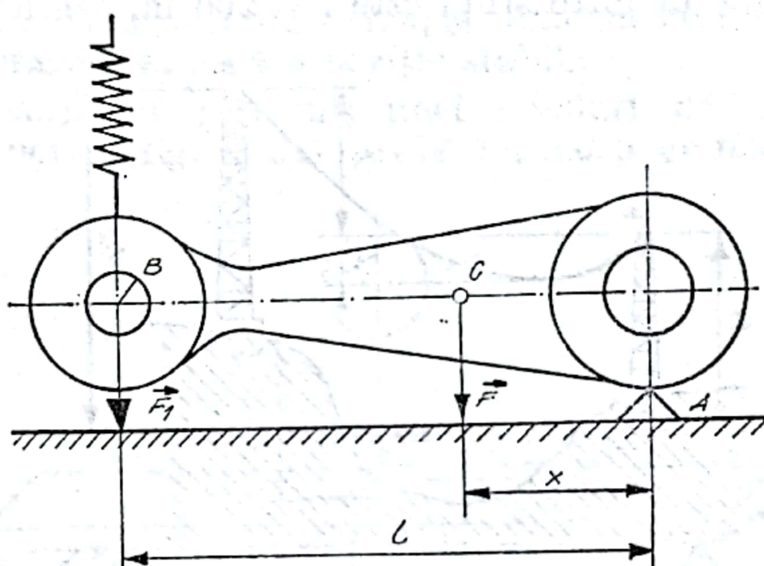


Fig. 24.30

În punctul B se măsoară forța de atracție universală cu ajutorul dinamometrului. Instrumentul arată $\vec{F}_1 = 12$ kg. Masa piesei este 27 kg și, deci, forța cu care acționează piesa pe suprafața de așezare, este circa 270 N. Distanța între prisma A și punctul central al dinamometrului B este $l = 45$ cm.

61. Într-un rezervor (fig. 24.31) s-a introdus un lichid. La o adîncime de $h = 1{,}5$ m, s-a măsurat presiunea $p = 11{,}5 \cdot 10^{-4}$ Pa. Cît de mare este densitatea lichidului, dacă pe suprafața lichidului acționează numai presiunea normală a aerului?

Observații : — la rezolvarea problemei, se va ține cont de ecuația de bază din hidrostatică $p = p_0 + \rho g h$, unde p este presiunea în punctul dat al lichidului, p_0 presiunea la suprafață, ρ este densitatea lichidului, iar h este înălțimea coloanei de lichid peste punctul dat, unde s-a măsurat presiunea și $g = 9{,}81$ m/s².

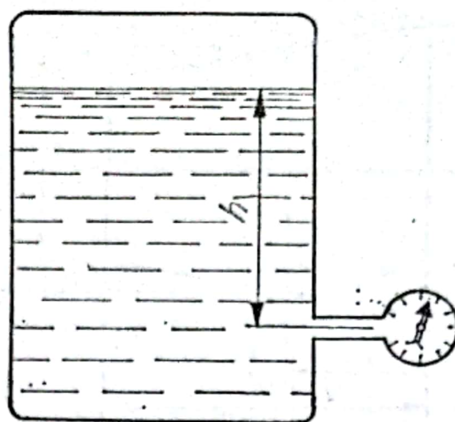


Fig. 24.31

62. La trecerea unei linii de înaltă tensiune peste un rîu (fig. 24.32), punctul de prindere A pe stîlpul stîng, are înălţimea $h_1 = 15$ m, distanţa între stîlpi este $l = 200$ m, săgeata datorată

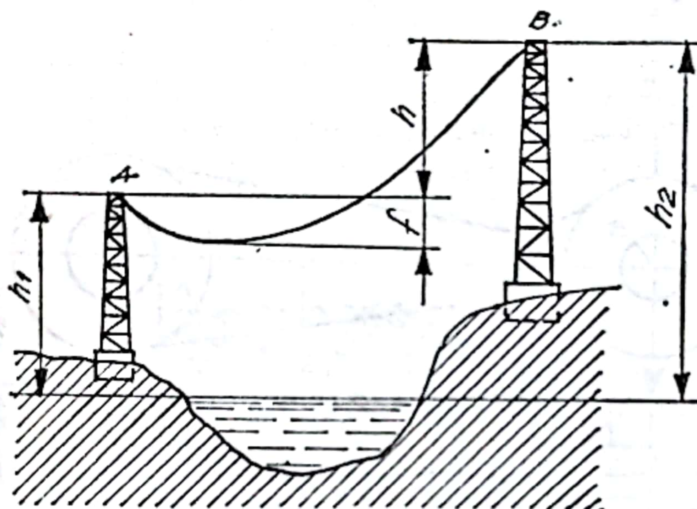


Fig. 24.32

greutăţii proprii a cablului referitoare la stîlpul stîng, este $f = 5$ m şi forţa care acţionează vertical în cablu (se stabileşte cu ajutorul condiţiilor de durabilitate — rezistenţă) $F = 100\,000$ N, masa unui metru de cablu este $q = 2$ kg. Să se stabilească înălţimea necesară pentru stîlpul drept deci înălţimea punctului B. *Observaţie* : — la rezolvarea problemei, se foloseşte formula :

$$f = \frac{q\,gl^2}{8\,F} + \frac{Fh^2}{2q\,gl}\,2 - \frac{h}{2}$$

, unde h este diferenţa de înălţime între cele două puncte de fixare.

63. La executarea unei arături, flancul de brazdă trebuie să ia o formă stabilă (fig. 24.33 a). Poziţia lui este stabilă dacă diagonala $\overline{BD}$ este înclinată înspre partea opusă arăturii. Dacă diagonala

flancului brazdei este verticală (fig. 24.33 *b*) sau dacă este înclinată înspre partea arăturii, atunci poziţia este labilă, deoarece flancul de brazdă poate să cadă înapoi în arătură. Să se găsească relaţia

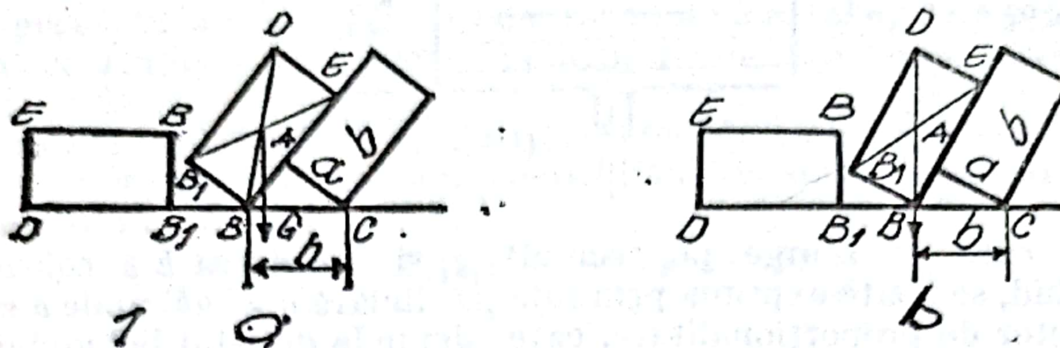


Fig. 24.33

dintre lăţimea flancului brazdei, *b*, şi adîncimea arăturii, *a*, la care flancurile brazdei să aibă o poziţie stabilă.

64. Pe mijlocul (centrul) unei scînduri de lemn, aşezată pe doi suporţi (fig. 24.34), cade un corp de masă $m = 20$ kg

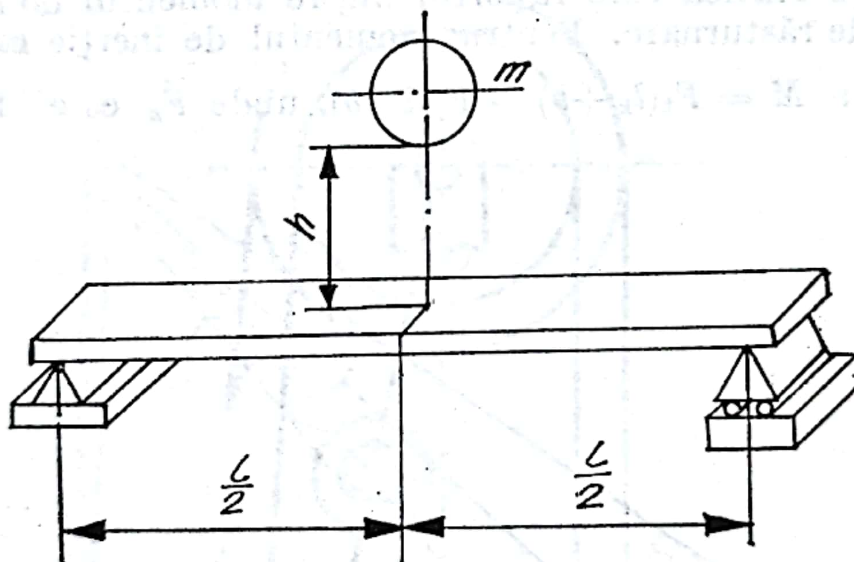


Fig. 24.34

de la înălţimea h=0,5 m, iar scîndura are rigiditatea c=5000 N/cm². Să se determine forţa rezultată, $\vec{F}$, care, aplicată pe mijlocul scîndurii, determină o săgeată echivalentă cu cea produsă prin şoc.

Observaţii: La rezolvarea problemei, se va deduce, că energia potenţională, care o are scîndura în timpul săgeţii, este $W_p = \frac{F^2}{2c}$. Greutatea scîndurii este neglijabilă în comparaţie cu greutatea corpului care cade.

65. Dintr-un rezervor, umplut pînă la înălţimea *h* (fig. 24.35), curge păcură printr-un mic orificiu. Relaţia dintre canti-

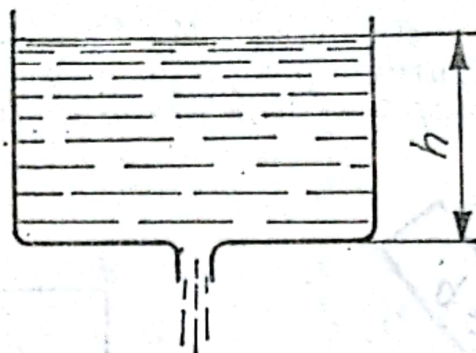


Fig. 24.35

tatea care se scurge pe secundă, q, şi înălţimea h a coloanei de lichid, se poate exprima prin funcţia liniară $q = ah$, unde a este un factor de proporţionalitate, care depinde de felul lichidului şi de diametrul orificiului. Să se stabilească o relaţie, cu ajutorul căreia se poate calcula cantitatea lichidului care curge în timpul t, dacă suprafaţa lichidului din rezervor are aria A. Mai departe se admite, prin aproximaţie, că presiunea rămîne constantă în timp.

66. La calculul stabilităţii unei macarale (fig. 24.36) coeficientul de rezistenţă statică este raportul dintre momentul de inerţie şi momentul de răsturnare. Pentru momentul de inerţie este valabilă relaţia: $M = F_k(l_k + b) - F_R(l - b)$, unde $\vec{F}_k$ este forţa cu

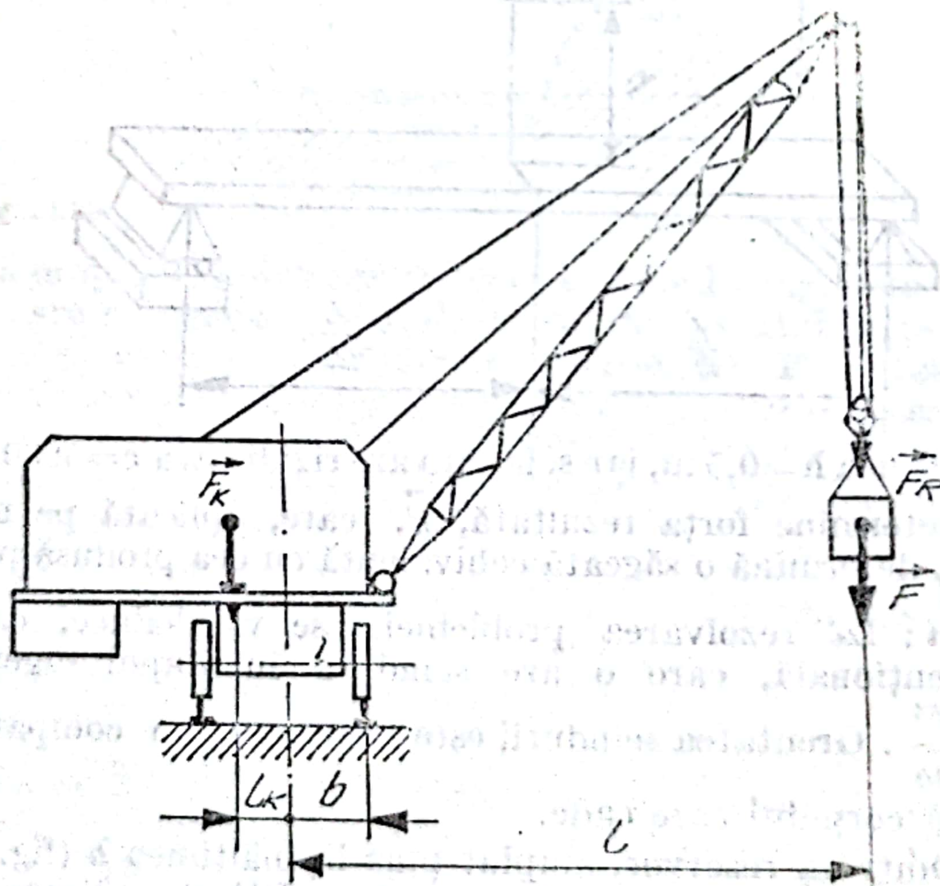


Fig. 24.36

care macaraua acționează pe suportul ei, $\vec{F}_R$ forța cu care rola și cîrligul trag cablul, l_k distanța dintre centrul de greutate al macaralei și a axei ei de rotație, l distanța dintre centrul de greutate a sarcinii și axa de rotire a macaralei, iar b jumătate din ecartamentul șinelor. Pentru momentul de răsturnare avem relația:

$M_r = F\ (l-b)$, unde F este capacitatea de ridicare a macaralei. După normele în vigoare, coeficientul de stabilitate statică nu este mai mic de 1,5:

$$K = \frac{M_t}{M_r} = \frac{F_k(l_R + b) - F_R\,(l - b)}{F(l-b)} \geqslant 1{,}4$$

Admițînd că sînt dați toți parametrii macaralei, să se stabilească limita stabilității macaralei.

67. Un dinamometru D este intercalat în cablul fix al unui scripete (fig. 24.37). Numărul cablurilor (fără capătul liber) este

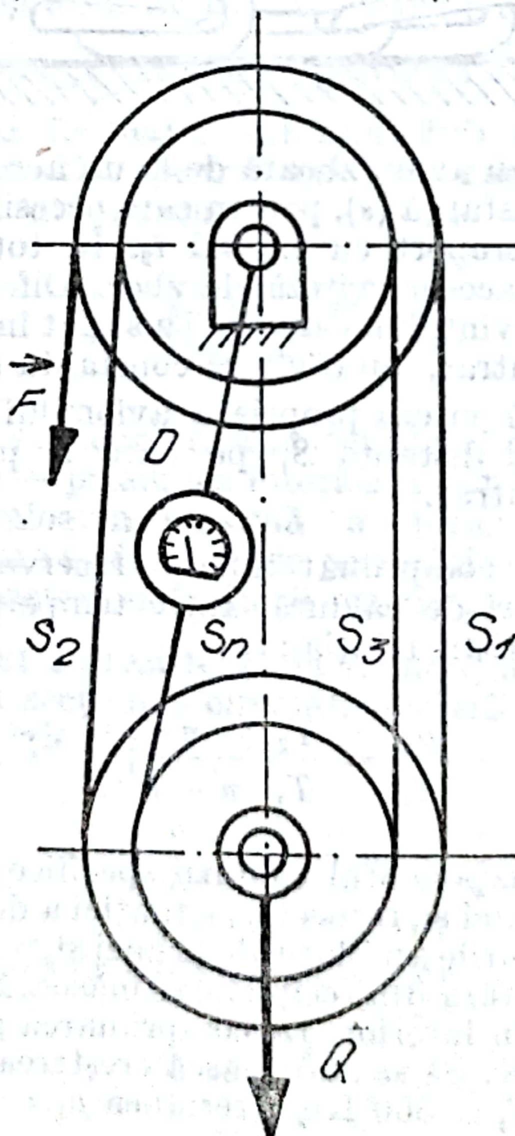


Fig. 24.37

$n = 4$. Dinamometrul indică sarcina $Q = 2430$ N. Să se stabilească mărimea sarcinei $\vec{Q}$ şi forţa $\vec{F}$, cunoscînd coeficientul de rezistenţă al rolelor, $k = 1{,}02$.

68. Să se stabilească forţa necesară, pentru a ridica un lanţ greu în poziţie verticală, cunoscînd masa lanţului, m şi lungimea lui l (fig. 24.38).

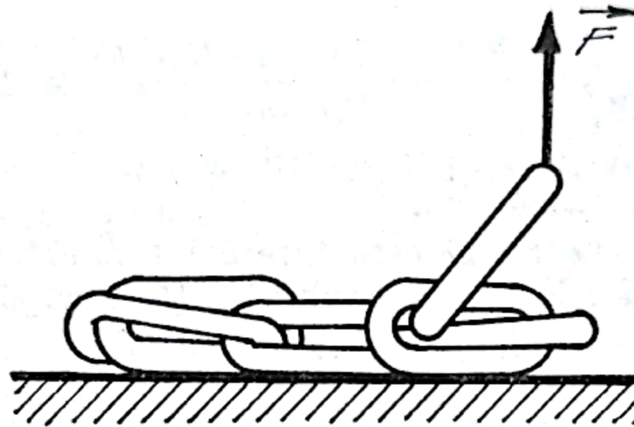


Fig. 24.38

69. La o probă un avion zboară de la un aeroport la un punct dinainte stabilit o distanţă (s), pentru care necesită timpul t_1; apoi, el se întoarce la aeroport cu timpul t_2. În tot timpul zborului pilotul a menţinut aceeaşi viteză de zbor. Diferenţa de timp se datorează influenţei vîntului, care întîi a suflat în direcţia zborului, apoi însă în sens contrar, cu o viteză constantă ($t_1 < t_2$).

Să se stabilească viteza proprie a avionului faţă de vînt, V, viteza vîntului v_w şi distanţa S, pe care a parcurs-o avionul zburînd în sens contrar.

70. Un gaz este comprimat într-un rezervor ai cărui pereţi sînt buni conducători de căldură. Între temperatura absolută şi presiunea gazului există relaţia:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \frac{n}{n-1},$$

unde $n = 1{,}2$ este exponentul căldurii specifice; p_1 şi, respectiv, p_2 sînt presiunile primei şi, respectiv, situaţiei a doua; T_1 şi, respectiv, T_2 sînt temperaturile absolute ale primei şi, respectiv, ale situaţiei a doua. Temperatura din recipient se măsoară cu ajutorul unui termoelement fixat în interior. La comprimarea gazului, temperatura a crescut cu 5 K. Să se stabilească creşterea presiunii. Se cunosc temperatura $T_1 = 300$ K şi presiunea $p_1 = 20$ N/cm².

71. La executarea unei sărituri cu întîrzierea deschiderii parașutei, un parașutist a părăsit avionul la o înălțime de $h = 5\,000$ m și a aterizat după $t_0 = 5$ min în regiunea prevăzută. Parașuta a căzut cu o viteză medie $v = 7$ m/s. Accelerația greutății este $g = 9{,}81$ m/s ^{2}. Să se stabilească timpul t_1 al căderii libere și t_2 al zborului cu parașuta deschisă (Rezistența aerului va fi neglijată).

72. Să se studieze variația greutății unui corp în raport cu latitudinea geografică.

73. Să se determine viteza unghiulară și viteza liniară pentru punctele de pe suprafața globului pămîntesc, precum și accelerația lor normală.

74. Forța $\vec{P}$ se descompune în două componente. Una are chiar mărimea forței $\vec{P}$ și formează cu ea un unghi α. Să se afle mărimea componentei a doua și unghiul α pe care-l formează cu forța $\vec{P}$.

75. Condiția ca în materialul unui tub cu pereți groși să existe deformații plastice (permanente) sub acțiunea unei presiuni interioare, rezultă din relația:

$$\sigma_t = \frac{\sqrt{3\,R^4 + r^4}}{R^2 - r^2} \cdot p,$$

unde σ_t este limita de curgere a materialului din care este confecționat tubul, iar p — presiunea interioară în tub.

Determinați valoarea maximă a presiunii prin depășirea căreia, oricît de mare ar fi grosimea peretelui tubului, în materialul acestuia vor lua naștere deformații plastice.

76. Din calculul de rezistență la flambaj a unei coloane cilindrice de fontă cu secțiunea circulară inelară a rezultat valoarea momentului de inerție axial:

$$I = \frac{\pi}{64}\,(D^4 - d^4).$$

a) Exprimați raza de inerție i, a cărei expresie este:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}},$$

în funcţie de D şi a (raza de inerţie este folosită în calcule de stabilitate a coloanelor sau stîlpilor solicitaţi la compresiune);

b) Calculaţi diametrele D şi d, ţinînd seama de rezultatul de la punctul *a*).

77. Un laminor este format din 2 cilindri cu diametrul $2r = 50$ cm, care se rotesc în sens opus. Distanţa dintre cilindri fiind a şi coeficientul de frecare dintre metal şi cilindrii laminorului fiind $k = 0{,}1$, se cere:

a) Să se arate că, pentru a fi posibilă obţinerea tablei din laminat, unghiul de frecare dintre valţuri şi laminor trebuie să fie mai mare ca unghiul la centru.

b) Să se determine grosimea maximă b a materialului care poate fi laminat.

78. Banda dispozitivului unui oscilograf, care serveşte la înregistrarea oscilaţiilor armonice, se deplasează de la stînga spre dreapta cu viteza $v_0 = 2$ m/s. Corpul în oscilaţie descrie o sinusoidă a cărei ordonată maximă $AB = a = 2{,}5$ cm, iar lungimea de undă este $AC = \lambda = 8$ cm. Să se afle ecuaţia oscilaţiei armonice înregistrată pe oscilograf, presupunînd că în momentul iniţial, $t = 0$, punctul în mişcare se află în centrul de oscilaţie O.

79. Se fixează în punctul O o bară omogenă, OAB, formată din două segmente: $OA = a$, $OB = b$, înclinate una faţă de alta cu un unghi. Să se calculeze unghiurile α şi β făcute de verticala punctului de suspensie O cu OA şi OB în poziţia de echilibru.

80. În figura 24.39 este arătat schematic un mecanism cu pîrghii format din trei elemente, care se mişcă în îmbinările A, B şi punctele de articulaţie M_1 şi M_2, care sînt fixe. De aceea distanţa M_1M_2 este fixă, iar celelalte trei distanţe M_1A, AB şi BM_2

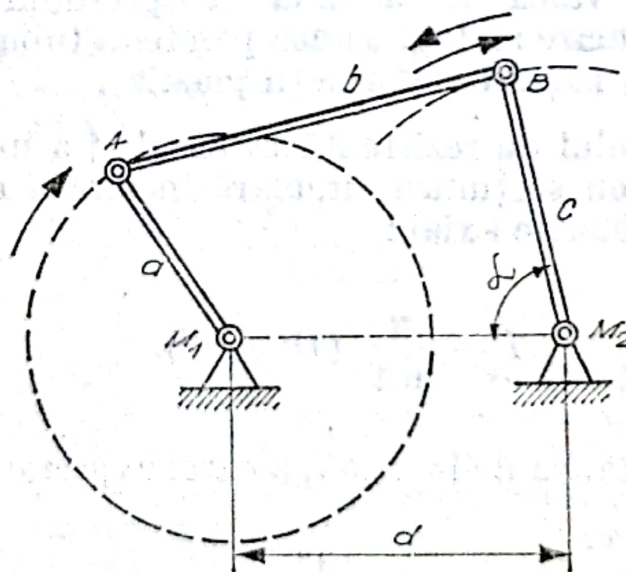


Fig. 24.39

se pot roti sau mişca. Să se determine condiţiile pentru ca un element al mecanismului (de exemplu M_1A), care este fixat în M_1, să se poată roti liber (adică să execute mişcarea unei pîrghii).

81. La ce înălţime trebuie aşezat un bec cu intensitatea luminii I, deasupra unei suprafeţe pătrate cu latura a (în m), pentru ca centrul fiecărei muchii laterale a acestei suprafeţe, să aibă iluminare maximă (fig. 24.40)?

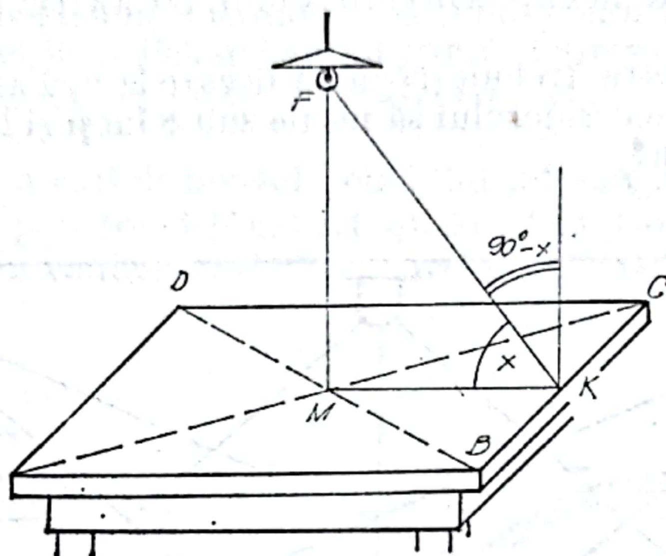


Fig. 24.40

82. Într-o baie de apă pentru călirea pieselor din oţel se găseşte apă la o temperatură de 6°C. În această baie se pun piese care sînt încălzite la 850°C. Cîtă apă trebuie pusă în baie pentru ca, menţinînd constant volumul pieselor, temperatura medie să fie între 50°C şi 70°C?

83. Un tablou este fixat la înălţimea $BF = h_1$ faţă de podea şi formează cu peretele un unghi (fig. 24.41).

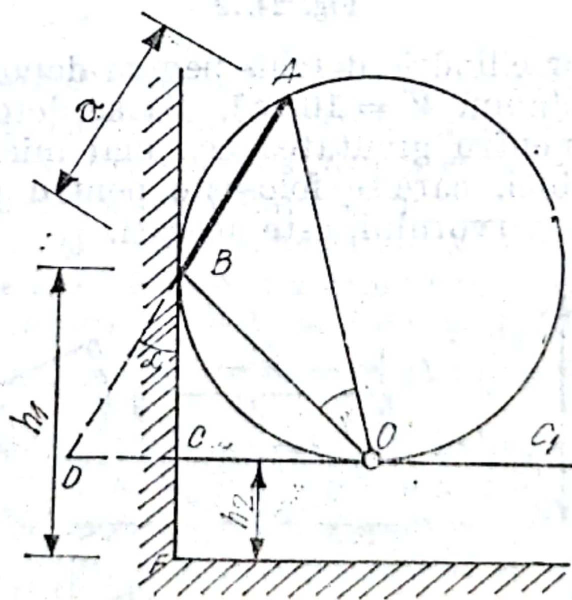


Fig. 24.41

Să se examineze la ce distanță de perete trebuie să stea un vizitator, pentru ca să vadă tabloul sub unghiul cel mai mare. Lățimea tabloului este $AB = a$, iar ochii vizitatorului sînt în medie la înălțimea h_2 de podea.

84. Un coridor de lungime, $a = 20$ m trebuie să fie iluminat de trei lămpi, care sînt așezate în linie dreaptă la o înălțime de 4 m față de pardoseală (fig. 24.42). Două lămpi cu intensitate egală sînt așezate în capetele coridorului, iar a treia este plasată la mijloc.

Ce intensitate trebuie să aibă fiecare lampă astfel ca iluminarea la capetele coridorului să nu fie sub 8 lucși și la mijloc să nu fie peste 10 lucși?

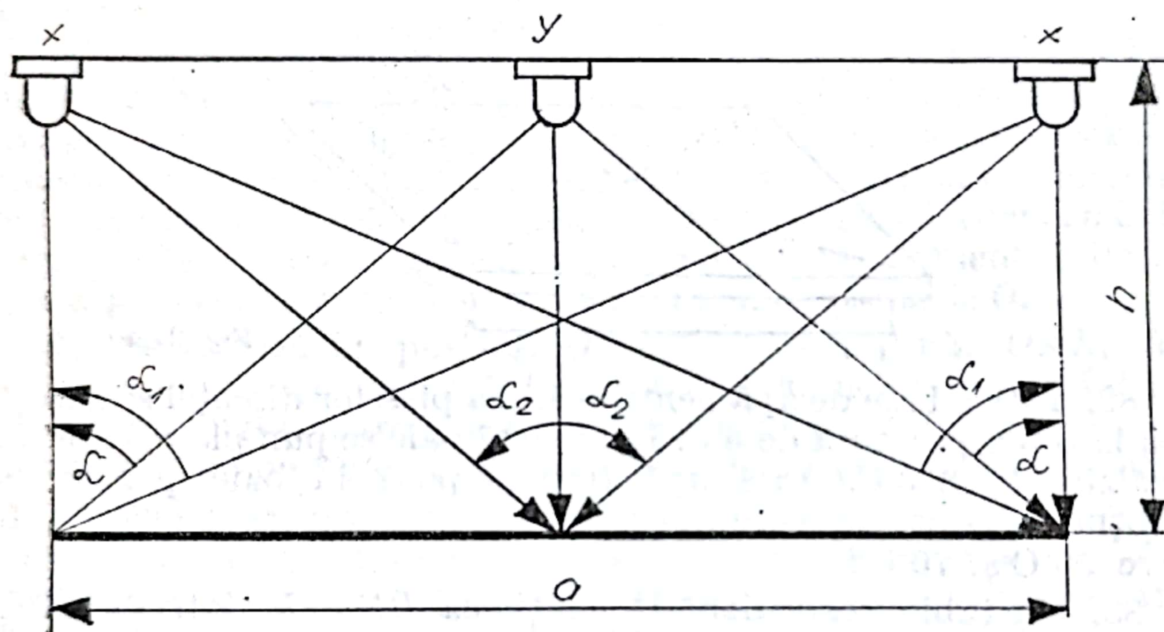


Fig. 24.42

85. Un rezervor cilindric deschis pentru depozitarea lichidelor (fig. 24.43) are volumul $V = 10$ m³. Să se determine diametrul d și înălțimea h pentru greutatea cea mai mică a rezervorului, dacă grosimea tablei, care se folosește pentru peretele cilindric și pentru fundul rezervorului, este aceeași.

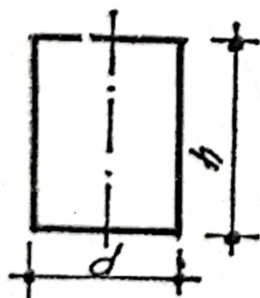


Fig. 24.43

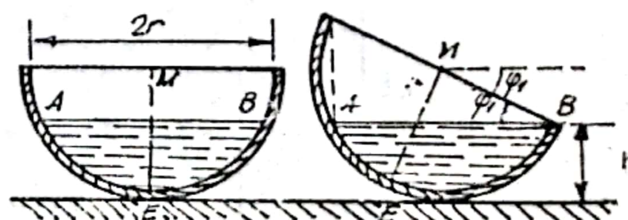


Fig. 24.44

86. Raportul dintre suprafața și secțiunea unei conducte din țeavă și perimetrul umezit se numește rază hidraulică. Cu cît raza hidraulică este mai mare, cu atît mai mică este scăderea de presiune de-a lungul conductei. Să se stabilească laturile secțiunii dreptunghiulare a conductei, unde scăderea de presiune este mai mică, dacă aria secțiunii țevii este A.

87. Un recipient de forma unei semisfere cu diametrul interior $2r$, este umplut pînă la jumătatea înălțimii b cu lichid. Recipientul se înclină astfel încît lichidul să nu curgă. Care valori sînt admise pentru unghiul de înclinare (fig. 24.44)?

88. Pentru a stabili nivelul lichidului într-un rezervor închis, se folosește un plutitor A (fig. 24.45a). Acest plutitor semnalizează, cu ajutorul a 2 contacte (C și D) nivelul cel mai scăzut sau cel

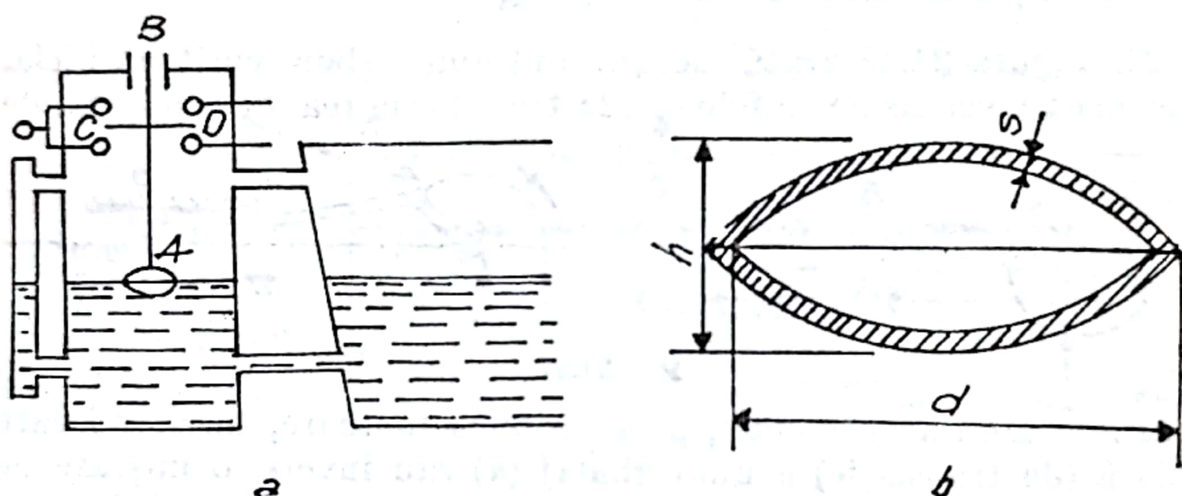


Fig. 24.45

mai ridicat al lichidului. Să confecționăm un plutitor pentru un rezervor de păcură (plutitor pentru instalația de control a rezervorului). Plutitorul să fie compus din 2 semisfere ale unei bile goale, care au următoarele dimensiuni: diametrul $d = 20$ cm, înălțimea $h = 10$ cm și grosimea peretelui $s = 0{,}2$ cm (fig.24.45 b).

Ce densitate trebuie să aibe materialul plutitorului, dacă adîncimea de scufundare este între $h_1 = 3$ cm și $h_2 = 4$ cm și pîrghia $\overline{AB}$ cu placa de contact $\overline{CD}$ are împreună $m_3 = 147$ g?

89. Într-un recipient închis se află un lichid și un gaz sub presiune (fig. 24.46). Printr-o măsurare s-a stabilit presiunea p_1 într-un punct A și presiunea p_2 într-un punct B. Se cere presiunea gazului în recipient, distanța punctului A de la suprafață și

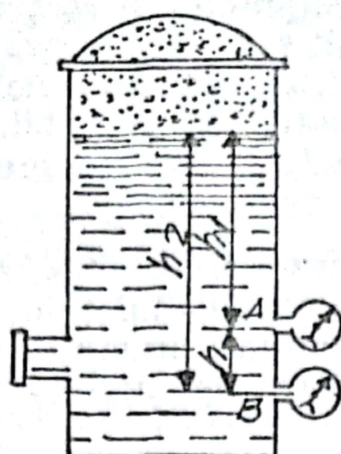


Fig. 24.46

distanța între punctele A și B, dacă lichidul are densitatea ρ și punctul B are distanța h_2 de la suprafață. Pentru rezolvare se va folosi ecuația de bază din hidrostatică.

90. Figura 24.47 arată mecanismul unui arbore cotit cu bielă. Asemenea mecanisme se folosesc la transformarea unei mișcări de

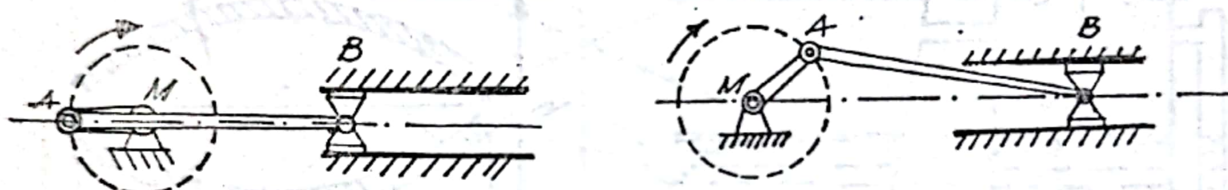


Fig. 24.47

rotație a unui arbore cotit, printr-o bielă motoare, într-o mișcare liniară (de translație) a unui ghidaj (a) sau invers, o mișcare de translație a unui ghidaj într-o mișcare de rotație a brațului manivelei (b). Să se stabilească lungimea manivelei $\overline{MA}$ și lungimea bielei motoare $\overline{AB}$, așa încît:

a) Distanța ghidajului B de la centrul de rotație a brațului manivelei să nu fie mai mic de m milimetri și mai mare de m_1 milimetri.

b) Unghiul între biele motoare $\overline{AB}$ și linia de unire $\overline{MB}$ să nu fie mai mic decît α și mai mare decît α_1.

91. Un instrument optic, care poate fi rotit în jurul axului său, are o scală liniară orizontală, și este așezat la o anumită distanță de o oglindă. Oglinda este prevăzută cu un indicator k, perpendicular pe suprafața oglinzii, deasupra axului de rotație. Printr-o fantă D din scală, cade o rază de lumină $\overline{DC}$ pe oglindă.

Acolo raza este reflectată și pe scală apare marca de lumină F. Să se arate că $\overline{ED} < \overline{DC}$ și $\overline{EF} < \overline{FC}$, dacă E este acel punct care prin indicatorul $\overline{CK}$ este marcat pe scală.

92. La controlul indicatorului de viteză la avioane se folosește metoda buclei (fig. 24.48). Avionul zboară cu o viteză egală, constantă de-a lungul distanței fixate (în desen arătat prin linie groasă). Primul observator pune în funcțiune cronometrul în momentul cînd avionul trece prin punctul A în direcția punctului B și oprește ceasul cînd avionul vine dinspre D și trece prin punctul E. El măsoară timpul t_1, necesar pentru efectuarea buclei mari $ABCDE$.

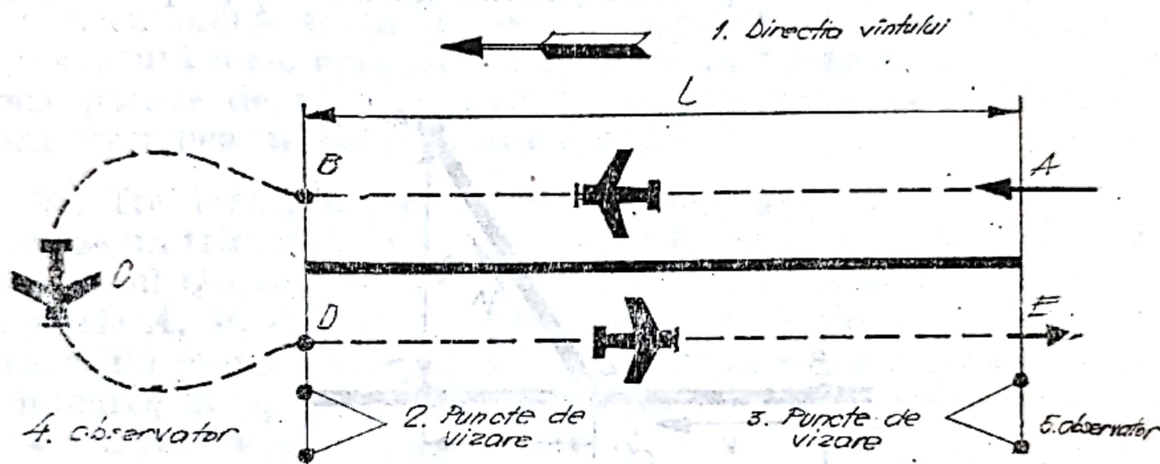


Fig. 24.48

Al doilea observator măsoară în același mod timpul t_2, necesar pentru efectuarea buclei mici BCD. Deoarece se cunoaște lungimea l și viteza vîntului v_0 (direcția vîntului este însemnată printr-o săgeată), să se calculeze viteza proprie a avionului, v.

93. Un corp este mișcat pe durata de $x(s)$. În prima secundă el a parcurs 3 m, iar în fiecare secundă următoare cu 4 m mai mult decît în secunda anterioară. Dacă acest corp ar fi parcurs 1 m în prima secundă, iar în fiecare următoare secundă 8 m mai mult decît în cea anterioară, atunci în acest timp el ar fi parcurs un drum care s-ar fi deosebit foarte puțin de drumul parcurs în realitate. Drumul parcurs este mai mare de 6 m și mai mic de 30 m, distanță totală. Să se calculeze durata totală a mișcării corpului.

94. Un şir alcătuit din (n) rezistenţe dă următoarele valori: $(n+1)\ \Omega$; $(n+2)\ \Omega, \ldots, (2n-1)\ \Omega$; $2n\ \Omega$.

Să se arate că rezistenţa totală la o legare în paralel va fi mai mică decît $2\ \Omega$.

95. Să se determine adîncimea de aşchiere t (mm), în cazul frezării unei suprafeţe plane cu o freză cilindrică avînd diametrul D(mm), astfel încît grosimea maximă a aşchiei a_{max} (mm) să nu depăşească o anumită valoare. (Valoarea lui a_{max} influenţează puterea necesară la aşchiere în cazul frezării).

96. Pe un teren în punctul A sînt locuri de depozitare (fig. 24.49). Distanţa h în km la o gară C este cunoscută. Distanţa de la staţia următoare B pe calea ferată la gara C este perpendiculară

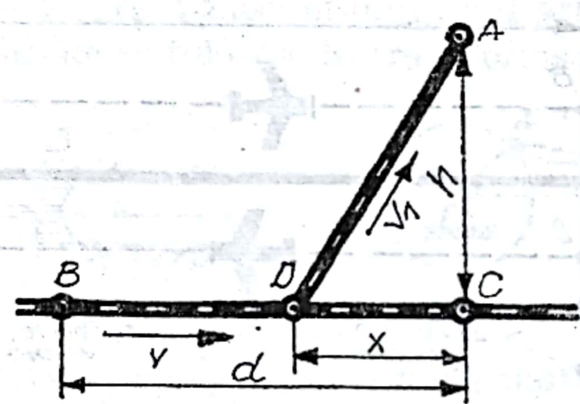


Fig. 24.49

pe AC şi este de asemeni cunoscută reprezentînd d (km). Distanţa $\overline{BC}$ este dreaptă dar pe aceasta trebuie să determinăm punctul D de la care trasăm o cale ferată îngustă pînă la locul de depozitare. La ce distanţă de punctul C trebuie să fie punctul D pentru ca trecerea prin traseul $BD + DA$ să se facă în cel mai scurt timp ştiind că pe linia principală se obţine o viteză medie v (în km h^{-1}) şi pe linia secundară se poate atinge o viteză medie v_1 (în km h^{-1}) şi ($v_1 < v$)?

97. Un spectator se află la distanţa a (m) de ecranul unei săli de cinematograf a cărei înălţime este h(m). La ce distanţă trebuie să fie marginea de jos a ecranului de ochiul spectatorului, pentru ca filmul să se vadă sub unghiul vizual cel mai mare?

Observaţie: Cu cît unghiul vizual sub care se priveşte un obiect este mai mare cu atît se vede mai clar obiectul respectiv.

98. O ţeavă îndoită face legătura între două baloane care sînt umplute cu gaz, sub presiuni diferite. Bazele sînt despărţite prin-

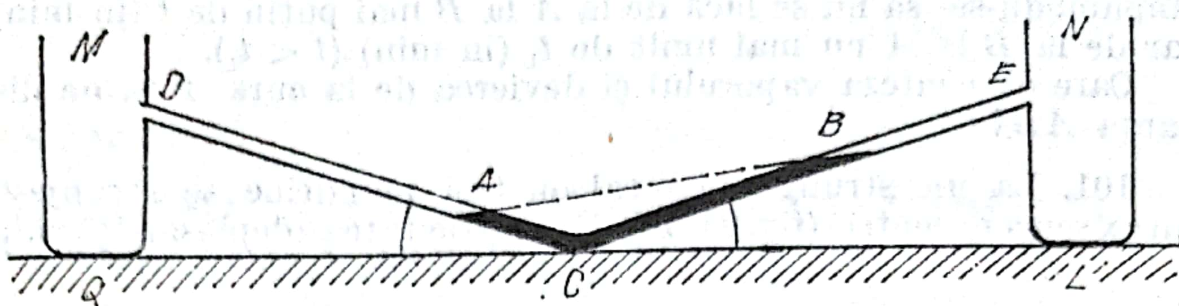


Fig. 24.50

tr-o cantitate necunoscută de mercur aşezată în cotul ţevii *DCE* (fig. 24.50).

Punctele *D*, *C* şi *E* sînt aşezate în acelaşi plan şi unghiurile *DCQ* şi *ECL* trebuie să fie egale. Admitem că volumul mercurului este necunoscut şi că ţeava este aşezată într-o încăpere a cărei temperatură nu o cunoaştem. Arătaţi că distanţa *AB* între cele două puncte de nivel a mercurului, are valoarea cea mai mică dacă presiunea în baloane este egală.

99. Trei întreprinderi *A*, *B* şi *C* sînt aşezate astfel încît să formeze un triunghi, unde $b < c < a$. Cazarea muncitorilor se face în punctul *O* care este la egală distanţă de laturile triunghiului. Punctele *A*, *B*, *C* şi *O* sînt legate prin şosele drepte. Un autobuz pleacă din punctul *O* şi duce muncitorii la locurile lor de muncă şi întoarce la *O*, mergînd numai pe drumurile marcate. Care este ruta cea mai scurtă a autobuzului?

100. Punctele *A* şi *B* sînt pe malurile opuse ale unui rîu, unde punctul *B* faţă de punctul *A* se află în avalul rîului. Viteza curentului apei este egală cu *v*, direcţia curentului formează cu linia de unire a punctelor *AB* un unghi α (fig. 24.51). Se presupune că

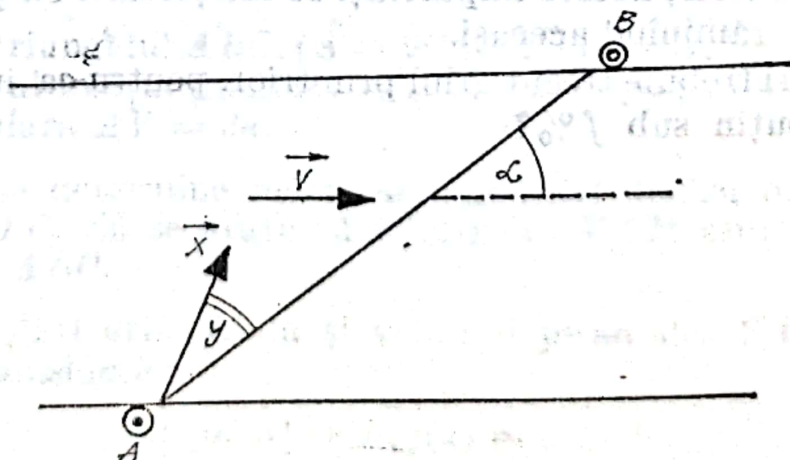


Fig. 24.51

viteza curentului pe întreaga lățime a rîului este aceeași. Un vapor face legătura între A și B de-a lungul distanței AB, impunîndu-se să nu se facă de la A la B mai puțin de t (în min), iar de la B la A nu mai mult de t_1 (în min) $(t < t_1)$.

Care este viteza vaporului și devierea de la curs față de distanța AB?

101. La un strung universal cu trei mandrine se strunjește un ax scurt excentric (fig. 24.52). Excentricitatea (deplasarea axului

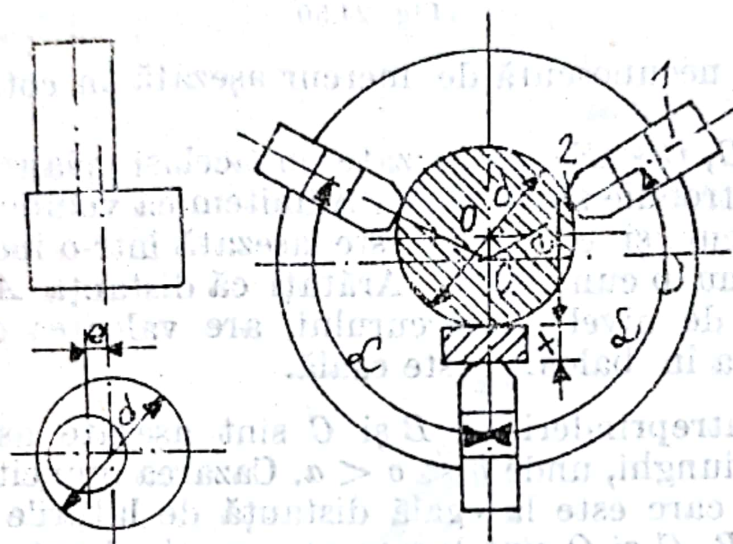


Fig. 24.52

părții cilindrice) este $e = 10$ mm iar diametrul axului care este fixat între mandrine este de $d = 100$ mm, unghiul între mandrine este $\alpha = 120°$. Calculați grosimea x a tablei care trebuie în acest caz fixată sub unul din bacuri.

102. Grîul treierat conține 1 % impurități. La fiecare trecere a grîului prin trior, aceste impurități se micșorează cu q %, cantitatea de grîu rămînînd aceeași.

De cîte ori trebuie trecut grîul prin trior, pentru ca impuritățile să fie cel puțin sub f %?



Capitolul 25

EXERCIȚII ȘI PROBLEME DATE LA ADMITERE ÎN TREAPTA A DOUA

● Să se calculeze: $\left(\frac{\sin A}{\cos B} + \frac{\cos C}{\sin A}\right)$: tg $(B+C)$,
unde A, B, C sînt unghiurile unui triunghi dreptunghic isoscel.

● Se consideră: $f: R \to R$, $f(x) = mx^2 + (m+1)x - 2m+1$, $m \in R$.

1. Pentru ce valori ale lui m graficul funcției $f(x)$ se reduce la o dreaptă? În acest caz să se studieze variația funcției și să se reprezinte grafic.
2. Arătați că $f(x) = 0$ nu are rădăcină dublă, oricare ar fi $m \in R$.

● Să se rezolve ecuația:

$$(\sqrt{3} - \mathrm{i})\, z^4 - z^2 = 0,$$

● Demonstrați propozițiile:
„dacă și numai dacă în triunghiul ABC există relația $\sin A = 2 \sin B \cos C$, atunci el este isoscel".

● Fie triunghiul ABC, $(\hat{A} = 90°)$ în care $BC = 4a$, $\hat{C} = 30°$, și M piciorul înălțimii din A. În A se ridică pe planul triunghiului perpendiculara $AV = 3a$.

1) Să se determine mărimea unghiului diedru dintre planele VBC și ABC. Să se arate că triunghiul VAM este asemenea cu triunghiul ABC.

2) Calculați aria totală și volumul piramidei $VABC$.

● Se consideră:

$$f: [0, 5] \to R, f(x) = x - 1$$

a) Să se determine mulțimea valorilor funcției f.

b) Să se reprezinte grafic funcţia.

c) Să se studieze semnul funcţiei.

- Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{1}{2}\log_2(x^2+x+2)-\log_2(3x-2)=1.$$

- Să se calculeze valoarea numerică a expresiei:

$$E(x)=\frac{2\sin\frac{x}{2}-\operatorname{tg}2x}{\cos 3x+\operatorname{ctg}\frac{5x}{2}},\ \text{pentru } x=\frac{\pi}{2}.$$

- Fie triunghiul ABC ($\hat{A}=90°$) în care $AB=AC=a$ şi M piciorul înălţimii din A. În A se ridică pe planul triunghiului perpendiculara $AV=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

a) Calculaţi volumul şi aria totală a piramidei $VABC$.

b) Să se determine mărimea unghiului diedru dintre planele VBC şi ABC.

- Se consideră $f:R\to R$, $f(x)=ax+b$; $a, b, \in R$, $a\neq 0$.

Se cere:

a) Să se determine a şi b ştiind că graficul funcţiei f trece prin origine şi prin punctul $P(1, 4)$.

b) Să se reprezinte grafic $f(x)=4x$ pentru $x\in(-1, 1]$.

c) Să se arate că oricare ar fi numerele reale x_1 şi x_2 este adevărată relaţia:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

- Să se rezolve ecuaţia

$$\lg(x+1)-2\lg(x-1)=1.$$

- Să se calculeze $\sin(\alpha-2\beta)$, ştiind că:

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\beta=\frac{1}{2},\ \text{iar } \alpha\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right);\ \beta\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

• Să se verifice identitatea :

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} a = \frac{2}{\sin 2a}$$

• Baza unei piramide este un romb, iar înălţimea ei trece prin punctul de intersecţie al diagonalelor rombului.

a) Demonstraţi că feţele laterale ale piramidei sînt egale.

b) Calculaţi volumul piramidei ştiind că diagonalele bazei şi înălţimea sînt respectiv 4 cm, 5 cm, 6 cm.

• Fie ecuaţia :

$$(m+1)\,x^2 - mx - 2m = 0, \text{ unde } m \in R.$$

a) Să se discute şi să se rezolve ecuaţia presupunînd $m \neq -1$.

b) Să se arate apoi că dacă m tinde la -1, una din rădăcinile ecuaţiei tinde către rădăcina ecuaţiei care se obţine din cea dată pentru $m = -1$.

c) Presupunînd că $m \geqslant 0$, să se arate că $S = x_1 + x_2$ este funcţie crescătoare de m şi că $S \in [0, 1)$.

d) Să se calculeze aria suprafeţe limitată de graficul funcţiei

$f : R \to R, f(x) = x^2$ şi dreptele de ecuaţii $y = 0$; $y = 1$.

• Se dă triunghiul echilateral ABC de latură a. În vîrful A se duce perpendiculara pe latura AC care este întîlnită în punctul D de paralela la AB dusă prin vîrful C.

1. Să se arate că :

a) Mediana AM a triunghiului ACD este paralelă cu BC.

b) Aria triunghiului ACD este dublul ariei triunghiului echilateral dat.

2. Să se calculeze aria şi volumul corpului obţinut prin rotirea triunghiului ABC în jurul unei laturi.

• Să se determine mulţimile A, B, ştiind că sînt îndeplinite condiţiile :

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $A \cap B = \{1, 2\}$

c) $A - B = \{5\}$

● Să se rezolve ecuaţiile :

a) $2^{x+1} = 32$; $\sqrt{5^x} = \sqrt[3]{25}$;

b) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$

● Folosind proprietăţile logaritmilor să se dezvolte:

$$\log_2 \frac{5\,x^3\,y^2}{2a^2\,b}.$$

● Să se restrîngă expresia :

$2 \log \sqrt{a} + 3 \log b - 6 \log c.$

● O sferă ce are aria egală cu 400 π cm² se secţionează cu două plane paralele situate de o parte şi de alta a centrului. Ariile celor două secţiuni sînt de 36 π cm² şi 64 π cm². Să se afle :

a) volumul sferei,

b) aria laterală şi volumul trunchiului de con ce are ca baze ele două secţiuni.

● Se dau mulţimile :

$$A = \{3, 4, 5, 6\};\ B = \{2, 3, 5, 7\}.$$

Să se afle $A \cup B$ şi $A \cap B$.

● Considerăm : $f: R \rightarrow R$; $f(x) = ax^2+bx+c$; $a, b, c \in R$, $a \neq 0$. Se cere :

a) Să se afle valorile care satisfac relaţia : $f(x) = 0$ cînd $a = 2$, $b = 3$, $c = -2$.

b) Pentru aceste valori ale constantelor a, b, c, să se stabilească punctul de minim al funcţiei.

c) Să se traseze graficul funcţiei de la punctul a).

d) Considerînd funcţia dată în enunţ, să se stabilească a, b şi c, astfel ca graficul funcţiei să taie axa Ox în punctele $x = 2$ şi $x = 4$ şi să admită un minim pentru $x = 3$, $y = -1$.

● Să se rezolve ecuaţiile:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\frac{\pi}{4} = 0$$

$$2^x + 2^{2x} = 72$$

● Într-o piramidă patrulateră regulată se cunoaşte latura bazei egală cu 6 cm şi înălţimea de 4 cm.

Să se calculeze aria totală şi volumul piramidei.

● Se dau mulţimile:

$$A = \{2, 3, 4, 5\},\ B = \{1, 2, 4\}$$

Să se afle: $A \cup B$ şi $A \cap B$.

● Să se stabilească mulţimea care satisface relaţia:

$$3x - 5 > x - 2$$

● Să se rezolve ecuaţiile:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$,

b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$,

c) $2^{x+1} + 2^x = 2^{x+2}$.

● Să se reprezinte grafic funcţia:

$f: R \to R;\ f(x) = x^2 - 3x + 2.$

● Să se demonstreze prin metoda inducţiei complete că:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},\ n \in N.$$

● Se dă un cilindru circular drept cu raza r şi înălţimea H şi un con circular cu raza R, cercul de bază fiind coplanar şi concentric cu una din bazele cilindrului, vîrful conului fiind situat în centrul celeilalte baze a cilindrului.

a) Să se determine raportul dintre R şi r astfel ca cilindrul şi conul să aibă acelaşi volum.

b) Să se afle H în funcţie de r astfel încît cilindrul şi conul să aibă acelaşi volum şi aceeaşi arie laterală.

● Se dau mulţimile : $A = \{4, 5, 6, 7\}$ şi $B = \{3, 5, 6\}$.

Să se calculeze $A \cup B$ şi $A \cap B$.

● Să se stabilească mulţimea care satisface relaţia :

$$3x - 2 < 2x+1$$

● Se consideră $f: R \rightarrow R$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in R$.

a) Să se determine a şi b astfel ca $f(1) = -1$ şi $f(-1) = 5$,

b) Să se reprezinte grafic $f(x) = -3x+2$,

c) Să se studieze semnul funcţiei $f(x) = -3x+2$.

● Să se rezolve ecuaţia :

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0.$$

● Se dă triunghiul ABC înscris în cercul O. Din vîrfurile B şi C se duc înălţimile BM şi CN. Să se demonstreze că tangenta la cerc în A este paralelă cu MN.

● Un trapez dreptunghic $ABCD$ (cu $\hat{B}=\hat{C}=90°$) se roteşte în jurul unei axe paralele cu BC, distanţa de la BC la axă fiind de 3 cm. Dacă : $AB = 12$ cm, $AD = 10$ cm şi $CD = 4$ cm, să se afle :

a) volumul corpului generat ;

b) aria totală a corpului generat. Axa se consideră în afara trapezului.

● Să se scrie în ordine crescătoare primele 10 elemente ale mulţimii :

$$A = \{x \mid x \in N,\ x \text{ multiplu de } 2\}.$$

● Se dau mulţimile :

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ şi } B = \{2, 4, 6\}.$$

Să se afle : $A \cup B$ şi $A \cap B$.

● Să se rezolve ecuaţiile :

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

b) $\log_{10}(x+20) = 1$

c) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 14$.

● O piramidă are baza un trapez isoscel cu bazele de 10 dm şi 4 dm, iar laturile egale de cîte 5 dm. Înălţimea piramidei este de 4 dm. Se face o secţiune în piramidă printr-un plan paralel cu baza, dus printr-un punct situat pe înălţime la distanţa de 1 dm de vîrf. Să se calculeze laturile secţiunii şi aria ei. Să se afle volumul piramidei mici.

● Fie $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + m}$, $m \in R$.

a) Să se determine valorile lui m, astfel încît funcţia f să fie definită pentru orice x real.

b) Să se determine m, astfel încît valoarea minimă a funcţiei să fie 3.

c) Pentru $m = 16$ să se determine mulţimea valorilor funcţiei.

● Să se rezolve ecuaţia :

$$\log x^2 = \frac{\log 4x^2}{\log 2x^2}$$

● Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

● Să se rezolve ecuaţia :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

● În punctele A şi B ale unui cerc se duc două tangente care se întîlnesc în C. Prin A se duce o paralelă la BC care taie cercul în D. Dreapta CD intersectează cercul în E, iar dreapta AE intersectează pe BC în F. Să se demonstreze că :

a) $\widehat{ADE} = \widehat{CAE} = \widehat{BCE}$,

b) triunghiurile ACF şi CEF sînt asemenea,

c) $FC^2 = FA \cdot EF$,

d) $FE = FC$.

● Un trunchi de piramidă regulată cu bazele pătrate de laturi a şi b are înălţimea H. Să se afle înălţimea piramidei din care s-a format acest trunchi de piramidă.

● Să se determine parametrul m din ecuaţia:

$$x^2 - 8x + m = 0,$$

astfel încît rădăcinile x_1 şi x_2 să satisfacă relaţiile:

1) $x_1 = x_2$ 3) $x_1 = \frac{1}{x_2}$

2) $x_1 = 3x_2$ 4) $x_1^2 + x_2^2 = 40$

● Să se demonstreze prin metoda inducţiei complete:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\ }{2n+1}$$

● Să se verifice identitatea:

$$\operatorname{tg} 2a + \frac{1}{\cos 2a} = \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$$

● Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, bisectoarea unghiului B intersectează înălţimea AD $(D \in BC)$ în E şi cateta AC în F.

$a)$ Să se arate că $FA \cdot DB = DE \cdot AB$,

$b)$ Să se arate că triunghiul AEF este isoscel.

● Să se afle aria şi volumul corpului generat prin rotirea unui exagon regulat de latură a în jurul uneia din laturi.

● Se dă ecuaţia: $x^2 - mx + 1 = 0$, unde m este un parametru real.

$a)$ Să se rezolve ecuaţia în cazul $m = 1$ şi să se verifice una din rădăcinile obţinute.

$b)$ x_1 şi x_2 fiind rădăcinile reale ale ecuaţiei iniţiale, să se calculeze fără a rezolva ecuaţia iniţială:

$E(m) = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$, determinîndu-se apoi mulţimea valorilor lui m pentru care $E(m)$ este pozitivă.

● Piramida $SABCD$ are ca bază pătratul $ABCD$, de centru O, iar SO perpendiculară pe planul pătratului.

a) ştiind că : $AB = 3\sqrt{2}$ cm şi $SA = 5$ cm, să se calculeze aria laterală şi volumul piramidei.

b) se consideră M un punct de pe muchia SB.

a) arătaţi că $AC \perp OM$.

b) Să se determine unghiul făcut de OM cu planul pătratului, astfel încît aria triunghiului ACM să fie minimă.

● Să se rezolve ecuaţia : $4 \sin x \cos x = 1$.

● Să se arate că orice soluţie a ecuaţiei de la problema precedentă este soluţie şi pentru ecuaţia :

$$\cos^2 2x = 2 - 5 \sin x \cos x.$$

● Dacă numerele reale şi pozitive a, b, c, verifică relaţiile : $c = a^2 - b^2$ şi $a > b + 1$, atunci funcţia $f: (0, \infty) \to R$, $f(x) = \lg_c x$ este strict crescătoare.

● Se dau numerele : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ şi $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

Să se calculeze : $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ şi $\frac{z_1}{z_2}$.

● Folosind proprietăţile logaritmilor, să se calculeze :

$$\log_a \frac{ab^r}{\sqrt{c}}$$

● Un con circular drept are raza bazei de 4 cm şi înălţimea de 3 cm.

Să se afle :

a) volumul conului ;

b) aria laterală a conului ;

c) volumul sferei înscrise în con.

● Se dă $\sin x = \frac{4}{5}$, x avînd extremitatea în cadranul 1.

Să se calculeze $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\sin 2x$ şi $\operatorname{tg} 2x$.

● Se dă expresia :

$$E(x) = \frac{x^2 + 4x}{x + 2}, \; x \in R - \{-2\}$$

a) Să se determine x, astfel ca $E(x) > 0$.

b) Să se calculeze $E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, punîndu-se rezultatul sub forma : $A + B\sqrt{2}$.

c) Să se rezolve ecuaţia : $\lg(x^2 + 4x) - \lg(x + 2) = \lg 3$.

● Să se rezolve ecuaţia : $x^2 - x + 1 = 0$ şi să se verifice soluţiile găsite.

● Se dă funcţia $f: R \to R$ de forma $f(x) = x + 1$.

a) Să se reprezinte grafic funcţia ;

b) Să se studieze semnul funcţiei ;

c) Să se precizeze monotonia funcţiei.

● Dintr-o piesă de oţel, avînd forma unei prisme regulate cu baza pătrat de latura 10 cm şi înălţimea de 12 cm se strunjeşte o piesă cilindrică cu minimum de material pierdut. Să se afle :

a) Aria laterală şi volumul piesei prismatice ;

b) Aria laterală şi volumul piesei obţinute.

● Să se verifice identitatea :

$$\frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 a} - \frac{1}{1 + \mathrm{ctg}^2 a} = \cos 2a$$

● Se dă funcţia $f: R \to R$ de forma $f(x) = x^2 - x - 1$. Se cere :

a) să se rezolve ecuaţia $x^2 - x - 1 = 0$ şi să se verifice soluţiile găsite ;

b) să se construiască graficul funcţiei $f(x)$;

c) să se studieze semnul funcţiei.

● *a*) Să se verifice că $x = \frac{\pi}{6}$ este soluţie a ecuaţiei $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$.

b) să se afle şi celelalte soluţii ale ecuaţiei date.

● Să se determine mulţimile :

$A = \{x \in R / x^2 - 5x + 6 = 0\}$

$B = \{x \in R / x^2 - 2x - 3 = 0\}$

şi apoi să se determine reuniunea şi intersecţia lor.

● Să se arate că expresia:

$$E = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{(1 - \sin x)(1 - \cos x)}{\sin x \cos x},$$

nu depinde de x.

● Un vas în formă de trunchi de con trebuie să aibă o capacitate de 900 π litri şi o adîncime de un metru. Ştiind că diametul unei baze este de 1,20 m, se cere să se calculeze diametrul celeilalte baze.

● Ştiind că: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$ şi $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, să se calculeze $\sin \alpha$ şi $\cos \alpha$.

● Să se rezolve ecuaţia: $\sqrt{x+7} + \sqrt{2x-3} = 4$.

● Fiind dat un triunghi echilateral ABC de latură a şi un punct $M \in BC$, ducem prin M paralele MP şi MQ la laturile AB şi AC ($P \in AC$, $Q \in AB$)

a) Să se demonstreze că: $AP + AQ = a$.

b) Să se calculeze $\cos P$ şi $\cos Q$ în funcţie de l şi a, P şi Q fiind unghiurile triunghiului APQ.

● Fie mulţimile:

$A = \{x / N, x = 3m + 1, m < N\}$

$B = \{x / N, x = 405 - 7n, n \in N, n \leqslant 57\}$

$C = \{x / N, x = 391 - 21p, p \in N, p < 18\}$

Să se demonstreze că $A \cap B = C$

● Se dă familia de parabole:

$f(x) = (1 - m^2) x^2 + (m - 1) x - (1 + m), m \in R.$

Să se determine valorile parametrului real m pentru care:

a) ecuaţia $f(x) = 0$ are rădăcini reale şi de semne contrare.

b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} \leqslant 2$, unde x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei

$$f(x) = 0.$$

c) una din parabolele familiei are vîrful pe dreapta :

$$x - 2y + 4 = 0$$

● Să se demonstreze egalitatea :

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1} \quad (n \in N)$$

● Fie ecuaţia : $\frac{2^x + a3^x}{2^x - a3^x} = 2, (a \in R)$

a) Să se rezolve ecuaţia.

b) Pentru ce valori ale parametrului real a rădăcina ecuaţiei este un număr întreg.

● Se dă sferă de rază a cu centrul în O şi un con circular drept cu vîrful în V circumscris sferei, ale cărei generatoare sînt tangente sferei în punctele situate pe un cerc de diametru AB. Se consideră de asemenea conul cu vîrful în O şi avînd ca bază acelaşi cerc mic al sferei de diametru AB.

a) Să se afle volumele conurilor VAB şi OAB în funcţie de raza a şi unghiul x (unde x este jumătatea unghiului de la vîrful V din secţiunea axială a conului circumscris).

b) Să se afle unghiul x ştiind că suma volumelor conurilor VAB şi OAB este egală cu $\frac{3}{8}$ din volumul sferei.

c) Să se arate că volumul conului circumscris sferei este egal cu :

$$\frac{a^3(1+\sin x)^2}{3 \sin x\,(1-\sin x)},$$

şi să se calculeze volumul pentru valoarea unghiului x găsit la punctul precedent.

● Se consideră familia de funcţii de gradul II :

$f(x) = 2mx^2 + (m-1)\,x + m-2.$

Să se determine valorile parametrului real m astfel încît rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ să fie:

a) inverse una alteia;

b) opuse una alteia;

c) egale.

● Să se găsească rangul termenului din dezvoltarea binomului: $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{18}$, care conține pe x.

● Se dă ecuația: $m\cos 6x + (4 - m)\sin 3x + 2 - m = 0$

a) Să se rezolve ecuația;

b) Să se afle valorile lui m petru care toate soluțiile sint reale;

c) Să se scrie soluțiile particulare cuprinse între $0°$ și $360°$ pentru $m = 2\sqrt{2}$.

● Se consideră un dreptunghi cu laturile $AB = CD = a$, $AD = BC = b$. O paralelă la latura BC intîlnește dreptele AB, AC, CD, respectiv în L, M, N.

Să se determine poziția acestei paralele, astfel ca rotind dreptunghiul în jurul laturii CD, volumul născut prin rotirea triunghiului ALM să fie egală cu volumul născut prin rotirea triunghiului MNC.

Să se arate că această poziție nu depinde de mărimea b.

● Să se rezolve ecuația:

$$3^{2\sqrt[4]{x}} - 4.3^{\sqrt[4]{x}} + 3 = 0.$$

● Să se arate că: $(1 - \sin\alpha)x^2 - 2x\cos\alpha + 1 - \sin\alpha \geqslant 0$, oricare ar fi $x \in R$.

● Se consideră patrulaterul convex $ABCD$, în care $AB = AD = a$ (a dat), $BC = CD$, unghiul $BAD = 60°$, unghiul $BCD = 120°$. Se rotește patrulaterul în jurul laturii AB. Să se afle:

a) aria totală a corpului obținut;

b) volumul corpului obținut.

● Să se rezolve inecuația:

$$|x - 2| \leqslant 1$$

● Se dă ecuația : $(m+1)x^2 - 2mx + 4 - 3m = 0$.

Să se determine $m \in R$, astfel încît :

a) ecuația să admită rădăcini reale ;

b) ecuația să admită rădăcini negative ;

c) una dintre rădăcini să fie 0.

● Să se rezolve ecuațiile :

a) $2^x + 4^x = 272$.

c) $A_x^6 - 24\, x\, C_x^4 = 11 A_x^4$.

● Se dă : $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$, $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Să se calculeze : $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$.

● Să se simplifice fracția : $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$.

● Să se rezolve ecuația : $\cos 2x - \cos x = 2$.

● Un triunghi dreptunghic avînd catetele de 3 dm și 4 dm, se rotește în jurul ipotenuzei. Să se afle aria și volumul corpului obținut.

● Să se rezolve ecuația :

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x - \cos 2x = 0.$$

● Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției dată prin relația :

$$f(x) = \lg \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 4}.$$

● Un romb *ABCD* de latură *a*, avînd unghiul $A = 60°$, se roteș- în jurul perpendicularei pe diagonala mare dusă într-o extremitate a ei. Să se calculeze :

a) volumul corpului format ;

b) aria totală a corpului format.

• Să se rezolve ecuația : $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$.

• Să se arate că într-un triunghi dreptunghic ABC ($A = 90°$) avem relațiile :

a) $\sin C = \cos A + \cos B$;

b) $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$.

• Secțiunea axială a unui cilindru este un pătrat cu diagonala de $6\sqrt{2}$ cm. Să se calculeze :

a) raza cilindrului ;

b) volumul cilindrului ;

c) aria laterală a cilindrului.

• Aflați rădăcinile ecuației :

a) $2^{4x} + 2^{4x-1} + 2^{4x-2} + 2^{4x-3} + 2^{4x-3} + 2^{4x-4} = 31$.

• Se dă funcția :

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{dacă } x \in (-\infty, 3) \\ -x^2 + 2x + 4 & \text{dacă } x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

a) să se afle $f(-2)$; $f(-1)$; $f(3)$; $f(4)$ și $f(6)$;

b) să se reprezinte grafic funcția $f(x)$.

• Se dau mulțimile :

$A = \{x / x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ și } x \in N\}$;

$B = \{x / -1 \leqslant x < 3 \text{ și } x \in Z\}$

$C = \{x / |x| \leqslant 2,\ x \in Z\}$.

Să se afle mulțimile : $M = A \cup B \cup C$, $N = A \cap B \cap C$ și $P = [B - A] \cup [C - B]$.

• Transformînd numerele complexe din forma algebrică în formă trigonometrică, să se calculeze numărul :

$Z = (1 - i\sqrt{3})^4 \cdot (1 + i)^2$.

● Un triunghi echilateral cu aria de $4\sqrt{3}$ cm² se rotește în jurul unei înălțimi. Să se scrie:

a) aria laterală a corpului de rotație;

b) volumul corpului.

● Fie A mulțimea formată din rădăcinile ecuației:

$\frac{x+1}{3} = \frac{x-1}{2} + 5$ și B mulțimea formată din rădăcinile ecuației $(x-2)(x+2) = 5x - 10$

Se cere:

a) să se rezolve ecuațiile;

b) să se afle $A \cup B$ și $A \cap B$.

● Se dă ecuația: $mx^2 - (m+1)x + 1 = 0$.

a) Să se calculeze suma (S), produsul (p) și discriminantul (Δ) ecuației date;

b) Să se afle valorile lui m pentru care ecuația dată are rădăcini reale și egale și să se afle aceste rădăcini.

● Să se rezolve ecuația: $2^{9x} - 2^{2(x+10)} = 0$.

● Folosind proprietățile logaritmilor, restrîngeți expresia:

$$E = \lg a + 5 \lg b - \frac{1}{3} \lg c.$$

● Știind că: $\sin x = \frac{3}{5}$, aflați valorile: $\cos x$ și $\mathrm{tg}\, x$.

● Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$E = (\cos x + \sin x)^2 - 1.$$

● Desenați un paralelipiped cu baza un pătrat, înscris într-un cilindru circular drept. Știind că cilindrul are diametrul bazei de 4 cm și înălțimea de 3 cm, aflați volumul paralelipipedului.

● Să se calculeze valorile numerice ale expresiei:

$$E(x) = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\mathrm{tg} x + \mathrm{ctg}\, x}, \text{ pentru } x = 45° \text{ și } x = 30°.$$

● O piramidă patrulateră regulată, are diagonala bazei de $6\sqrt{2}$ m şi apotema de 4 m.

a) Să se afle suma tuturor muchiilor piramidei;

b) Să se afle aria totală a piramidei.

● Fie $E(x)=\dfrac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

a) Să se afle valoarea lui $E(x)$ pentru $\operatorname{tg} x = 2$;

b) Să se rezolve ecuaţia: $\sin^6 x+\cos^6 x = \dfrac{121}{196}$.

● Un trunchi de con circular este circumscris unei sfere de rază R. Generatoarea trunchiului de con face cu planul bazei un unghi de 45°.

a) Să se calculeze aria totală şi volumul trunchiului de con.

b) Să se arate că raportul dintre aria totală a trunchiului de con şi aria sferei este egal cu raportul volumelor lor.

c) Să se exprime acest raport în funcţie de elementele trunchiului de con în cazul general (cînd unghiul dintre planul bazei şi generatoare este oarecare).

● Să se determine funcţia $f: R \to R$, dată prin:

$f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in R$ şi $a > 0$, ştiind că pentru $x = 1$, funcţia ia valoarea minimă -4 şi graficul ei trece prin punctul $(2; -3)$.

● Să se afle termenul care nu conţine pe x din dezvoltarea:

$$\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}.$$

● Să se demonstreze folosind inducţia completă că:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

• Să se arate că:

$$\frac{1 - \cos 2a + \sin 2a}{1 + \cos 2a + \sin 2a} = \operatorname{tg} a.$$

• Să se rezolve ecuaţia: $\sin 7x = \sin 3x$.

• Fie triunghiul ABC în care $AB = 13$ cm, $BC = 14$ cm, $CA = 15$ cm. În vîrful A se ridică o perpendiculară pe planul triunghiului ABC, pe care se ia punctul D, astfel încît: $AD = 12\sqrt{3}$ cm.

a) Să se determine aria triunghiului ABC, raza cercului înscris şi raza cercului circumscris.

b) Să se afle aria totală şi volumul piramidei $DABC$.

c) Să se afle mărimile unghiului dintre feţele DBC şi ABC.

• Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in R$.

Se cere:

a) Să se determine a şi b, astfel ca $f(1) = 1$, $f(-2) = 7$;

b) Să se reprezinte grafic funcţia $f(x) = 2x+3$;

c) Să se studieze semnul funcţiei $f(x) = -2x+3$;

• Se dă ecuaţia $x^2 - 5x+6 = 0$. Calculaţi expresia: $E = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 2$, unde x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei date.

• Rezolvaţi ecuaţia: $\sin x = \cos 2x$.

• Fie o piramidă $ABCD$, la care muchia AD este perpendiculară pe planul bazei. Aflaţi aria totală a piramidei cunoscînd:

$$AD = 13 \text{ cm}, BC = 14 \text{ cm}, CA = 15 \text{ cm şi } AD = 3 \text{ cm}.$$

● Să se rezolve ecuația: $a^2 + a + 1 = 0$. Dacă a este una din rădăcinile aflate, să se calculeze valoarea expresiei: $E = a^{14} + \frac{1}{a^{14}}$, scriind mai întîi forma trigonometrică a lui a.

● Un triunghi dreptunghic are catetele $b = 3$ cm, $c = 4$ cm. Se rotește triunghiul în jurul catetelor și a ipotenuzelor obținînd volumele v_1, v_2, v_3.

1) Să se afle cele trei volume;

2) Să se arate că oricare ar fi laturile triunghiului dreptunghic există relația:

$$\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} = \frac{1}{v_3^2}$$

● Într-un triunghi, cunoaștem o latură a și unghiurile adiacente B și C.

a) Să se găsească formula care dă înălțimea dusă din vîrful A.

b) Să se găsească formula care dă aria corpului născut prin rotația triunghiului în jurul laturii BC și să se facă această formulă calculabilă prin logaritmi.

● Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

● Să se rezolve ecuația:

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$

● Fie ABC un triunghi și AA', BB', CC', medianele triunghiului. Fie M un punct nesituat în planul triunghiului. Să se arate că planele: (MAA'), (MBB'), (MCC') au o dreaptă comună.

● În vîrfurile B și D ale patratului $ABCD$ de latura a, se ridică perpendicularele: $BM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ cm și $DN = \frac{2\sqrt{6}}{6}$ cm, pe planul pătratului și de aceeași parte a lui.

Se cere:

a) Mărimea segmentului MN;

b) Să se demonstreze că triunghiul MON este dreptunghic, O fiind intersecția diagonalelor pătratului;

c) Aria laterală și volumul piramidei $MABC$ (vîrful fiind M).

● Să se rezolve ecuația:

$$\log_x 10 + 2 \log_{10x} 10 - 6 \log_{100x} 10 = 0.$$

● Fie expresiile:

$E_1 = \sin x - 2 \sin 2x + \sin 3x$ și

$E_2 = \cos x - 2 \cos 2x + + \cos 3x.$

a) Să se calculeze valorile lui E_1 și E_2 dacă $\text{tg} x = \sqrt{3}.$

b) Să se transforme E_1 și E_2 în expresiile ce conțin numai produse.

● Fie funcția $f(x) = mx^2 - 2(m + 1)\,x+2m+1$, unde m este un parametru real.

Să se determine m astfel încît:

a) $f(x) \leqslant 0$, pentru orice x real;

b) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 1.$

● Fie funcția $f: R \to R$ de forma $f(x) = x^2 - 1$. Se cere:

a) Să se determine codomeniul funcției;

b) Să se reprezinte grafic funcția;

c) Să se arate că funcția admite restricții bijective; să se precizeze o astfel de restricție și în acest caz să se determine inversa.

● Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2(x - 1) \geqslant 4(x + 1) \\ x^2 + 4x > 0 \end{cases}$$

● Printr-un punct I, interior cercului de centru O, se duc două coarde perpendiculare AB și CD. Tangentele la cerc, duse în punctele A, B, C, D, determină un patrulater M, N, P, Q.

a) Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

b) Notînd cu R şi S mijloacele coardelor AB şi CD, să se arate că mijlocul segmentului RS se află pe OI.

● Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată diagonalele bazelor sînt $6\sqrt{2}$ cm şi $14\sqrt{2}$ cm, iar muchia laterală de 9 cm. Să se calculeze volumul lui.

● Dacă mulţimea A are 10 elemente, mulţimea B 18 elemente iar $A - B$ are 4 elemente, să se determine cîte elemente sînt în:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

● Fie funcţia $f: R \to R$, de forma

$$\begin{cases} x - 2, \text{ dacă } x \in (-\infty, 3) \\ 2x - 5, \text{ dacă } x \in [3, \infty) \end{cases}$$

Se cere:

a) Să se reprezinte grafic funcţia f;

b) Să se arate că funcţia este inversibilă;

c) Să se determine inversa funcţiei f.

● Să se calculeze laturile unui paralelogram, ştiind că diagonala lui de lungime $l = 10$ cm, formează cu laturile unghiurile

$$\alpha = 45° \text{ şi } \beta = 30°.$$

● Se dă o piramidă patrulateră regulată de înălţime $h = 12$ cm şi latura bazei $a = 18$ cm. La distanţa $d = 3$ cm de vîrf se face o secţiune printr-un plan paralel cu baza. Se cere:

a) aria laterală şi volumul piramidei;

b) aria laterală şi volumul trunchiului de piramidă, obţinut prin secţionare (prin înlăturarea părţii de la vîrf).

● Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + xy = 2 \\ y - 3x = 7 \end{cases}$$

• Să se rezolve ecuaţia : $C_x^3 + A_x^4 = 4x$

• Într-un punct P al ipotenuzei BC a unui triunghi dreptunghic ABC, se ridică perpendiculara pe ipotenuza care intersectează catetele AB şi AC în M şi N. Să se arate că $PM \cdot PN = BP \cdot CP$.

• Muchia laterală a unui trunchi de piramidă patrulateră regulată este egală cu 3 dm, iar laturile bazelor sînt 5 dm şi 1 dm.
Se cere:

a) volumul trunchiului;

b) aria laterală a trunchiului.

• Se dă funcţia :

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0) \\ 2, \text{ dacă } x \in [0,2) \\ -x+3, \text{ dacă } x \in [2, \infty) \end{cases}$$

a) să se calculeze $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$ şi $f(4)$;
b) să se traseze graficul funcţiei $f(x)$;

c) întocmiţi un tablou cu semnul valorilor funcţiei $f(x)$, cînd x parcurge mulţimea numerelor reale.

• Să se efectueze produsul următoarelor numere complexe, scriindu-le sub formă trigonometrică.

$$Z_1 = \sqrt{3} + i, Z_2 = 2 - 2i, Z_3 = 1 - i\sqrt{3}.$$

• Pe laturile unui triunghi oarecare ABC construim în afară triunghiurile echilaterale ACD, BCE, ABF. Să se arate că segmentele AE, BD, CF sînt egale.

• Pentru a determina căldura specifică a unui metal se confecţionează din acel metal bare care au forma unui paralelipiped drept cu baza patrată, înălţimea de 5 cm şi aria totală de 78 cm ². Să se afle latura bazei.

• Fie funcţia $f: R \to R$ de forma :

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4, \text{ dacă } x \in (-\infty, -1] \\ -7, \text{ dacă } x \in (-1,2) \\ -3x - 1, \text{ dacă } x \in [2, +\infty). \end{cases}$$

a) Să se calculeze $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.

b) Să se reprezinte grafic funcţia.

• În trapezul dreptunghic $ABCD$, baza mare $AB = 10$ cm, latura oblică $BC = 8$ cm, iar diagonala $AC = 6$ cm. Se cere:

a) să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic;

b) perimetrul trapezului;

c) volumul corpului generat prin rotirea trapezului în jurul bazei.

• Se dă ecuaţia:

$$x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 5 = 0.$$

Să se determine m, astfel încît:

a) o rădăcină a ecuaţiei să fie egală cu -1;

b) rădăcinile ecuaţiei să fie egale.

• Să se determine x real astfel încît expresia:

$$\log_5 \frac{x^2 - 4x}{-x^2 + 3x - 2}, \text{ să fie definită.}$$

• Să se rezolve ecuaţia:

$$\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$$

• Să se demonstreze că bisectoarele interioare ale unghiurilor unui patrulater convex se intersectează formînd un patrulater inscriptibil.

• Înălţimea unui con este egală cu 15 m, iar volumul este egal cu 320 m ^{3}. Să se afle aria laterală a conului.

• Să se calculeze valoarea funcţiei:

$$f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 2x + 3,$$

$$\text{pentru } x = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

• Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{\sin 4a - \sin 2a}{\sin 4a + \sin 2a} = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} 3a$$

● Două cercuri se intersectează în M și N. Fie M' și M'' punctele diametral opuse lui M în cele două cerc uri. Să se arate că punctele M', N, M'' sînt coliniare.

● Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari de 3 m, latura bazei mici de 1 m și muchia laterală de 3 m. Să se calculeze aria laterală și volumul trunchiului.

● Fie $f: R \to R$ prin relația:

$$f(x) = (m-2)\,x^2 - 2mx + 2m - 3,\ m \in R.$$

a) Să se determine m astfel încît $f(-2) = 0$;

b) Să se determine m astfel încît $x_1 x_2 = 6$;

c) Să se reprezinte grafic funcția $f(x)$ pentru $m = 1$.

● Să se rezolve ecuația:

a) $2\ \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

b) Să se arate că $x = \dfrac{\pi}{2}$ este rădăcină a ecuației

$$2\sin^5 x = 3\sin^3 x - \sin x.$$

● Se prelungesc laturile AB și AD ale unui paralelogram $ABCD$ cu segmentele $BM = AD$ și $DN = AB$. Să se arate că triunghiurile ACN și BMC sînt isoscele și că punctele M, N, C sînt coliniare.

● Un triunghi dreptunghic are catetele $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm. Să se afle volumele corpurilor ce iau naștere prin rotirea triunghiului în jurul fiecărei laturi.

Să se arate că: $\dfrac{1}{V_a^2} = \dfrac{1}{V_b^2} + \dfrac{1}{V_c^2}$, V_a, V_b, V_c, fiind volumele obținute prin rotirea triunghiului în jurul laturilor a, respectiv b și c.

● Fie funcția $f: R \to R$ de forma:

$f(x) = (m-2)\,x^2 + 2(2m-3)\,x + 5\,m - 6.$

Să se determine m astfel încît:

a) rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ să fie inverse.

b) $f(x) > 0$, pentru orice x real.

● Să se rezolve ecuaţiile:

a) $2x + \sqrt{x-1} = 8$

b) $4^x + 2^x + 1 = 80$

● Să se demonstreze că triunghiul în care avem relaţia:

$$\sin C = \cos A + \cos B,$$

este dreptunghic.

● În trapezul dreptunghic $ABCD$ ($A = B = 90°$), baza mică $AD = 4$ cm, baza mare $BC = 9$ cm şi $DC = 13$ cm.

Fie E mijlocul laturii AB.

a) Să se demonstreze că triunghiul DCE este dreptunghic.

b) Aria şi volumul corpului obţinut prin rotirea trapezului în jurul bazei mici.

● Se dă sistemul:

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ x^2 - 2y - 5x + 6 = 0 \end{cases}$$

a) Să se rezolve sistemul.

b) Ce reprezintă grafic soluţiile lui?

● Se consideră patrulaterul oarecare $ABCD$. Fie M, N, P. Q mijloacele laturilor AB, BC, CD şi DA.

a) Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este un paralelogram.

b) Să se arate că $2MP = BC + AD$.

c) Să se calculeze unghiul A al patrulaterului în cazul în care

$$BD = x^2 + x + 1,\ AB = 2x+1,\ AD = x^2 - 1 \text{ şi } x > 1.$$

● Se dă ecuaţia:

$$2 \sin x + \cos^2 x + 4 \sin x + \cos^2 x = 2(\sqrt[4]{2} + 2\sqrt{2})$$

a) Să se arate că $x = \frac{\pi}{6}$ este o soluţie a ecuaţiei;

b) Să se rezolve ecuaţia.

● Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x^2 + 6\,xy - 9\,y^2 = x + 24 \end{cases}$$

● Pentru ce valori ale lui a avem :

$$\log_a 5 < \log_a 3.$$

● Să se rate că :

$$\frac{\sin a + \mathrm{tg} a}{\cos a + \mathrm{ctg}\, a} \cdot \frac{1 + \sin a}{1 + \cos a} = \mathrm{tg}^2 a$$

● Un con circular drept are raza bazei egală cu $m^2 - 4$ și generatoarea egală cu $m^2 + 4$. Să se calculeze volumul acestui con.

● Laturile unui triunghi oarecare sînt ; $a = 2$, $b = \sqrt{2}$ și $c = 1 + \sqrt{3}$. Să se calculeze unghiurile triunghiului.

● Trunchiul de con cu razele de 3 m și 5 m și un con de aceiași înălțime au volume egale. Să se afle raza bazei conului.

● Să se demonstreze trigonometric că triunghiul ABC în care :

$$2a = b + c \text{ și } 2A = B + C \text{ este echilateral.}$$

● Se dă o piramidă cu baza un dreptunghi $ABCD$, avînd $AB = 2a$ și $BC = a$, înălțimea piramidei fiind $SD = 2a$. Pe muchia SB se ia un punct P. Se cere :

a) Să se calculeze aria laterală a piramidei $SABCD$;

b) Să se arate că dacă P este mijlocul lui SB, triunghiul APC este isoscel, și să se determine aria acestuia.

c) Să se determine poziția lui P pe SB, astfel încît triunghiul APC să fie dreptunghic.

● Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0 \\ y - x = 1 \end{cases}$$

• Un magazin pentru valorificarea legumelor are acoperişul în formă de piramidă regulată cu muchia bazei de 6 m şi înălţimea de 4 m.

a) Să se afle aria acoperişului magazinului.

b) Să se afle masa cantităţii de tablă cu care este acoperit magazinul ştiind că tabla are grosimea de 3 mm şi $d = 7{,}8$ g/cm ^{3}.

• Se dau mulţimile :

$$A = \{0,1,5\};\ B = \{1, 5, 7\} \text{ şi } C = \{0,1,2,3,5,7\}.$$

Să se calculeze : $A \cup B$; $(A \cup B) \cup C$; $(A \cup B) \cup (B \cup C)$.

• Se dă funcţia reală $f(x) = -x^2 + 4$.

a) Să se arate că $f(x)$ este funcţie bijectivă ;

b) Să se facă graficul funcţiei date.

• Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ şi $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ şi N = mulţimea numerelor naturale. Folosind simbolurile reuniunii, intersecţiei, diferenţei şi complementarei exprimaţi mulţimile de mai jos cu ajutorul lui A, B şi N :

$M_1 = \{5, 6, 7\}$; $M_2 = \{1, 2, 3, 4\}$;

$M_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $M_4 = \{8, 9, 10\}$;

$M_5 = \{8, 9, 10, 11, \ldots\}$; $M_6 = \{1, 2, 3, 4, 11, 12\}$.

• Fie funcţia $f : R \to R$, definită astfel :

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4, \text{ dacă } x \in (-\infty, -1) \\ 7, \text{ dacă } x \in [-1, 3] \\ x + 1, \text{ dacă } x \in (3, \infty) \end{cases}$$

Să se determine $f(-2)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.

• Stabiliţi monotonia şi semnul funcţiilor de mai jos, apoi faceţi graficul lor pe acelaşi sistem de axe de coordonate :

$$f_1 : R \to R, \text{ de forma } f_1(x) = \begin{cases} -x + 3, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0] \\ 3, \text{ dacă } x \in (0,2) \\ 2x + 3, \text{ dacă } x \in [2, \infty) \end{cases}$$

$f_2 : R \to R$, de forma $f_2(x) = x^2 - 4x + 3$.

● Să se rezolve:

$$a)\ \frac{x^2+3x+2}{x^2-4x+3}<0, \qquad b)\ \frac{x^2+10x-3}{x^2+2x-1}=2,$$

$$c)\ \lg\left(2x-\frac{9}{4}\right)-\lg x=\lg(x-3), \quad d)\ A_x^5=12\,A_x^3.$$

● Examinaţi trigonometric şi reprezentaţi în planul complex (pe acelaşi sistem de axe de coordonate) următoarele numere complexe:

$$Z_1=1+i\sqrt{3} \text{ şi } Z_2=1-i\sqrt{3}.$$

● Lotul unei şcoli are forma unui trapez dreptunghic $ABCD$ care desenat pe o foaie de caiet la scara 1 : 10.000, are baza mare $AB = 6$ cm, latura oblică $BC = 3$ cm, iar diagonala $AC = 3{,}3$ cm.

a) Aflaţi lungimea gradului care înconjoară lotul, în metri;

b) Aflaţi aria lotului în m²;

c) Ştiind că diagonala AC separă cele două culturi de pe lot (porumb în ACB şi cartofi în ACD), aflaţi în m², aria suprafeţelor cultivate cu fiecare din aceste culturi.

● La un atelier şcolar se comandă confecţionarea din tablă, a unui vas de forma unui trunchi de con circular drept, cu următoarele caracteristici: generatoarea să fie egală cu suma bazelor, înălţimea să fie 12 cm şi aria laterală să fie de $169\,\pi$ cm².

a) aflaţi razele bazelor;

b) aflaţi capacitatea vasului ($\pi = 3{,}14$).

● Să se reprezinte grafic funcţia: $f: R \to R$, definită prin:

$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & \text{pentru } x\in(-\infty,-2) \\ x^2 & \text{pentru } x\in[-2,+2] \\ x+2 & \text{pentru } x\in(2,+\infty) \end{cases}$$

● Să se rezolve ecuaţiile:

$$a)\ 32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0{,}25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$$

$$b)\ \frac{\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}} = 2x-1$$

$$c)\ \sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

● Într-un triunghi oarecare ABC se notează cu B_1 şi C_1 proiecţiile vîrfurilor B şi C pe laturile opuse. Paralela prin C la BB_1 intersectează dreapta AB în C_2, iar paralela prin B la CC_1 intersectează dreapta AC în B_2.

Să se arate că patrulaterele BCB_1C_1 şi $BC\,B_2\,C_2$ sînt inscriptibile şi să se precizeze poziţiile centrelor cercurilor respective.

● Să se calculeze aria şi volumul corpului obţinut prin rotirea unui triunghi dreptunghic în jurul ipotenuzei, în funcţie de ipotenuza a şi suma catetelor h.

● Să se reprezinte grafic funcţia:

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

● Se dă ecuaţia: $x^2 - mx + m - 1 = 0$

Să se determine $m \in R$, astfel încît între rădăcini să existe relaţia:

$\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} > x_1, x_2$, unde x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei date.

● Să se rezolve ecuaţiile:

$a)$ $\sin^2 x - \cos^2 x - 6 \sin x + 5 = 0$

$b)$ $2\lg x = 1 + \lg\left(x + \dfrac{11}{10}\right)$

$c)$ $4^x + 2^x = 272$

● Un vas sub forma unui trunchi de con, trebuie să aibă o capacitate de 900 litri şi o adîncime de un metru. Ştiind că diametrul unei baze este de 1,20 m, se cere să se calculeze diametrul celeilalte baze.

● Se consideră mulţimile :

$$A = \{1, 2, 3, 4\},$$
$$B = \{x/x \in N, \ -1 < x < 4\}$$
$$C = \{x/x \in N, \ \frac{2x+5}{x-1} \in N\}$$

a) Să se determine mulţimile B şi C

b) Să se afle $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$; $A \times B$.

● Să se rezolve ecuaţia :

$$\log_2(4^x + 3 \cdot 2^x) - 1 = \log_2(2^{x+1} + 1)$$

● Se dă ecuaţia :

$$(m-2)\,x^2 - (3m+2)x + m + 1 = 0$$

a) Să se determine $m \in R$, astfel ca rădăcinile ecuaţiei să fie reale şi distincte.

b) Să se determine $m \in R$, cunoscînd că :

$$x_1^2 + x_2^2 = 7.$$

● Se dă expresia : $E(x) = \dfrac{\sin 2\,x - 2}{2} + \sin x + \cos x.$

a) să se afle valoarea numerică a expresiei pentru :

$$x = 45°\,;\ x = -\frac{3\,\pi}{2}\ \text{rad}\,;\ x = 200^g.$$ (π)

b) Să se rezolve ecuaţia $E(x) = 0$;

c) Să se arate că pentru $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $E(x) > 0$.

● Într-un trapez isoscel $ABCD$ un unghi ascuţit este de 45°. Latura oblică AD este egală cu baza mică CD.

a) Dacă $AD = a$, să se afle lungimea diagonalei BD;

b) Trapezul se roteşte în jurul laturii oblice AD.

Să se afle volumul corpului obţinut.

• Se dau mulţimile: $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ şi $B = \{1, 2, 3, 5\}$.

a) Să se calculeze: $A \cup B$, $A \cap B$ şi $A - B$.

b) Care din următoarele afirmaţii sînt adevărate şi care sînt false:

$A \cup B \subset A \cap B$; $A \cup B \supset A \cap B$; $A - B \supset A \cap B$; $A \cup B \supset$
$\supset A - B$.

• Să se rezolve ecuaţiile:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \text{ şi } 2x^2 + 13x - 7 = 0.$$

Să se construiască ecuaţia de gradul doi care are ca rădăcini, rădăcinile necomune ale ecuaţiilor date.

• Ştiind că $\sin x = \frac{3}{5}$, să se afle celelalte funcţii trigonometrice ale unghiului x din cadranul I.

• Diametrul exterior al unei sfere groase din fontă este de 18 cm, grosimea pereţilor este de 3 cm. Să se afle volumul peretelui sferei.

• Se consideră mulţimile:

$A = \{x / x \in N; x \text{ este divizor a lui } 3\}$

$B = \{x / x \in Z; x^2 - 6x + 8 = 0\}$

$C = \{x / x \in Z, x \in [-1,3)\}$

a) Să se calculeze mulţimile A, B şi C.

b) Să se afle: $A \cup B$, $A \cap B$, $C \setminus B$, $A \times B$, $C_E A$, unde $E = A \cup B$.

c) Cîte submulţimi de două elemente are mulţimea C.

• Să se rezolve ecuaţia: $\lg(10^{2x-1} + 7 \cdot 10^{x-1}) = \lg(10^{x+1} - 2) - 1$

• Se dă patrulaterul $ABCD$ în care $\sphericalangle BAD = 90°$, $\sphericalangle DBA =$
$= 30°$ şi $BC = CD = BD = 2a$. Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea patrulaterului în jurul laturii AB.

• Fie mulţimile:

$A = \{x \in N / x^2 - 3x + 2 = 0\}$

$B = \{x \in Z / -2 < x \leqslant 2\}$

a) Să se determine mulţimile A şi B;

b) Să se afle: $A \cup B$; $A \cap B$; $B \setminus A$, $A \times B$.

● Se dă expresia:

$E(x) = 3 \cos^2 x - \sin^2 x + 3 \cos x$.

a) Să se rezolve ecuaţia valoarea expresiei $E(x)$ pentru:
$x = 30°$ şi $x = -\frac{\pi}{3}$ rad.

b) Să se rezolve ecuaţia $E(x) = 0$.

● Într-un trapez isoscel $ABCD$, un unghi ascuţit este de $45°$.
Latura oblică AD este egală cu baza mică CD.

a) Dacă $AD = 10$ cm, să se afle lungimea diagonalei AB.

b) Trapezul se roteşte în jurul bazei mari AB. Să se afle volumul corpului obţinut.

● Ştiind că $\sin x = \frac{4}{5}$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ să se calculeze:

$\cos x$, $\operatorname{tg} x$ şi $\operatorname{ctg} x$.

● Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu bazele $BC = 15$ cm, $AD = 10$ cm şi latura oblică $CD = 13$ cm.

Trapezul se roteşte în jurul unei drepte paralelă cu AB la distanţa de 3 cm de ea (dreapta este exterioară trapezului)

Se cere:

a) să se afle aria totală a corpului obţinut;

b) să se afle volumul corpului generat.

● Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x - y - 3xy = -47 \\ xy = 14 \end{cases}$$

● Să se rezolve ecuaţiile:

a) $1 - \cos 2x = \sin x$

b) $27^{2x-1} - 2 \cdot 3^{3x-\frac{3}{2}} = 3$

c) $\lg(2x^2 - 2x - 2) = \lg 150 - \lg 15.$

● Să se calculeze:

$$(\cos 60° + i \sin 60°)^5 \text{ şi } \left[3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^6.$$

● Un trunchi de con cu razele bazelor de 3 cm şi 5 cm este echivalent cu un con care are aceiaşi înălţime ca şi trunchiul de con. Să se determine raza bazei conului.

● Un triunghi ABC de arie S, se roteşte în jurul laturii $BC = a$. Să se determine volumul corpului obţinut.

● Să se rezolve ecuaţiile:

a) $2\sqrt{x} - 1 = 3x - 4$

b) $\log\left(2x - \frac{9}{4}\right) - \log x = \log(x - 3)$

c) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2.$

● Să se simplifice fracţia: $\dfrac{x - 1}{2\sqrt{x} - 2}$

● Să se rezolve ecuaţiile:

$$\sqrt{x - 3} \cdot \sqrt{2x + 2} = x + 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$$

$$\frac{1}{12}(\log x)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\log x.$$

● Să se simplifice fracţia: $\dfrac{a + \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}}$

● Să se afle valoarea fracţiei fără a folosi tabele:

$$\frac{\sin 75° + \sin 15°}{\sin 75° - \sin 15°}$$

• Înălţimea unui trunchi de con este egală cu 3 cm.

Baza unei baze este de două ori mai mare decît raza celeilalte baze, iar generatoarea este înclinată faţă de planul bazei cu unghiul de 45°. Să se afle volumul.

• Să se efectueze : $\frac{5 + 3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2} - 1}{6}$

• Să se rezolve ecuaţiile : $\frac{3\sqrt{x} - 5}{2} - \frac{2\sqrt{x} - 7}{3} = \sqrt{x} - 1$;

$3^{x+1} + 3^{x} = 108$; $\log x = \log (6 - x)$; $\sqrt{2}\ \sin^2 x +$
$+ \cos x = 0$.

• Înălţimea unui con circular drept este egală cu 3 m iar generatoarea de 5 m. Să se afle volumul şi aria totală a conului.

• Se consideră funcţia $f : R \to R$ dată prin legea

$$f(x) = ax + b,\ a,\ b, \in R.$$

Se cere :

1) Să se determine a şi b astfel ca : $f(1) = 2$ şi $f(-1) = 6$.

2) Să se reprezinte grafic funcţia $f : R \to R$ dată prin legea $f(x) =$ $= -2x+4$. Care sînt valorile lui x pentru care $f(x)$ aparţine intervalului (4,6)?

• Să se rezolve ecuaţia : $\sin 2x = \cos 2x$. Să se precizeze numărul soluţiilor ecuaţiei care aparţin intervalului $(\pi, 2\pi)$.

• Se dă $\operatorname{ctg} a = -\sqrt{3}$; $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Se cere :

$$\cos a,\ \sin 2a,\ \cos \frac{a}{2}.$$

• Se consideră o piramidă triunghiulară regulată cu toate muchiile egale cu 1 m. Aflaţi volumul şi aria totală.

• Un con este secţionat cu un plan paralel cu planul bazei şi care trece prin mijlocul înălţimii. Aflaţi raportul volumelor celor două conuri.

• Avem o piramidă cu vîrful V şi cu baza un triunghi ABC. Afirmaţia că piramida $VABC$ este regulată în care din situaţiile următoare este adevărată? Justificaţi răspunsul.

a) triunghiul ABC este echilateral şi vîrful V se proiectează în punctul B;

b) triunghiul ABC este echilateral şi vîrful V se proiectează în punctul de intersecţie al bisectoarelor triunghiului ABC.

c) Vîrful V se proiectează în centrul cercului circumscris triunghiului ABC iar feţele laterale ale piramidei sînt triunghiuri egale.

● O dreaptă d formează cu o dreaptă d' conţinută în planul P un unghi de 45°. În ce condiţii putem afirma că unghiul dreptei d cu planul P este de 45°?

● a) De cîte ori se măreşte volumul unui cub dacă latura sa se dublează?

b) De cîte ori se măreşte volumul unui paralelipiped dreptunghic dacă două din dimensiunile sale se triplează. Justificaţi răspunsurile.

● Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $\frac{1-3x}{2}=0$; b) $\frac{2}{5x+1}=0$; c) $\frac{2}{x-1}=3$.

● Simplificaţi fracţiile: $\frac{a^3+a}{a^4-1}$; $\frac{0{,}5^3+0{,}5}{0{,}5^4-1}$.

● Rezolvaţi sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{y}{4} \\ 3x=z \\ x+y+z=12 \end{cases}$$

● Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} -x^2+4x-3<0 \\ x+2>0 \end{cases}$$

● Să se rezolve ecuaţia: $5x+\sqrt{5x+10}=8$

● Ştiind că $\cos a=\frac{7}{25}$ şi că $a\in\left(\pi,\frac{3}{2}\right)$, să se calculeze $\cos 2a$.

● Aria laterală a unui cilindru este 678,24 m², iar generatoarea $\frac{3}{4}$ din rază. Să se afle volumul.

● Fie ecuaţia : $x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 16 = 0$, unde $m \in R$. Să se determine valorile lui m pentru care ecuaţia admite :

a) două rădăcini reale, distincte şi pozitive ;

b) o rădăcină x_1 să fie egală cu 0 ;

c) două rădăcini reale, de semne contrare, egale în valoare absolută.

● Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + \frac{13}{4} \\ \log_2 x + \log_2 y = 0 \end{cases}$$

● Să se scrie sub formă trigonometrică numărul compex : $z = -1 + i\sqrt{3}$.

● Într-o piramidă patrulateră regulată $VABCD$, cu latura bazei a, se duce prin mijlocul muchiei VA un plan paralel cu planul triunghiului VBD.

Ştiind că muchiile piramidei sînt egale cu diagonala bazei, să se calculeze aria secţiunii determinate în piramidă, în funcţie de latura bazei.

● Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

● Să se reprezinte grafic funcţia :

$$y = |x^2 + x - 4|.$$

● Să se demonstreze că triunghiul ABC, în care :

$2a = b + c$ şi $2A = B + C$, este echilateral.

● Într-o piramidă patrulateră regulată dreaptă se înscrie un cub, astfel încît vîrfurile acestuia se află pe diagonalele bazei

piramidei şi pe muchiile laterale. Cunoscînd că la piramidă latura bazei este egală cu a, iar înălţimea este egală cu h să se afle latura cubului înscris.

● Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

● Să se reprezinte grafic funcţia:

$$y = x^2 + \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2}$$

● Fie triunghiul ABC, isoscel ($AB = AC$) şi $\hat{A} = 120°$. Pe laturile AB şi AC se consideră punctele M şi respectiv N, astfel ca $BM = AN = x$.

a) să se determine lungimea segmentului MN în funcţie de x şi a, şi să se găsească valoarea lui x, astfel ca MN să fie minim;

b) să se arate că al patrulea vîrf P, al paralelogramului $AMPN$, cu o diagonală AP, se află pe BC;

c) să se arate că suma distanţelor de la M şi N la BC este constantă cînd x variază.

● Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin 2x + \sin x + \cos x + 1 = 0$$

Să se raţionalizeze numitorul următoarei fracţii:

$$\frac{60\sqrt{2} + 12\sqrt{3}}{5\sqrt{6} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$$

● Se consideră o piramidă patrulateră regulată dreaptă $VABCD$, avînd latura bazei a şi muchia laterală $2a$. Pe muchia VB se consideră punctul M situat la mijlocul ei. Se cere să se determine:

a) aria totală şi volumul piramidei $VABCD$;

b) aria triunghiului AMC;

c) volumul piramidei $MABCD$.

● Să se rezolve inecuația:

$$0 \leqslant x^2 - 4x + 4 \leqslant 1$$

2. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\log_{2\sqrt{2}} x = 3$

b) $\lg \sqrt{2x+5} + \frac{1}{2} \lg (x-6) = 1$

● Fiind dată ecuația $z^3 - 27 = 0$, se cere:

a) să se rezolve ecuația în mulțimea numerelor complexe;

b) rădăcinile ecuației fiind notate cu z_1, z_2, z_3, să se scrie sub formă trigonometrică;

c) să se arate că $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 81$

● Fiind dată expresia

$E(x) = \sin 3x - \sin x$, se cere:

a) să să scrie $E(x)$ sub formă de produs;

b) să se rezolve ecuația $E(x) = \sin 2x$ și să se specifice soluțiile cuprinse în intervalul $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

● Se dă un cerc de rază R, căruia i se circumscrie un triunghi isoscel ABC (baza AB). Dacă O este centrul cercului, T piciorul perpendicularei dusă din O pe BC, iar M piciorul înălțimii triunghiului, dusă din C, se cere să se arate că:

a) $\Delta CMB \sim \Delta COT$;

b) $MOBT$ este un patrulater inscriptibil;

c) dacă notăm $MB = x$, să se afle volumul și aria conului generat prin rotirea triunghiului ABC în jurul înălțimii CM (în funcție de R și x);

d) să se afle lungimea cercului de contact dintre con și sfera obținută prin rotirea cercului O de rază R, înscris triunghiului dat (tot în funcție de R și x).

● Se dă ecuația:

$x^2 + (2-m)x - m - 3 = 0$, cerîndu-se:

a) să se arate că oricare ar fi $m \in R$ ecuația dată are rădăcini numai în mulțimea numerelor reale;

b) considerînd funcţia :

$$f(x) = x^2 + (2 - m)x - m - 3,$$

să se reprezinte grafic funcţia dată, pentru $m = 3$.

● Se dă expresia :

$$E = \text{tg}\, x + x \,\text{ctg}\, x \text{ şi se cere :}$$

a) să se arate că $E = \dfrac{2}{\sin 2x}$;

b) să se rezolve ecuaţia : $\dfrac{1}{E} = -\dfrac{1}{4}$.

● Unui cerc *O* de rază *R*, i se circumscrie un trapez isoscel cu baza mare de $2m$ şi baza mică $2n$. Se cere :

a) să se exprime, în funcţie de *m*, *n* şi *R*, aria trapezului ;

b) să se arate că raza cercului înscris trapezului dat este medie proporţională între semibaze.

● Într-un con circular drept generatoarea face cu planul bazei un unghi α, iar raza bazei conului este *R*. În funcţie de *R* şi α se cere să se afle :

a) aria conului dat ;

b) volumul corpului obţinut prin secţionarea conului cu un plan paralel cu baza dus la jumătatea înălţimii şi înlăturarea părţii dinspre vîrf.

● Să se rezolve ecuaţia :

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

● Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4} \\ x + y = 18 \end{cases}$$

● Să se rezolve ecuaţia :

$$4^x + 2^{x+1} \cdot 3^x - 9^x \cdot 3 = 0$$

● Se dă o piramidă cu baza un dreptunghi avînd $AB = 2a$ şi $BC = a$, înălţimea piramidei fiind $SD = 2a$. Pe muchia SB se ia un punct P şi se cere :

a) să se calculeze aria laterală a piramidei $SABCD$;

b) să se arate că dacă P este mijlocul lui SB, triunghiul APC este isoscel şi să se determine aria acestuia ;

c) să se determine poziţia lui P pe SB, astfel încît triunghiul APC să fie dreptunghic.

● Să se rezolve ecuaţia :

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

● Baza unei prisme drepte este un romb care are latura 10 cm şi înălţimea 9,6 cm, înălţimea prismei este 12 cm. Să se găsească diagonalele prismei.

● Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$$

● Să se rezolve ecuaţia exponenţială :

$$4^x + 2^x = 2.$$

● Se consideră ecuaţia :

$$x^2 - mx + m + 3 = 0$$

a) Să se determine mulţimea valorilor lui $m \in R$, astfel că rădăcinile ecuaţiei date să fie reale.

b) Să se calculeze valoarea lui $m \in N$, cunoscînd că

$$x_1^2 + x_2^2 = 29$$

c) În cazul $m = 7$, fără a rezolva ecuaţia, să se determine valoarea expresiei :

$$E = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_1 x_2}$$

• În triunghiul ABC se dă:

$$A = 90°; \quad \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{7}{36} \text{ şi aria } S = 54 \text{ dm}^2. \text{ Se cere:}$$

a) Lungimea laturilor triunghiului.
Dacă $AB = 9$ dm şi $AC = 12$ dm, să se arate că:
b) $3 \sin B = 4 \sin C$;
c) Să se calculeze raza cercului înscris.

• Într-un con, a cărui generatoare face cu planul bazei un unghi α, dat de ecuaţia:

$$\frac{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = 3 - \text{tg } \alpha, \ \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

se înscrie o sferă de rază r.

a) Să se determine α;

b) Considerînd $\alpha = 60°$, să se exprime în funcţie de r volumul conului;

c) Să se arate că aria sferei reprezintă $\frac{2}{3}$ din aria laterală a conului.

d) Să se determine la ce distanţă de baza conului trebuie să se ducă un plan paralel bazei conului, astfel ca diferenţa ariilor secţiunilor în con şi sferă să fie egală cu $\frac{4}{9}$ din aria bazei conului. Discuţie.

• Să se formeze ecuaţia de gradul II ale cărei rădăcini x_1 şi x_2 satisfac relaţiile:

$$x_1 + x_2 + x_1 x_2 + 1 = 0$$

şi

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 2m; \quad m \in R$$

• Considerînd ecuaţia $x^2 + mx + m - 1 = 0$, să se determine m astfel ca $x_1^2 + x_2^2 = 17$ şi în cazul $m = -3$, să se calculeze rădăcinile x_1 şi x_2 şi să se verifice relaţia precedentă.

• Să se demonstreze că:

$$\sin^3 x(1 + \text{cotg } x) + \cos^2 x(1 + \text{tg } x) = \sin x + \cos x.$$

● Să se rezolve ecuaţia :

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

● Bazele unui trunchi de piramidă sînt dreptunghiuri, iar muchiile laterale sînt egale între ele. Laturile bazei mari sînt 15 cm şi 27 cm, iar perimetrul bazei mici 56 cm.
Ştiind că înălţimea trunchiului este medie geometrică între numerele 4 şi 9, să se afle :

a) dimensiunile laturilor bazei mici ;
b) înălţimea trunchiului.

Dacă înălţimea este de 6 cm, laturile bazei mici de 10 şi respectiv 18 cm, să se calculeze :

c) apotema uneia din feţele laterale ;
d) volumul trunchiului.

● Să se simplifice fracţia :

$$F(x) = \frac{8x^2 + 2x - 3}{4x^2 - x - 3}$$

● Fie ecuaţia $x^2 - mx + m - 1 = 0$. Să se determine m, astfel ca ecuaţia dată să admită rădăcini reale egale.

● Să se restrîngă expresia :

$$E = \frac{\sin(45° + \alpha) - \cos(45° + \alpha)}{\sin(45° + \alpha) + \cos(45° + \alpha)}$$

● Un cort are forma unui cilindru terminat cu un con. Dimetrul bazei este 24 m, înălţimea părţii cilindrice este de 2 m, iar a părţii conice de 5 m. Să se afle :

a) generatoarea conului ;
b) aria laterală a cilindrului şi a conului ;
c) cîtă pînză s-a folosit pentru confecţionarea cortului ?

● Se dă funcţia $f : R \to R$ dată de relaţia :

$$f(x) = (m - 2)x^2 - 2mx + 2m - 3 ; \ m \in R.$$

a) Să se determine m astfel încît între rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ să existe relația:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$$

b) Să se determine m, astfel încît minimul funcției

$f(x)$ să fie egal cu -3.

c) Pentru ce valori ale parametrului m inecuația

$f(x) > 0$ nu admite soluții.

d) pentru $m = 1$ să se reprezinte grafic funcția:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x+1} & \text{pentru } x < -1 \\ f(x) & \text{pentru } x \geqslant -1 \end{cases}$$

● Să se afle valoarea numerică a polinomului $P(x) = x^3 - 6x - 8$ pentru $x = \sqrt[3]{4 - 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{2}}$.

● Să se rezolve ecuația:

$$\sin^3 x\,(1+\operatorname{ctg} x) + \cos^2 x(1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x.$$

● În triunghiul ABC, AD este înălțimea iar AE mediană (punctul D este situat între punctele B și E). Să se determine laturile și unghiurile triunghiului ABC, cunoscînd: $AD = a\sqrt{3}$ cm și unghiul BAD = unghiul $EAC = 30°$.

● Se consideră într-un plan P un segment AB și un punct oarecare M situat pe circumferință de diametru AB. Fie S un punct pe semidreapta AZ perpendiculară în A pe planul P.

Să se determine punctul O, centrul sferei circumscrise tetraedrului $SABM$.

● Fie V_a, V_b V_c, volumele ce iau naștere prin rotirea completă a unui triunghi, respectiv în jurul laturilor a, b, c.

Să se demonstreze că dacă există relaţia $\frac{1}{V_a^2} = \frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2}$, atunci triunghiul este dreptunghic.

- Se dă funcţia $f: R \to R$ dată de:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Se cere:

a) să se reprezinte grafic funcţia $f(x)$;

b) să se determine mulţimea valorilor lui x pentru care $f(x) > 0$.

- Se dă $\sin x = \frac{3}{5}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; să se determine $\cos x$ şi $\mathrm{tg}\, x$

- Să se rezolve ecuaţia:

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

- O piramidă patrulateră regulată are muchia laterală de 15 cm şi înălţimea de 12 cm. Să se calculeze:

a) latura bazei;

b) aria secţiunii diagonale (determinată de planul ce trece prin diagonala bazei şi vîrful piramidei);

c) volumul piramidei.

- Să se rezolve ecuaţia:

$$3^{x^2-4x+3} = \frac{1}{3}.$$

2. Să se arate că:

$$\frac{\sin x + 2 \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + 2 \cos 2x + \cos 3x} = \mathrm{tg}\, 2x$$

- Să se rezolve ecuaţia:

$$\mathrm{tg}\, 2x = \sqrt{2} \cos 2x$$

- Se dă piramida triunghiulară $VABC$, astfel încît:

$$AV = BV = CV = a; \widehat{AVB} = 60°; \widehat{AVC} = 90°; \widehat{BVC} = 120°.$$

a) să se calculeze laturile triunghiului de bază;

b) să se arate că aria totală a piramidei este egală cu:

$$\frac{a^2}{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

c) să se calculeze volumul piramidei.

● Se consideră funcţia $f: R \to R$ dată de relaţia

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in R$$

a) Să se determine a şi b, astfel ca $f(-1) = 1$ şi $f(1) = 3$;

b) Să se reprezinte grafic $f(x) = x + 2$.

● Se dă: $\cos x = \frac{4}{5}$; să se calculeze $\sin x$ şi $\operatorname{tg} x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

● O piramidă patrulateră regulată are muchia laterală de 15 cm şi înălţimea de 12 cm. Să se calculeze:

a) latura bazei;

b) aria secţiunii diagonale (determinată de planul ce trece prin diagonala bazei şi vîrful piramidei);

c) volumul piramidei.

● Să se afle valoarea funcţiei:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2}} \quad \text{pentru} \quad x_0 = a\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2bc}}$$

$$a, b, c > 0$$

● Prin mijloacele muchiilor care pleacă din vîrful A al cubului $ABCDA'B'C'D'$ trece planul π. Să se calculeze distanţele de la punctele A, B, C', D' la planul π în funcţie de muchia cubului a.

● Prin vîrful A al unui paralelogram $ABCD$ $(AB > AD)$ se duce o dreaptă exterioară ce intersectează prelungirile laturilor BC şi CD în M şi N. Să se arate că:

$$CM \cdot CN = AB \cdot CM + BC \cdot CN.$$

44—c. 1782

● Fie funcţiile $f: R \to R$ pentru care $f(x) = \sin x$ şi $g: R \to R$ pentru care $g(x) = \cos ax$. Să se determine a $(0 \leqslant a \leqslant 2)$ astfel încît funcţiile f şi g să fie egale.

● Să se determine x, astfel încît să fie definită:

$$\log x^2 + x - 2(x + 1)\sqrt{x^2 - 4}$$

● Să se rezolve ecuaţia $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

● Să se afle termenul liber din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

● Să se demonstreze că oricare ar fi numărul natural $n \geqslant 1$ este adevărată egalitatea:

$$2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

● Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ y = x^2 + 3x + 3 \end{cases}$$

● O piramidă are vîrful S şi ca bază rombul $ABCD$. Ştiind că diagonalele bazei ($AC = 8$ cm şi $BD = 6$ cm) se întîlnesc în punctul O, iar înălţimea piramidei este $SO = 4$ cm, se cere:

a) să se arate că muchiile SA şi SC sînt perpendiculare între ele;

b) să se calculeze volumul şi aria piramidei.

● Să se rezolve ecuaţia:

$$6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$$

● Să se reprezinte grafic $f: R \to R$ prin $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

● Să se determine domeniul maxim al funcţiei:

$$f(x) = \sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}$$



● Fie funcţia $f: E \to F$ bijectivă. Să se demonstreze egalitatea:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad x \in F$$

$$f(f^{-1}(x)) = x, \qquad x \in E$$

● Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ x^2 - xy + 5y^2 = 35. \end{cases}$$

● Să se simplifice fracţia:

$$F(x) = \frac{\sin 8x + \sin 6x + \sin 4x + \sin 2x}{\cos 8x + \cos 6x + \cos 4x + \cos 2x}$$

şi să se rezolve ecuaţia,

$$F(x) + 1 = 0$$

precizînd rădăcinile cuprinse între 0 şi 1 (se vor exprima atît în grade sexagesimale cît şi în radiani).

● Să se afle al 4-lea termen al dezvoltării: $\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^6$

● Să se afle aria şi volumul corpului de rotaţie obţinut prin rotirea unui romb în jurul uneia din laturile sale, cunoscînd că unul din unghiurile rombului este de 60° iar diagonala mică este egală cu 23 cm.

Sesiunea iulie 1978, Bucureşti

Licee industriale — profil: mecanic, metalurgie, industrie uşoară, chimie, materiale de construcţii, prelucrarea lemnului, construcţii, industrie alimentară, poligrafie, alimentaţie publică.

1. Se dă funcţia $f: R \to R$, dată de $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

a) Să se reprezinte grafic funcţia:

$$y = f(x)$$

b) Să se determine valorile lui x pentru care funcţia este negativă.

c) Să se rezolve ecuaţia: $2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$

2. Un trunchi de con circular drept are : $R = 10$ cm, $r = 6$ cm şi $h = 3$ cm. Să se determine :

a) Aria laterală şi volumul trunchiului de con;

b) Volumul conului din care a provenit trunchiul.

3. Să se rezolve ecuaţia : $\sin^2 x + \cos x = 1$.

4. Se dă expresia :

$$E = \frac{\sin(\alpha - \beta) + 2 \sin \beta \cos \alpha}{2\cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha - \beta)}$$

a) Să se aducă expresia E la forma cea mai simplă.

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei E, pentru $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$

Licee industriale profil electrotehnic

1. Se dă expresia $E(x) = \log_2 (x^2 - 3x + 3)$

a) Să se determine mulţimea valorii lui x pentru care este definită;

b) Să se studieze semnul lui $E(x)$ pe tot domeniul de definiţie.

2. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

3. Să se rezolve ecuaţia :

$$\sin 2x - \cos 2x = \sin x + \cos x.$$

4. Cunoscînd $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, $\cos \beta = \frac{13}{4}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ să se arate că $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$.

5. Să se arate că dacă într-un ΔABC există relaţia $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{a}{b+c}$ atunci triunghiul este dreptunghic.

6. Într-o piramidă patrulateră regulată se cunosc latura bazei egală cu $2a$ cm şi muchia egală cu $3a$ cm. Se cere :

a) volumul şi aria laterală a piramidei;

b) volumul şi aria laterală a trunchiului de piramidă care se obţine secţionînd piramida cu un plan paralel cu baza, dus prin mijlocul înălţimii piramidei date.

Licee de matematică-fizică şi economice

1. Să se reprezinte grafic funcţia $f: R \to R$

$$f(x)=\begin{cases}-x+3 & \text{pentru } x<0\\ 3 & \text{pentru } 0\leqslant x<2\\ 2x-1 & \text{pentru } x\geqslant 2\end{cases}$$

Să se afle valorile lui x ştiind că $f(x)+f(-x)=6$.

2. Să se rezolve ecuaţiile.

a) $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=6^x+6^{x+1}$

b) $\log_4(12 \cdot 2^x+1)=-x\log_9 3$

3. Se consideră expresia $E(x)=\sin^2 2x-\sin x\sin 3x$.

a) Să se arate $0\leqslant E(x)\leqslant 1, \forall x\in \mathrm{R}$;

b) Să se rezolve ecuaţia $E(x)=\frac{1}{2}(4\cos x+\cos 2x)$

4. În ΔABC ($A=90°$) se dă $AB=6$ şi $AC=8$. Pe AB se consideră punctul M şi se duce $MN \parallel BC$ ($N\in AC$), iar BN şi CM se intersectează în P.

a) locul geometric al punctului P, dacă M parcurge AB;

b) Dacă $\widehat{BPC}=135°$ să se calculeze distanţa de la vîrful A la MN.

5. Se consideră conul cu raza R şi $VO=2R$. Să se calculeze raza cercului de intersecţie a conului cu sfera de diametru VO.

Capitolul 26

CHESTIUNI DE EXAMEN

26.1. ADMITERE FACULTĂȚI (EXERCIȚII REZOLVATE)

Geometrie

● Se consideră o piramidă $VABC$ cu baza ABC un triunghi echilateral de latură a. Știind că planul VBC este perpendicular pe planul bazei iar planele VAC și VAB formează cu planul bazei unghiuri de 60°, să se calculeze aria totală a piramidei.

Soluție.

Fie D mijlocul lui BC și $DE \perp AC$. Din simetria față de planul VAD, triunghiul VBC este isoscel, deci $VD \perp BC$, de unde VD perpendicular pe planul ABC, deci $VD \perp BC$. Atunci:

$AD \perp VD$ și cum $AC \perp DE$, rezultă $AC \perp VE$. Atunci: $\widehat{VED} = 60°$. Avem: $DE = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ și din triunghiul dreptunghic $\widehat{VDE}$ cu $DVE = 30°$, rezultă: $VE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $VD = \frac{3a}{4}$.

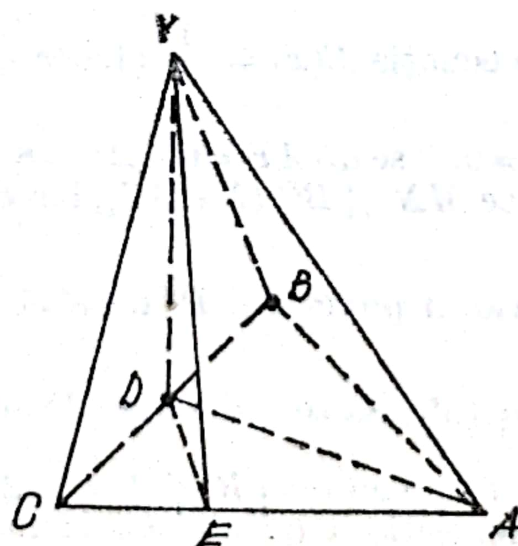


Fig. 26.1

Aria totală este aria ABC + 2 aria VAB + aria $VBC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} +$
$+ 2\frac{AB \cdot VE}{2} + \frac{BC \cdot VD}{2} = \frac{3a^2}{8}(2\sqrt{5}+1)$.

● Să se calculeze lungimea laturii tetraedrului regulat înscris într-o sferă de rază R.

Soluție.

Fie AI înălțimea din A și O centrul sferei. Dacă a este latura tetraedrului, atunci: $DI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ și din $\triangle ADI$, ODI, $AI =$
$= \sqrt{AD^2 - DI^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $OI = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}$. Scriind că $AO + OI =$
$= AI$, rezultă: $R + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, de unde: $a = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$.
(fig. 26.2)

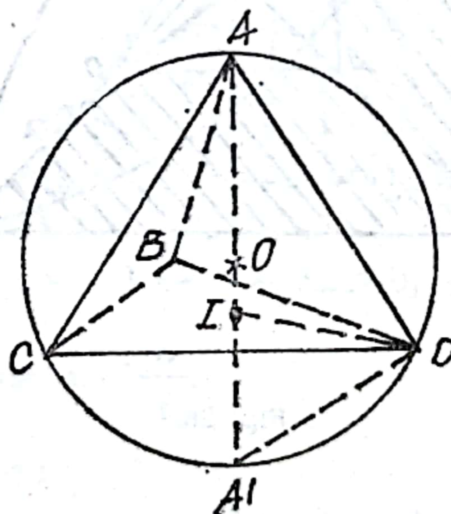


Fig. 26.2

● Se dă un trapez isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} =$
$= 45°$) pentru care laturile $BC = CD = DA = a$. Să se calculeze în funcție de a, volumul corpului obținut prin rotația trapezului $ABCD$ în jurul laturii neparalele AD.

Soluție.

Fie E intersecția lui AD cu BC. Se observă că unghiul $\widehat{AEB} = 90°$. Fie B' și C' simetricele lui B și C față de E. Volumul cerut este:

$V = V_{\text{con } BAB'} - V_{\text{con } CDC'}$. Cum $DE = EC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, rezultă:

$$V_{\text{con } BAB'} = \frac{\pi}{3}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 a^3,\ V_{\text{con } CDC'} = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12} \qquad \text{(fig. 26.3)}$$

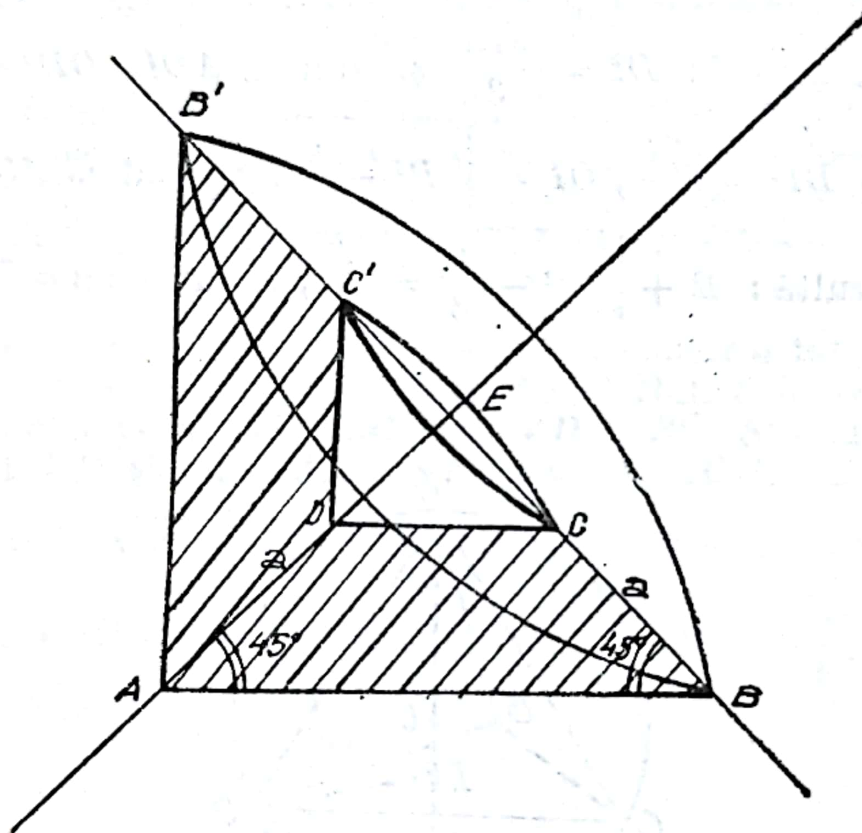


Fig. 26.3

Deci: $V = \dfrac{\pi}{3}\left[\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right] a^3 = \dfrac{\pi}{6} a^3 (5 + 3\sqrt{2})$.

● Să se calculeze volumul unei piramide exagonale regulate cunoscînd înălțimea ei h și unghiul 2α format de muchiile egale ale unei fețe laterale. Pentru ce valori ale unghiului este posibilă problema?

Soluție.

Fie AB o latură a exagonului, M mijlocul lui AB și SO înălțimea piramidei. Notăm $OB = AB = x$.

Din $\triangle$ SOB, rezultă : $SB^2 = x^2 + h^2$. Din Δ SMB $\Rightarrow \frac{x}{2} =$ $= SB \sin\alpha$.

Din ultimile două egalități rezultă :

$$\frac{x}{4} = (x^2 + h^2)\sin^2\alpha,\quad x^2(1 - 4\sin^2\alpha) = 4h^2\sin^2\alpha.$$

Deci :

$$x^2 = \frac{4h^2\sin^2\alpha}{1 - 4\sin^2\alpha} = \frac{4h^2\,\mathrm{tg}^2\alpha}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\alpha}. \qquad \text{(fig. 26.4)}$$

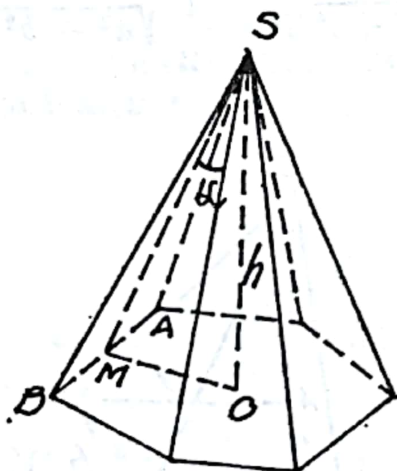


Fig. 26.4

Problema are sens dacă $1 - 4\sin^2\alpha > 0$, deci $\sin\alpha < \frac{1}{2}$ (căci $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) de unde $\alpha < \frac{\pi}{6}$.

Aria exagonului este :

$$S = 6 \cdot \frac{x \cdot OM}{2} = 3x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2} = \frac{6\sqrt{3}\,h^2\sin^2\alpha}{1 - 4\sin^2\alpha}$$

iar volumul piramidei este :

$$V = \frac{h}{3} \cdot S_{ex} = \frac{2\sqrt{3}\,h^3\sin^2\alpha}{1 - 4\sin^2\alpha}$$



● Se consideră piramida $SABCD$ cu baza un dreptunghi de dimensiuni $AB = a$, $BC = b$, avînd S situat pe perpendiculara dusă în A pe planul $ABCD$ la distanța h de acesta. Să se arate că centrul sferei circumscrise piramidei este la mijlocul muchiei SC şi să se calculeze raza acestei sfere.

Soluție.

Avem : $DC \perp SA$, $DC \perp DA$, deci DC este perpendicular pe planul SAD şi $\widehat{SDC} = \frac{\pi}{2}$. Similar $\widehat{SBC} = \frac{\pi}{2}$. Din punctele A, B, D, muchia SC este văzută sub unghi drept, deci sfera cu centrul în mijlocul lui SC şi diametru SC trece prin toate vîrfurile piramidei. Raza sferei este :

$$\frac{1}{2} SC = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + h^2} \qquad \text{(fig. 26.5)}$$

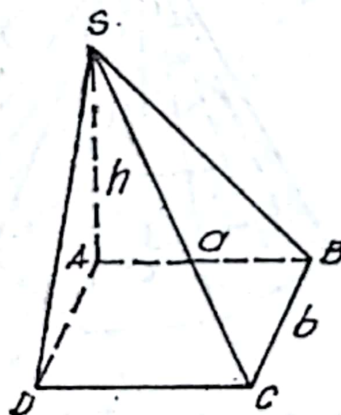


Fig. 26.5

● Un romb avînd latura a şi unul din unghiurile ascuțite de 60° se roteşte în jurul unei laturi. Să se calculeze volumul corpului rezultat din rotație.

Soluție.

Volumul corpului de rotație obținut este echivalent cu volumul unui cilindru avînd înălțimea egală cu a şi raza bazei $a\cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Volumul este egal cu : $\frac{3\pi}{4}a^3$. (fig. 26.6)

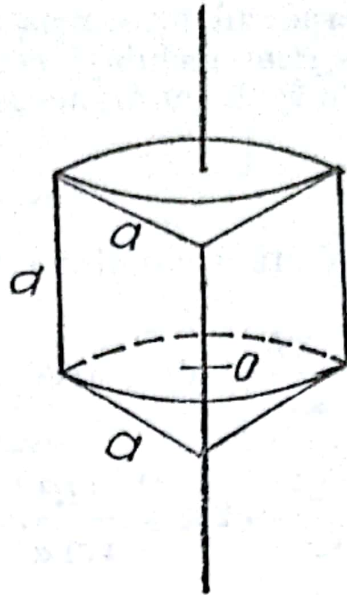


Fig. 26.6

● Să se calculeze aria unui trapez cunoscînd lungimile diagonalelor sale d_1 şi d_2 şi înălţimea h.

Soluţie.

Notăm $AC = d_1$, $BD = d_2$. $CE = DF = h$; în triunghiurile dreptunghice ACE şi AFB:

$$AE = \sqrt{d_1^2 - h^2}, \quad BF = \sqrt{d_2^2 - h^2}, \text{ deci :}$$

$DC = AB = AE + BF = \sqrt{d_1^2 - h^2} + \sqrt{d_2^2 - h^2}$ şi aria trapezului este :

$$S = \frac{h}{2}(\sqrt{d_1^2 - h^2} + \sqrt{d_2^2 - h^2}). \qquad \text{(fig. 26.7)}$$

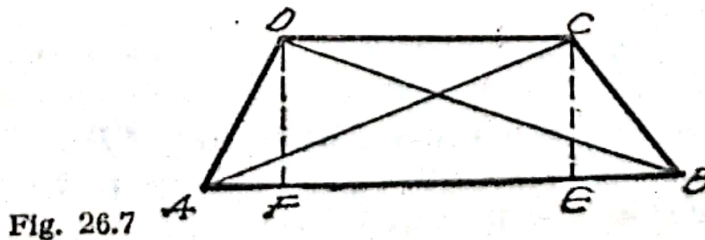


Fig. 26.7

● Să se calculeze raportul între aria unui romb și aria unui trapez isoscel, circumscrise aceluiași cerc, rombul și trapezul avînd unghiurile ascuțite egale cu un același unghi dat α.

Soluție.

Fie R raza cercului. Latura rombului este:

$R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2R}{\sin \alpha}$, deci aria rombului va fi:

$$\frac{2R}{\sin \alpha} \cdot 2R = \frac{4R^2}{\sin \alpha}.$$

Baza mare a trapezului este egală cu $2R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, iar baza mică $2 R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, deci aria trapezului va fi:

$$\frac{1}{2}\left(2R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 2R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right) \cdot 2R = \frac{4R^2}{\sin \alpha} \quad \text{(fig. 26.8)}$$

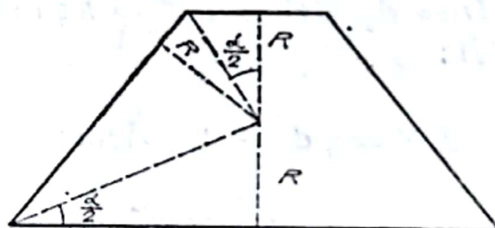


Fig. 26.8

Raportul cerut este egal cu 1.

● Într-un dreptunghi $ABCD$ ($AB > BC$) se duce diagonala AC. Fie E și F punctele de tangența cu diagonala AC ale cercurilor înscrise respectiv în triunghiurile ABC și ACD. Să se calculeze lungimea segmentului EF în funcție de laturile $AB = a$ și $BC = b$.

Soluție.

Se notează B' și D' punctele de tangență cu AB și AD ale cercurilor. Deoarece $EF = AE - AF$, iar $AE = AB' = a - r$, $AF = AD' = b - r$, rezultă $EF = a - b$. (fig. 26.9)

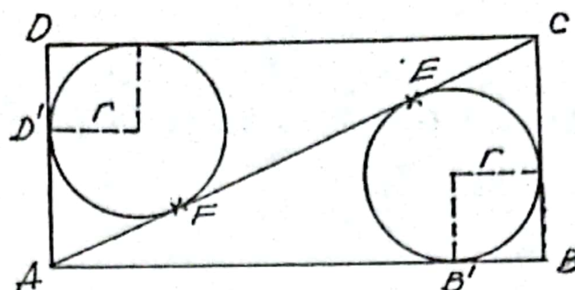


Fig. 26.9

● Se dau două cercuri O_1 şi O_2, tangente exterioare. Prin punctul lor comun de tangenţa T se duc două drepte arbitrare ATC şi DTB, care taie cercul O în A şi D şi cercul O_2 în C şi B. Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este un trapez.

Soluţie.

Fie $T'T''$ tangenta în T la cele două cercuri. Se observă că: $\widehat{TBC} = \widehat{T'TC} = \widehat{ATT''} = \widehat{ADT}$. Rezultă: $\widehat{DBC} = \widehat{BDA}$, deci $AD // BC$. (fig. 26.10)

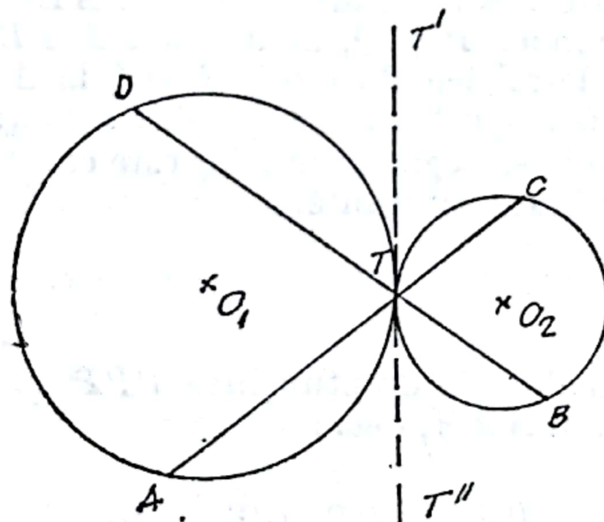


Fig. 26.10

● Se consideră două cercuri de centre O_1 şi O_2, tangente exterior în T. Fie MN una din tangentele comune exterioare (M şi N punctele de tangenţă) şi A şi B punctele în care O_1O_2 întîlneşte a doua oară cele două cercuri. Să se arate că patrulaterul $AMNB$ este inscriptibil.

Soluție:

Fie $\widehat{O_1AM} = \alpha$. Avem: $\widehat{O_2O_1M} = 2\alpha$ și $\widehat{BO_2N} = 2\alpha$.

Atunci $\widehat{O_2NB} = \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha$,

deci $\widehat{MNB} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi - \alpha$. (fig. 26.11)

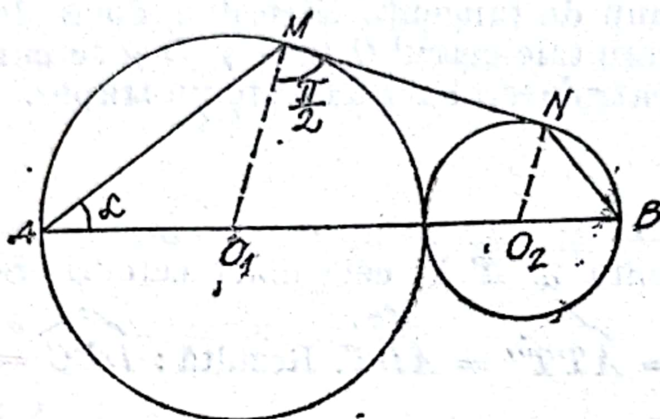


Fig. 26.11

● Pe latura BC a unui triunghi isoscel ABC ($AB = AC$) se consideră două puncte P și Q, astfel încît $P \in BM$, $Q \in MC$ (M mijlocul lui BC). Paralelele duse prin P și Q la AM intersectează laturile AB și AC respectiv în P' și Q'. Să se arate că dacă P este mobil iar lungimea segmentului PQ este constantă atunci aria trapezului $PQQ'P'$ este constantă.

Soluție:

$\widehat{B} = \widehat{C}$, deci triunghiurile dreptunghice BPP' și CQQ', sînt asemenea cu triunghiul ABM, deci:

$$\frac{PP'}{AM} = \frac{BP}{BM}, \frac{QQ'}{AM} = \frac{QC}{BM}$$

Din acestea se deduce:

$$\frac{PP' + QQ'}{AM} = \frac{BP + QC}{BM} \qquad \text{(fig. 26.12)}$$

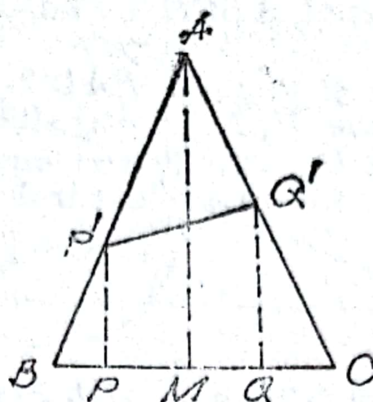


Fig. 26.12

Dar AM, BM şi $BP + QC = BC - PQ$, sînt constante şi din ultima egalitate, rezultă că $PP' + QQ'$ este constantă.

Prin urmare : $\frac{(PP' + QQ')PQ}{2}$, rămîne constantă.

● Se consideră un trapez dreptunghic $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$) în care cele două baze au lungimile $AB = a$ şi $CD = b$ iar latura neparalelă $BC = a + b$. Dacă E este mijlocul laturii neparalele AD, să se arată ce triunghiul BEC este dreptunghic.

Soluție.

Fie $CC' \perp AB$

$AD = CC' = \sqrt{(a + b)^2 - (a - b)^2} = 2\sqrt{ab}$.

$CE = \sqrt{b^2 + ab}$, $EB = \sqrt{a^2 + ab}$

Deci în $\triangle BEC$, avem : $CE^2 + BE^2 = BC^2$, deci $\widehat{BEC} = 90°$.
(fig. 26.13)

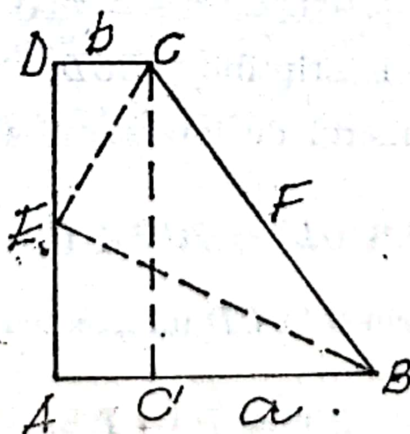


Fig. 26.13



● Se dă paralelogramul $ABCD$ avînd laturile $AB = CD = 3a$, $AD = BC = a\sqrt{2}$ şi unghiul $\widehat{BAD} = 45°$. Să se arate că patrulaterul $MNPQ$, unde M, N, P şi Q sînt respectiv mijloacele laturilor AB, BC, CD şi DA este de asemenea un paralelogram şi să se calculeze raportul dintre ariile paralelogramelor $ABCD$ şi $MNPQ$.

Soluţie.

QM este paralel cu BD şi egal cu $\frac{1}{2}$ BD. Aceiaşi proprietate o are NP, deci $MNPQ$ este paralelogram.

Aria $AMQ = \frac{1}{2}$ aria $ADB = \frac{1}{2}$ aria $ABCD$. Aceiaşi proprietate o au triunghiurile BMN, CPN, DPQ, deci aria $MNPQ$ = aria $ABCD - \frac{4}{6}$ aria $ABCD = \frac{1}{2}$ aria $ABCD$, deci $\frac{\text{aria } ABCD}{\text{aria } MNPQ} = 2$. (fig. 26.14)

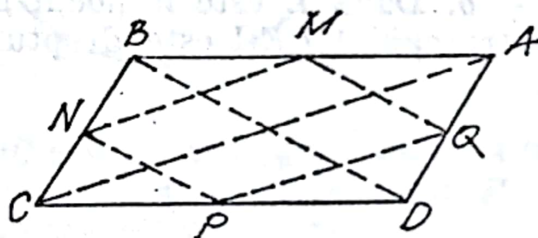


Fig. 26.14

În particular, se observă că $BB' = a$ şi aria $ABCD = BC \cdot BB' = 3a^2$. Apoi aria $AMQ = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sin 45°}{2} = \frac{3a^2}{8}$, deci aria $MNPQ$ = aria $ABCD - 4$ aria $AMQ = 3a^2 - \frac{3a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$ etc.

● Fie patrulaterul inscriptibil $ABCD$.

1) Notînd cu O punctul de intersecţie al diagonalelor AC şi BD, să se arate că:

$$AC^2 + OB^2 \quad OD^2 = BD^2 + OA^2 + OC^2.$$

2) Dacă paralela prin O la CD intersectează prelungirea laturii AB în P, să se arate că:

$$PO^2 = PA \cdot PB.$$

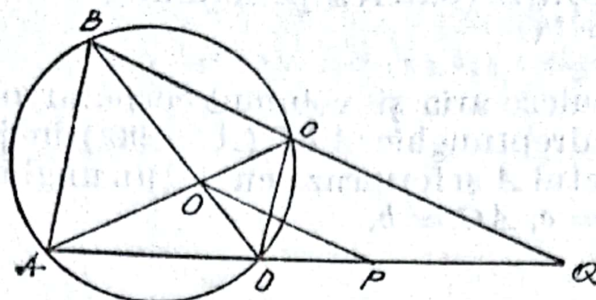


Fig. 26.15

Soluție.

1) Conform teoremei lui Ptolemeu avem:

$$AC^2 + BD^2 = AB \cdot DC + BC \cdot AD. \quad (1)$$

Membru întîi al relației de demonstrat se poate scrie astfel:

$$AC^2 + OB^2 + OD^2 = AC^2 + (OB + OD)^2 - 2\,OB \cdot OD =$$

$$= AC^2 + BD^2 - 2OB \cdot OD = AB \cdot DC + BC \cdot AD - 2OB \cdot OD.$$

În mod analog pentru membrul doi avem:

$$BD^2 + OA^2 + OC^2 = BD^2 + (OA + OC)^2 - 2OA.OC =$$

$$= BD^2 + AC^2 - 2OA \cdot OC = AB \cdot DC + BC \cdot AD - 2OA \cdot OC.$$

Dar, conform puterii punctului interior față de cerc avem:

$$OA \cdot OC = OB \cdot OD.$$

Prin urmare: $AC^2 + OB^2 + OD^2 = BD^2 + OA^2 + OC^2$.

2) Prelungim DC pînă taie pe AB în Q.

Avem: $\triangle AOP \sim \triangle ACQ$, de unde: $PA = \dfrac{PO \cdot QC}{QC}$. (2)

De asemenea $\triangle OBP \sim \triangle DBQ$, de unde: $PB = \dfrac{PO \cdot QB}{QD}$. (3)

Înmulțind relațiile (2) și (3) obținem:

$$PA \cdot PB = \frac{PO^2 \cdot QA \cdot QB}{QC \cdot QD}.$$

Dar $QA.QB = QC.QD$ (puterea punctului Q față de cerc).
Deci : $PA.PB = PO^2$.

● Să se calculeze aria și volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului dreptunghic ABC ($A = 90°$) în jurul unei drepte ce trece prin punctul A și formează cu AC un unghi de 30°, în funcție de catetele $AB = c$, $AC = b$.

Soluție.

Avem : $AB = c, AC = b$; $\widehat{DAC} = 30°$; $\widehat{BAE} = 60°$;

$$BE + \frac{c\sqrt{3}}{2};\ DC = \frac{b}{2};\ AD = \frac{b\sqrt{3}}{2};$$

$AE = \dfrac{c}{2}$; $BC = \sqrt{b^2 + c^2}$. Se obține aria :

$$A = \frac{\pi}{2}[\sqrt{b^2 + c^2}\,(b + c\sqrt{3}) + b^2 + c^2\sqrt{3}]$$ și volumul :

$$V = \frac{\pi bc}{6}(b + c\sqrt{3}).$$ (fig. 26.16)

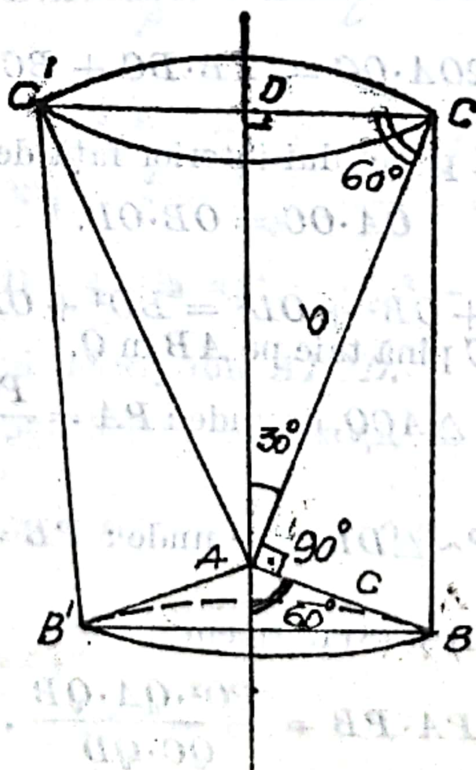


Fig. 26.16

● Într-un plan P se duc două drepte d_1 şi d_2, care se intersectează în Q. Dintr-un punct M, exterior planului, se duce perpendiculara pe d_1 care se intersectează cu d_1 în M_1 şi perpendiculara pe d_2 care se intersectează cu d_2 în M_2. Fie N proiecţia punctului M pe planul P. Să se arate că patrulaterul M_1QM_2N este inscriptibil.

Soluţie.

$$\left.\begin{array}{l} MN \perp P \\ MM_1 \perp d_1 \end{array}\right\} \Rightarrow NM_1 \perp d_1 \Rightarrow \widehat{QM_1N} = 90°$$

(fig. 26.17)

$$\left.\begin{array}{l} MN \perp P \\ MM_2 \perp d_2 \end{array}\right\} \Rightarrow MN_2 \perp d_2 \Rightarrow \widehat{QM_2N} = 90°.$$

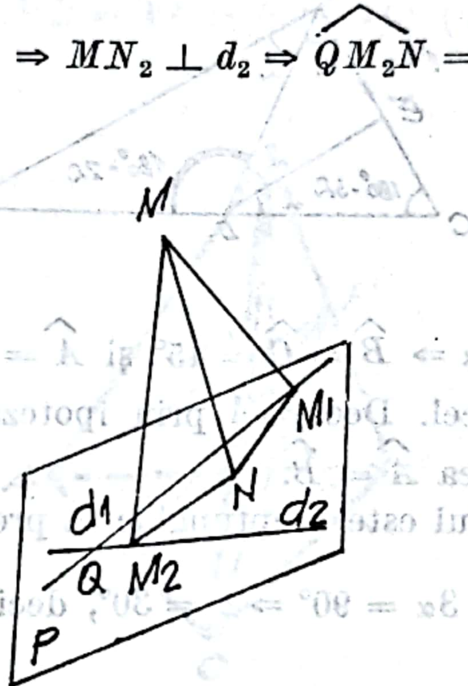


Fig. 26.17

Deci M_1QM_2N este inscriptibil, deoarece $\widehat{OM_1N} + \widehat{QM_2N} = 180°$.

● În triunghiul ABC, unghiul A este de două ori mai mare ca unghiul B.

a) Să se calculeze unghiurile A, B şi C, cînd triunghiul ABC este isoscel; aceiaşi problemă în cazul în care triunghiul ABC este dreptunghic.

b) Punctul D fiind intersecţia bisectoarei interioare a unghiului A cu latura BC, să se arate că bisectoarea unghiului ADC este paralelă cu latura AB.

c) Să se arate că latura AC este media proporțională între latura BC și segmentul DC.

d) Să se construiască triunghiul ABC cînd se dau laturile AB, AC și relația $\widehat{A} = 2\widehat{B}$.

***Soluție*:**

a) Dacă triunghiul este isoscel să presupunem că:

1) $\widehat{A} = \widehat{C} = 2\alpha \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{C} = 72°$ și $B = 36°$ (fig. 26.18)

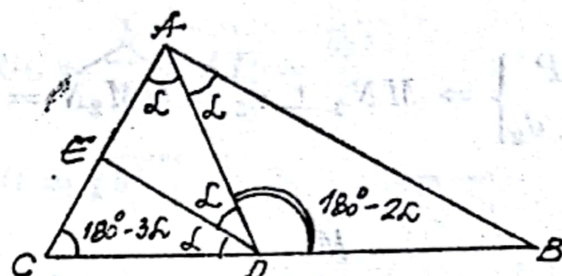


Fig. 26.18

2) $\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 45°$ și $\widehat{A} = 90°$, adică triunghiul dreptunghic isoscel. Deoarece prin ipoteză, $\widehat{A} = 2\widehat{B}$, nu poate avea loc egalitatea $\widehat{A} = \widehat{B}$.

Dacă triunghiul este dreptunghic să presupunem că:

1) $\widehat{C} = 90° \Rightarrow 3\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 30°$, deci $\widehat{C} = 90°$, $\widehat{B} = 30°$, $\widehat{A} = 60°$.

2) $\widehat{A} = 90° \Rightarrow 2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 45°$, deci $\widehat{A} = 90°$, $\widehat{B} = \widehat{C} = 45°$.

De asemenea $\widehat{B}$ nu poate fi de 90° pentru că atunci $\widehat{A} = 180°$.

b) Deoarece $\widehat{ADB} = 180° - 2\alpha$, rezultă că $\widehat{ADC} = 2\alpha$. Cum DE este bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$, avem $\widehat{ADE} = \alpha$. Deci $DE \| AB$.

c) Notînd $AB = c$, $AC = b$ și $\widehat{B} = \alpha$, rezultă $\widehat{A} = 2\alpha$, $\widehat{C} = 180° - 3\alpha$. Aplicînd teorema sinusurilor se obține:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin 3\alpha},$$

de unde:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{3b - c}{4b}}.$$

Se determină $\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{3b-c}{4b}} = \widehat{B}$ cu condiția $0 < \frac{3b-c}{4b} <$ < 1; ceea ce ne conduce la $3b > c$.

Știind unghiurile și două laturi ale triunghiului, se poate face construcția cu rigla și compasul.

● Se consideră piramida regulată $VABC$, avînd $AB = BC = CA = a$ și $VA = VB = VC = b$ $(b > 0)$ (fig. 26.19). Se notează cu P proiecția vîrfului A pe muchia VB. Să se calculeze:

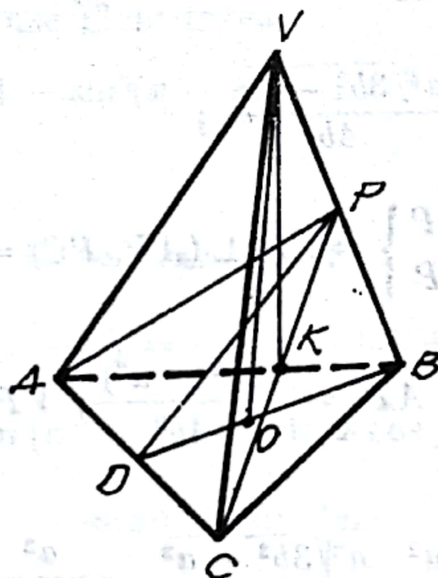


Fig. 26.19

a) Aria triunghiului PAC;

b) Volumul tetraedrului $PAVC$

Soluție.

a) Triunghiurile isoscele VAB, VBC, VAC, sînt egale. De asemenea triunghiurile AVP și CVP sînt egale și deci $AP = PC$. Deci $\triangle APC$ isoscel. Construim $PD \perp AC$, deci PD este și mediană în $\triangle APC$; $VK \perp AB$.

Avem:

$$S_{VAB} = \frac{AB \cdot VK}{2} = \frac{VB \cdot AP}{2}$$

sau:

$$a \cdot VK = b \cdot AP; \; AP = \frac{a}{b} \;\; VK = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2b}$$

$$PD^2 = AP^2 - AD^2 = \frac{a^2(4b^2 - a^2)}{4b^2} - \frac{a^2}{4} =$$

$$= \frac{a^2(3b^2 - a^2)}{4b^2}; \; PD = \frac{a}{2b}\sqrt{3b^2 - a^2};$$

$$S_{PAC} = \frac{AC \cdot PD}{2} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{4b};$$

Avem: $\left.\begin{array}{l} VP \perp AP \\ VP \perp CP \end{array}\right\} \Rightarrow VP \perp (AP, PC) \Rightarrow V_{PAVC} = \dfrac{S_{PAC} \cdot VP}{3}$

$$VP^2 = b^2 - AP^2 = \frac{(2b^2 - a^2)^2}{4b^2}, \; VP = \frac{2b^2 - a^2}{2b};$$

Obţinem:

$$V_{PAVC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2b^2 - a^2}{2b} \cdot \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{4b} = \frac{a^2}{24b^2}(2b^2 - a^2)\sqrt{(3b^2 - a^2)}$$

Trigonometrie

- Să se rezolve ecuaţia trigonometrică:

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2.$$

Soluţie.

Ecuaţia poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 1,$$

sau :

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1, \text{ deci } x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi,$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, \; k \in Z.$$

Se mai poate rezolva astfel : punînd $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ se obţine

$$t = \frac{\sqrt{3}}{3}, \; \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

● Să se demonstreze identitatea :

$$\sin^2(x + y) - \sin^2(x - y) = \sin 2x \cdot \sin 2y.$$

Soluţie :

Una din metodele de rezolvare este :

$$\sin^2(x + y) - \sin^2(x - y) = [\sin(x + y) + \sin(x - y)]\cdot$$

$$\cdot [\sin(x + y) - \sin(x - y)] = 2 \sin x \cos y \cdot 2 \sin y \cdot \cos x =$$

$$= \sin 2x \sin 2y.$$

● Să se scrie expresia :

$$E = 1 + \sin^2 x \cos^2 x + m(\sin^4 x + \cos^4 x) - 3m(\sin^6 x + \cos^6 x),$$

în funcţie de $u = \sin 2x$, apoi să se determine parametrul m astfel încît E să nu depindă de x.

Soluţie.

Deoarece :

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x \sin^2 x = 1 - \frac{1}{2}u^2.$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}u^2.$$

Rezultă :

$$E = 1 - 2m + \frac{7m-1}{4} \cdot u^2.$$

E nu depinde de x dacă şi numai dacă $m = \frac{1}{7}$, iar atunci $E = \frac{9}{7}$.

● Să se determine valorile lui m pentru care ecuaţia :

$$\sqrt{1-\cos 2x} + \sqrt{1+\cos 2x} = m,$$

admite soluţii în intervalul $I=[0, \pi]$. Pentru $m=\sqrt{2}$ să se determine soluţiile acestei ecuaţii care se găsesc în intervalul I.

Soluţie.

Înlocuind $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$, ecuaţia dată devine :

$$|\sin x| + |\cos x| = \frac{m}{\sqrt{2}}$$

Aceasta se desparte în două :

$$\sin x + \cos x = \frac{m}{\sqrt{2}}, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin x - \cos x = \frac{m}{\sqrt{2}} \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right],$$

şi se pot aduce la forma :

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{m}{2}, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{m}{2}, \ x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leqslant x + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$$

$$\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1.$$

Deci : $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{m}{2} \leqslant 1$, $m \in [\sqrt{2}, 2]$.

Pentru $m = \sqrt{2}$, avem ecuațiile :

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ sau } \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right],$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ sau } \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right).$$

Prima ecuație are soluțiile $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, iar a doua, soluția $x_3 = \pi$.

● Să se rezolve ecuația :

$$3\cos^2 x - \sin^2 x - \operatorname{tg} x = 0.$$

Soluție.

Trebuie impusă condiția $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

Scriind $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, se obține ecuația : $y^3 + y^2 + y - 3 = 0$ (cu $y = \operatorname{tg} x$) ale cărei soluții sînt $y_1 = 1$, $y_{2.3} = 1 \pm i\sqrt{2}$, singura acceptabilă fiind y_1, se obțin soluțiile $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, n întreg.

● Pe laturile BC, CA și AB ale unui triunghi oarecare ABC de arie S se consideră punctele A', B' și C' (A' între B și C, B' între C și A, C' între A și B), astfel încît $BA' = K \cdot BC$, $CB' = K \cdot CA$, $AC' = K \cdot AB$, $(0 < K < 1)$ (fig. 26.20). Să se calcu-

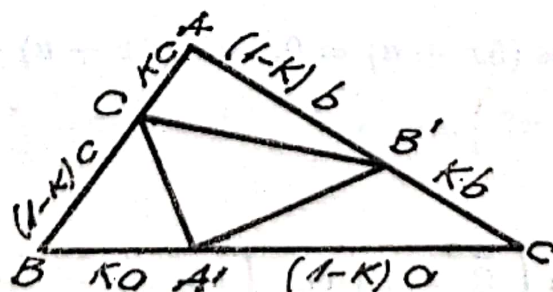


Fig. 26.20

leze aria S' a triunghiului $A'B'C'$ în funcţie de S şi K.

Soluţie.

$$\text{Aria } AB'C' = \frac{1}{2} Kc\,(1-K)b \sin A = K(1-K)\,S.$$

$$\text{aria } BC'A' = \frac{1}{2} Ka\,(1-K)c \sin B = K\,(1-K)\,S.$$

$$\text{aria } CA'B' = \frac{1}{2} Kb \cdot (1-K)\,a \sin C = K\,(1-K)\,S.$$

$$S' = S - \text{aria } AB'C' - \text{aria } BC'A' - \text{aria } CA'B'.$$

$$S' = S - 3K\,(1-K)\,S = S(1 - 3K + 3K^2).$$

● Să se rezolve ecuaţia trigonometrică :

$$\sin(x+a) + \cos(3x+a) + \sin(5x+a) + \cos(7x+a) = 0$$

unde a este un unghi dat.

Soluţie.

$$[\sin(x+a) + \sin(5x+a)] + [\cos(3x+a) + \cos(7x+a)] = 0,$$

$$2\sin(3x+a)\cos 2x + 2\cos(5x+a)\cos 2x = 0,$$

$$\cos 2x \cdot [\sin(3x+a) + \cos(5x+a)] = 0,$$

$$\cos 2x = 0, 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in Z.$$

$$\sin(x+a) + \cos(5x+a) = 0,\ \sin(3x+a) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x - a\right) = 0,$$

deci :

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(4x + a - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

de unde se obţin soluţiile :

$$x = \frac{\pi}{4} - k_1\pi ; \; h_1 \in Z \text{ şi}$$

$$x = -\frac{a}{4} + \frac{3\pi}{16} + \frac{k_2\pi}{4}, \; k_2 \in Z.$$

● Să se scrie sub formă trigonometrică numerele complexe $z_1 = 1 + i$ şi $z_2 = \sqrt{3} - i$, apoi folosind formula lui Moivre să se scrie numărul complex :

$$Z = \frac{(1 + i)^8}{(\sqrt{3} - i)^3}$$

sub formă trigonometrică.

Soluţie.

Scrierea sub formă trigonometrică a numerelor date este :

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$$z_2 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \left(2\left[\cos\frac{11\pi}{6} + i \sin\frac{11\pi}{6}\right]\right)$$

Deci :

$$z_1^8 = 16\,(\cos 2\pi + i \sin 2\pi).$$

$$z_2^3 = 8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 8\left[\cos\frac{11\pi}{2} + i \sin\frac{11\pi}{2}\right]$$

de unde :

$$z = \frac{z_1^8}{z_2^3} = \frac{16}{8}\left[\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\left[\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right].$$

● Fiind dată ecuaţia: $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + ax + b = 0$, să se determine a şi b şi să se rezolve ecuaţia, ştiind că rădăcinile x_1, x_2, x_3 şi x_4 formează, în această ordine, o progresie aritmetică iar rădăcina $x_4 = 3$.

Indicaţie.

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = x_3 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = +6 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 8 \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 = -a \\ x_1x_2x_3x_4 = b \end{cases}$$

De unde:

$$x_3 + x_2 = x_1 + 3$$

$$2(x_1 + 3) = 6 \Leftrightarrow x_1 + 3 = 3 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

$$\begin{cases} x_2x_3 + 3(x_2 + x_3) = 8 \\ x_2x_3x_4 = -a \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2x_3 + 3(x_2 + x_3) = 8 \\ x_2x_3 = \dfrac{a}{3} \\ x_1x_2x_3 = \dfrac{b}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = \dfrac{24 + a}{9} \\ x_2x_3 = \dfrac{a}{3} \end{cases} \quad x_2 + x_3 = 3$$

$$\frac{24 + a}{9} = 3; \quad a = 3$$

Se află apoi $b = 0$.

● Să se afle valorile lui x pentru care sînt satisfăcute inecuațiile :

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{3^x + 1}{9^x + 3} \leqslant \frac{1}{2}$$

Indicație.

Prin substituția $3^x = y$ inecuația devine :

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{y + 1}{y^2 + 3} \leqslant \frac{1}{2}$$

● Să se determine x știind că suma termenilor al treilea și al cincilea din dezvoltarea binomului $(x + \sqrt{5})^6$ este egală cu 450.

Soluție.

$$T_3 + T_5 = C_6^4 x^2\, 5^2 + C_6^4 x^4 5 = 450 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 5x^2 - 6 = 0, \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

● Să se rezolve ecuația :

$$C_{x+1}^1 + C_{x+3}^3 = \frac{13}{6} C_{x+2}^2,$$

unde C_m^n este numărul combinărilor de m obiecte luate cîte n.

Soluție.

Ecuația are sens dacă x este întreg și $x \geqslant 0$. Dezvoltînd se obține ecuația :

$$(x + 1)(2x^2 - 3x - 2) = 0.$$

Din soluțiile -1, $-\frac{1}{2}$, 2 convine numai $x = 2$.

● Să se determine valorile parametrilor reali a şi b şi să se rezolve ecuaţia $x^3 - 6x^2 + ax + b = 0$, ştiind că $x_1 = 1$, iar $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{5}{6}$ (x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuaţiei).

Soluţie.

Din relaţiile lui Viète $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, $x_1x_2x_3 = -b$, se deduce că $x_2 + x_3 = 5$ şi $x_2x_3 = -b$.
Atunci:

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{5}{b}, \text{ de unde } b = -6.$$

Cum $x_1 = 1$ este rădăcină a ecuaţiei rezultă $a + b = 5$, deci $a = 11$. Celelalte rădăcini ale ecuaţiei sînt 2 şi 3.

● Să se pună în ordine crescătoare numerele:

$A = 2$, $B = m$, $C = \frac{m+2}{2}$, $D = \sqrt{m^2 + 4}$ (discuţie după valorile parametrului real m).

Soluţie.

Numărul C este situat totdeauna între A şi B iar $B < D$, $A < D$.

Dacă $m > 2$, atunci $A < C < B < D$ şi dacă $m < 2$, atunci $B < C < A < D$ (în cazul cînd $m = 2$, avem $A = B = C < D$).

● Să se determine valorile parametrilor reali m şi n ştiind că polinomul $P(x) = x^3 - 6x^2 + (m^2 + 2)x + n$ este divizibil cu polinomul $Q(x) = x^2 - 5x + 2m$.

Soluţie.

Efectuînd împărţirea lui P la Q, rezultă cîtul $x - 1$ şi restul $(m^2 - 2m - 3)\,x + n + 2m$.

Anulînd identic restul, va rezulta $\begin{cases} m^2 - 2m - 3 = 0, \\ n + 2\,m = 0. \end{cases}$

de unde $m_1 = 3$, $n_1 = 6$; $m_2 = -1$, $n_2 = 2$.



De asemenea, se poate aplica şi metoda coeficienţilor nedeterminaţi:

$$x^3 - 6x^2 + (m^2 + 2)x + n = (x^2 - 5x + 2m)(x + \alpha) \text{ etc.}$$

● Să se rezolve ecuaţia:

$$\log_2 2x + \log_x 2x = 4.$$

Soluţie.

Ecuaţia are sens pentru $x > 0$, $x \neq 1$ şi se scrie:

$$\log_2 2x + \frac{\log_2 2x}{\log_2 x} = 4.$$

Se notează $\log_2 x = y$ şi ecuaţia devine:

$$1 + y + \frac{1 + y}{y} = 4.$$

Se obţine: $y^2 - 2y + 1 = 0$, $y = 1$, deci $x = 2$.

● Să se calculeze determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

unde x_1, x_2 şi x_3 sînt rădăcinile ecuaţiei:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Soluţie.

Adunînd elementele liniilor a doua şi a treia la elementele primei linii, obţinem:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

şi deoarece $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, rezultă $D = 0$.

O altă soluţie se obţine dezvoltînd determinantul:

$$D = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3).$$

Dar x_1, x_2, x_3, verificînd ecuaţia rezultă:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3q$$

şi atunci:

$$3x_1\, x_2\, x_3 + 3q = 0.$$

● Să se reprezinte grafic funcţia reală f definită prin:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}$$

Soluţie.

Domeniul maxim de definiţie al lui f este $R - \{-1\}$. Apoi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ şi intersecţiile cu axele sînt (0, 4), (−2, 0).
Dreapta $x = -1$ este asimptotă verticală iar dreapta $y = x + 3$ este asimptotă oblică.
Cum $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$, tabloul de variaţie este:

x	$-\infty$		-2		-1			0		$+\infty$
f'	$+$	$+$	0	$-$	$-$ |	$-$	$-$	0	$+$	$+$
f	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ |	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Graficul funcţiei este dat în figura 26.20.
● Se dau matricile:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{şi} \quad X = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ u & v \end{vmatrix}$$

a) Să se determine u şi v astfel încît: $AX = XA$.

b) Să se calculeze A^n $(n \in N)$.

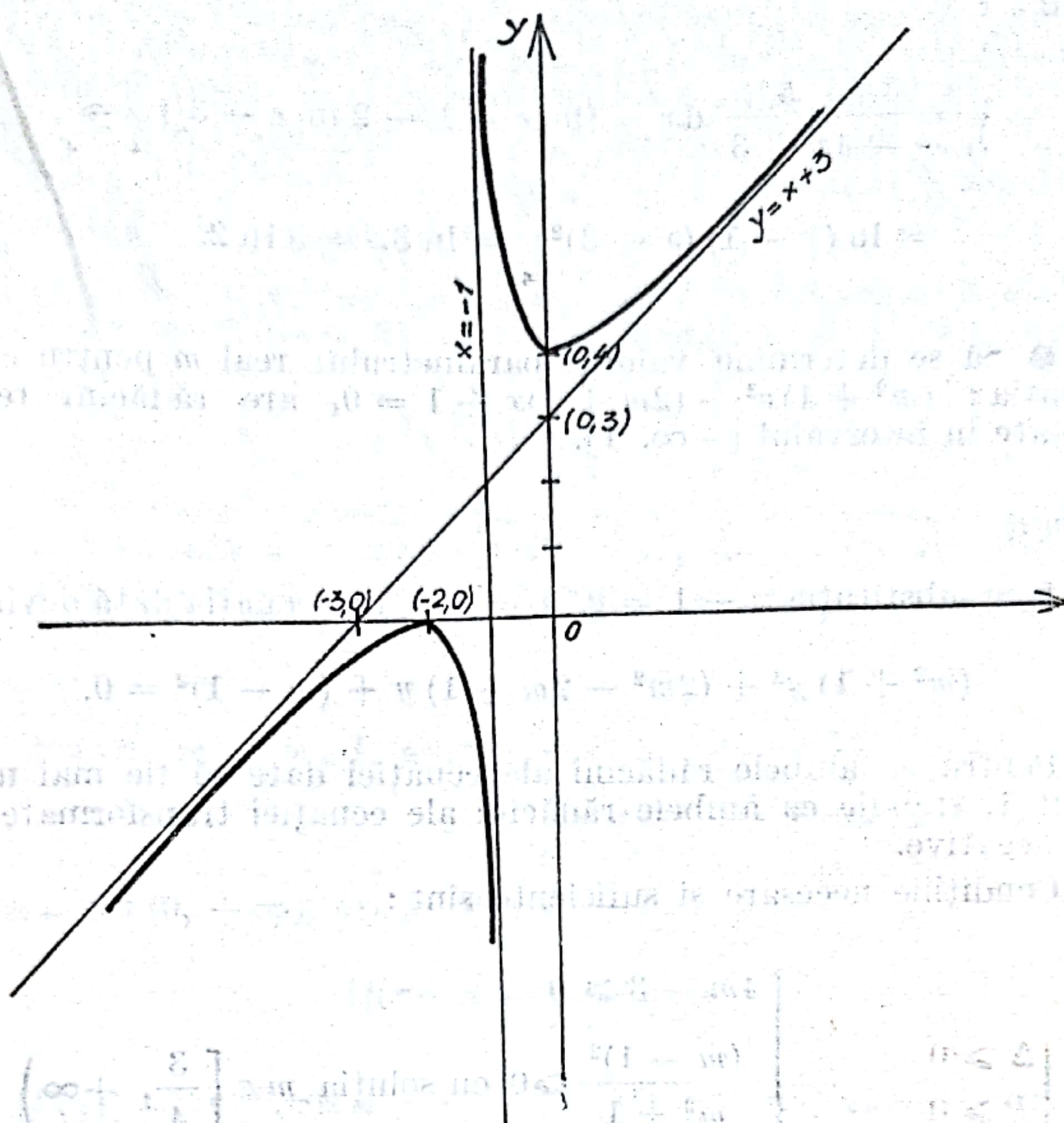


Fig. 26.20

● Să se calculeze integrala definită:

$$\int_4^7 \frac{3x - 5}{x^2 - 4x + 3} \, dx.$$

Soluție.

Avem: $\dfrac{3x - 5}{x^2 - 4x + 3} \equiv \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{2}{x - 3}$.

Atunci :

$$\int_4^7 \frac{3x-5}{x^2-4x+3}\,dx = (\ln|x-1| + 2\ln|x-3|)\Big|_4^7 =$$

$$= \ln (x-1)(x-3)^2\Big|_4^7 = \ln 32 = 5\ln 2.$$

● Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuaţia : $(m^2+1)x^2-(2m+1)x+1=0$, are rădăcini reale situate în intervalul $(-\infty, 1]$.

Soluţie.

Se face substituţia $x-1=y$, $x=y+1$ şi ecuaţia dată devine :

$$(m^2+1)\,y^2 + (2m^2-2m+1)\,y + (m-1)^2 = 0.$$

Pentru ca ambele rădăcini ale ecuaţiei date să fie mai mici decît 1, trebuie ca ambele rădăcini ale ecuaţiei transformate să fie negative.

Condiţiile necesare şi suficiente sînt :

$$\begin{cases}\Delta \geqslant 0\\ P \geqslant 0\\ S \leqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m-3 \geqslant 0\\ \dfrac{(m-1)^2}{m^2+1} \geqslant 0 \text{ cu soluţia } m \in \left[\dfrac{3}{4}, +\infty\right)\\ \dfrac{-2m^2-2m+1}{m^2+1} \leqslant 0\end{cases}$$

● Să se rezolve ecuaţia :

$$3\log_{1000}(x-1) + 2\log_{100}(x+3) - 2^{x-3}\log_{10}(x^2+2x-3) = 0$$

Soluţie.

Ecuaţia are sens pentru $\begin{cases}x-1>0\\ x+3>0\\ x^2+2x-3>0\end{cases} \Rightarrow x>1$

Ținînd cont de egalitatea: $\log_{a^3} b^n = \log_a b$, ecuația poate fi scrisă sub forma: $\lg(x-1) + \lg(x+3) - 2^{x+3}\lg(x+3)(x-1) = 0$, echivalentă cu: $(1 - 2^{x+3})\lg(x+3)(x-1) = 0$.
Din: $2^{x+3} = 1$, rezultă $x = -3$, care nu convine.
Din $\lg(x+3)(x-1) = 0$, rezultă: $x^2 + 2x - 4 = 0$, cu o singură soluție acceptabilă: $x = -1 + \sqrt{5}$.

● Se consideră funcția reală f definită pe intervalul $I = (0,\infty)$ prin $f(x) = e^{-x}\sin x$. Să se arate că oricare ar fi $x \in I$, avem:

$$|f(x)| < 1,\ |f'(x)| < \sqrt{2},\ |f''(x)| < 2.$$

și să se verifice că abscisele punctelor de maxim ale lui f în intervalul I se află în progresie aritmetică, iar ordonatele corespunzătoare acestor puncte, în progresie geometrică.

Soluție.

Pentru orice $x \in I$, avem: $f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$,

$$f''(x) = -2e^{-x}\cos x.$$

Dacă $x \in (0, +\infty)$, atunci $0 < e^{-x} < 1$, deci:

$$|f(x)| = e^{-x}|\sin x| < 1$$

$$|f'(x)| = |e^{-x}(\cos x - \sin x)| = e^{-x}\left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x\right| =$$

$$= e^{-x}\, x\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) < \sqrt{2}$$

$$|f''(x)| = |-2e^{-x}\cos x| = 2e^{-x}|\cos x| < 2.$$

Punctele de extrem sînt printre soluțiile situate în I ale ecuației $f'(x) = 0$. Se obține $x_k = k\pi + \frac{\pi}{4}$ $(k > 0,\ k \in Z)$. Precizarea extremelor:

$f''(x) = -2e^{-x_k}\cos\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right) < 0$, dacă și numai dacă k este par.

Pentru k impar $f''(x_k) > 0$.

Prin urmare pentru k par, punctele x_k vor fi de maxim. $x_0 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{4} + 2\pi, x_4 = \frac{\pi}{4} + 4\pi$ formează o progresie aritmetică cu rația 2π, iar ordonatele corespunzătoare:

$$f_0\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}; \qquad f_2\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4} - 2\pi};$$

$f_4\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{-\pi}{4} - 4\pi}$, formează o progresie geometrică cu rația $\frac{1}{e^{2\pi}}$.

Observație. Precizarea extremelor se poate face folosind și semnul derivatei f' pe I.

● Să se găsească domeniul maxim de definiție D al funcției $f(x) = \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}}$. Există puncte în D în care funcția f nu este derivabilă?

Soluție.

Mulțimea D este definită prin inegalitățile: $x - 1 \geqslant 0$ și $x + 8 - 6\sqrt{x - 1} \geqslant 0$. Rezultă: $D = [1, +\infty) \cap E$.

$$\text{Apoi}: f(x) = \sqrt{(\sqrt{x - 1} - 3)^2} = |\sqrt{x - 1} - 3| =$$

$$= \begin{cases} 3 - \sqrt{x - 1}, \text{ pt. } 1 \leqslant x \leqslant 10 \\ \sqrt{x - 1} - 3, \text{ pt. } x > 10. \end{cases}$$

Observație. La acest rezultat se poate ajunge și folosind formula de transformare a radicalilor dubli. Pe intervalele $(1, 10)$ și $(10, +\infty)$, funcția f este elementară, deci este derivabilă.

$$\text{In}: x = 1, f'_d(1) = +\infty.$$

$$\text{In}: x = 10, f'_s(10) = -\frac{1}{6} \text{ și } f'_d(10) = \frac{1}{6}.$$

Deci punctele din D în care f nu este derivabilă sînt:

$$x = 1 \text{ şi } x = 10.$$

● Să se calculeze limita şirului:

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \text{ cînd}$$

$n \to \infty$.

Soluţie.

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \ln\left(- \frac{1}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \ln\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \ln\left[\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \ldots \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} \cdot \frac{n \cdot (n+2)}{(n+1)(n+1)}\right].$$

Rezultă: $u_n = \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+1}\right)$.

Deci: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+1}\right) = \ln \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \ln \frac{1}{2}$.

● Să se determine volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei $y = \sqrt{x \cdot f(x)}$ în jurul axei Ox în intervalul $0 \leqslant x \leqslant \pi$, unde $f(x)$ este soluţia ecuaţiei diferenţiale $f'' + f = 0$, care verifică condiţiile $f(0) = 0, f''(0) = 1$.

Soluţie.

$f'' + f = 0$ ne conduce la $f(x) = a \cos x + b \sin x$, cu a şi b constante reale. Deci $f(x) = \sin x$ (ţinînd cont de condiţiile date).

Volumul $V = \pi \int_0^{\pi} x f(x)\, dx$

$$V = \pi \int_0^{\pi} x \sin x dx = \pi(\sin x - x \cos x)\Big|_0^{\pi} = \pi^2.$$

● Se consideră polinoamele:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$
$$Q(y) = y^3 + (b + c)y^2 + (c + a)y + a + b.$$

a) Să se determine a, b, c, reale, astfel încît să existe relațiile: $y_1 = x_1 + 1$; $y_2 = x_2 + 1$; $y_3 = x_3 + 1$, unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației $P(x) = 0$, iar y_1, y_2, y_3, sînt rădăcinile ecuației $Q(y) = 0$.

b) Pentru $b = c = 1$, să se determine a și să se rezolve ecuația $P(x) = 0$, știind că admite o rădăcină dublă.

Soluție.

a) Ținînd cont de relațiile Viète și de relațiile date:

$$y_1 + y_2 + y_3 = x_1 + x_2 + x_3 + 3 \Rightarrow a - b - c = 3 \quad (1)$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2(x_1 + x_2 + x_3) + 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3a - b + c = 3. \quad (2)$$

$$y_1y_2y_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3 + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c - 2b = 1. \quad (3)$$

Rezolvînd sistemul format din relațiile (1), (2), (3), obținem:

$$a = \frac{7}{3}; \qquad b = \frac{5}{3}; \qquad c = \frac{7}{3}.$$

b) Pentru $b = c = 1$ avem: $P(x) = x^3 + ax^2 - x - 1$. Ținînd cont de relațiile lui Viète și de faptul că $x_1 = x_2$, se obține ecuația: $x_1^3 + x_1 + 2 = 0$, cu rădăcinile: $x_1' = -1$ și $x_1'', x_1''' = \dfrac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.
Singura rădăcină dublă este $x_1 = -1$. Se obține $a = 1$, iar soluția ecuației este $x_1 = x_2 = -1$ și $x_3 = 1$.

● Se consideră funcția: $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+1)^2}$.

a) Să se reprezinte grafic funcția $y = f(x)$.

b) Să se calculeze aria limitată de graficul funcției:

$$y = f(x) \text{ și } x = 0,\ x = 1,\ 0 < x < 1.$$

Soluție.

a) Domeniul de definiție al funcției f este $R - \{1\}$. Intersecția cu axa Ox: $A(-2, 0)$. Intersecția cu axa Oy: $B(0, 2)$. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală;

$$\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\nearrow -1} \dfrac{x+2}{(x+1)^2} = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\quad -1} \dfrac{x+2}{(x+1)^2} = +\infty\end{cases}\right\} \Rightarrow x = -1, \quad \text{asimptotă verticală.}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 3}{(x+1)^4}, \text{ cu rădăcinile } x_1 = -3,\ x_2 = -1.$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 5 + 4)}{(x+1)^5}, \text{ cu rădăcinile } x_1 = -4, \quad x_2 = -1.$$

x	$-\infty$	-4		-3	-2		-1			0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$		0	$+$	$+$	||	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$0 \searrow$	$-\frac{2}{9}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow 0 \nearrow$	$+\infty$	||	$+\infty \searrow$		2	$\searrow 0$
$f''(x)$	$-$ $-$	0	$+$		$+$	$+$	||	$+$	$+$	$+$	$+$

Graficul (fig. 26.21.):

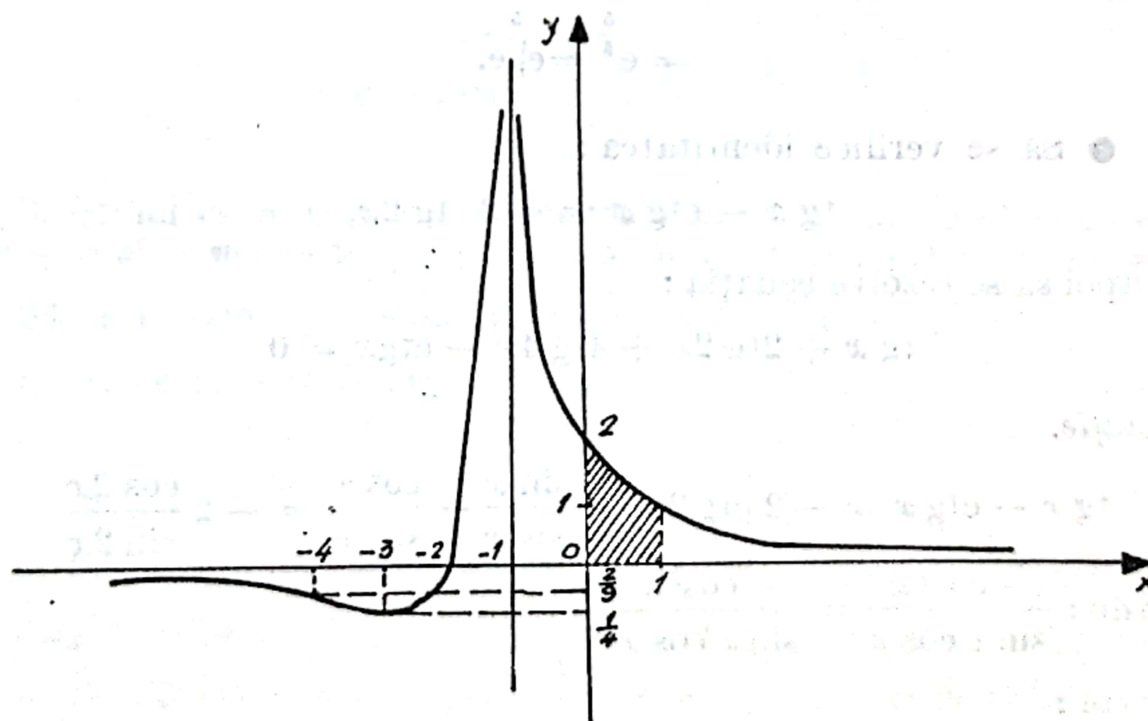


Fig. 26.21.

b) $S = \int_0^1 \frac{x+2}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{2} \ln (x+1)^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{x+1} \Big|_0^1 =$

$$= \frac{1}{2} \ln 4 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \ln 2^2 + \frac{1}{2} = \ln 2 + \frac{1}{2}.$$

● Se dă ecuaţia $x^2 - 2(m+1)x + 5m - 1 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2.

a) Să se determine intervalul căruia îi aparţine m, astfel încît :

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} \leqslant 2.$$

b) Să se calculeze limita : $\lim\limits_{m\to\infty} \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}\right)^m$

Soluţie :

a) $m \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup [1, 2]$

b) $\lim\limits_{m\to\infty} \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{2(m+1)}{5m-1}\right)^m = \lim\limits_{m\to\infty} \left[\left(1 + \frac{6}{5m-1}\right)^{\frac{5m-1}{6}}\right]^{\frac{6m}{5m-1}} =$

$$= e^{\frac{6}{5}} = e\sqrt[5]{e}.$$

● Să se verifice identitatea :

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2 \operatorname{ctg} 2x,$$

şi apoi să se rezolve ecuaţia :

$$\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x + 4\operatorname{tg} 4x - \operatorname{ctg} x = 0$$

Soluţie.

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2 \operatorname{ctg} 2x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = -2 \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

unde : $\frac{-\cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{-\cos^2 x}{\sin x \cos x}$

Avem :

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x = 0$$

Aplicînd identitatea de sus obținem :

$$-2 \operatorname{ctg} 2x + 2\operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x = 0$$

$$2(\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x) + 4 \operatorname{tg} 4x = 0$$

Repetînd procedeul se ajunge la $\operatorname{ctg} 8x = 0$, cu soluția :

$$x = k\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} \cdot k \in Z.$$

26.2. ADMITERE FACULTĂȚI (EXERCIȚII NEREZOLVATE)



1. Să se determine m, n și p știind că polinomul

$$P(x) = x^3 + nx + p,$$

se divide cu $x + 1$ și că dă același rest cînd este împărțit cu $x - 1$, $x - 2$ și $x - 3$.

2. Știind că a este o constantă reală, să se rezolve sistemul :

$$x + y + \sqrt{xy} = 6a\,; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$$

3. Știind că m este un parametru real, să se arate că ecuația $2x^4 + mx^2 - mx - 2 = 0$, admite o rădăcină independentă de m

Să se rezolve apoi ecuația dată pentru $m = -15$.

4. Să se rezolve ecuația :

$$2^{3x-1} - 2^{2x} = 2^{x-1} - 1.$$

5. Să se rezolve inegalitatea :

$\log_4(x^2 - 5x + 4) > 1.$

6. Se dă ecuația $x^3 + px + q = 0$ și fie x_1, x_2 și x_3 rădăcinile ei. Să se formeze ecuația ale cărei rădăcini sînt

$$y_1 = x_2 + x_3, \; y_2 = x_3 + x_1 \text{ și } x_1 + x_2.$$



1. Să se studieze natura şi semnele rădăcinilor ecuaţiei $x^3 - 3x - \frac{2m}{m^2+1} = 0$, după valorile reale ale parametrului m. Există valori $m \in R$ astfel încît produsul a două rădăcini să fie egal cu unitatea?

2. Să se rezolve ecuaţia $\log_x 2x + \log_{2x} 4x = \frac{7}{2}$.

3. Să se determine parametrii reali m şi n astfel încît polinomul:

$$P(x) = x^3 - 3mx + n$$

să aibă o rădăcină dublă, iar $\int_0^2 P(x)\,dx = 2$.

4. Fie $P(x)$ un polinom de gradul al patrulea cu coeficienţi reali avînd toate rădăcinile distincte şi situate în planul complex pe o paralelă la axa imaginară. Să se arate că rădăcinile derivatei $P'(x)$ se găsesc pe aceeaşi paralelă la axa imaginară.

5. Dacă:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{ax+b} & \text{pentru } x < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{x^2 - 9x + 21} & \text{peutru } x \geqslant 0 \end{cases}$$

să se determine numerele reale a şi b astfel încît funcţia $f(x)$ să fie continuă şi derivabilă pentru $x = 0$. Funcţia $f(x)$ astfel determinată este derivabilă pentru orice $x \in R$?

6. Să se arate că $\ln x \leqslant \frac{x}{e}$, oricare ar fi x strict pozitiv.



1. Să se determine parametrul real a şi să se rezolve ecuaţia: $x^3 - 21x^2 + ax - 216 = 0$, ştiind că între rădăcinile x_1, x_2 şi x_3 ale sale există relaţia:

$$x_3 = \sqrt{x_1 x_2}.$$

2. Să se rezolve inecuaţia $\log_{\frac{1}{8}}(2x^3 - 2x^2 - x + 1) < 0$.

3. Să se determine n astfel încît $C_n^2 + C_n^3 = 2(C_n^1 + C_n^4)$, unde C_n^p este numărul combinărilor de n obiecte luate cîte p.

4. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției $f: R \to R$ care are valorile $f(x) = \sin x + |\sin x|$.

5. Să se reprezinte grafic funcția definită prin

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

determinîndu-se în prealabil domeniul ei de definiție.

6. Se consideră funcția $f: R \to R$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ pentru } x \in [0, 1] \\ x^2 \text{ pentru } x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty). \end{cases}$$

Să se calculeze $I = \int_0^2 e^x f(x)\,dx$.



1. Să se rezolve ecuația:

$$x^4 + x^3 + mx^2 + nx + 1 = 0,$$

știind că admite rădăcina $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ și că m și n sînt numere raționale.

2. Să se determine valorile lui m pentru care ecuația: $(2m-1)x^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0$ are rădăcinile reale și pozitive.

3. Să se rezolve ecuația:

$$x^2 + \frac{x^2 + 2}{x^2} = 4.$$

4. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de rază R. Știind că AB este latura triunghiului echilateral, BC este latura hexagonului regulat și CD latura pătratului, înscrise în acest cerc, se cere să se determine lungimea laturii DA și lungimile diagonalelor AC și BD ale patrulaterului.

5. Două cercuri avînd centrele O_1 și O_2 și razele R_1 și R_2 sînt tangente exterior. Știind că cele trei tangente comune formează un triunghi echilateral, se cere să se calculeze raportul celor două raze.

6. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^2 2x + 4 \sin^2 x = 3.$$



1. Pe un cerc de rază R se consideră punctele A, B, C şi D în această ordine, cu următoarele precizări : coarda AB este latura riunghiului echilateral înscris în cerc ; coarda CD este latura hexagonului regulat înscris în cerc ; punctele B şi C sînt de o parte şi de alta a diametrului care trece prin A. Să se arate că t$AC \perp BD$, apoi să se calculeze în funcţie de R suma $AD^2 + BC^2$.

2. Să se calculeze catetele unui triunghi dreptunghic ştiind că ipotenuza sa este de 15 cm, iar raza cercului înscris $r = 3$ cm.

3. Să se calculeze volumul unui paralelipiped drept cu baza un romb cu latura $a\sqrt{3}$, avînd un unghi ascuţit de 60°, ştiind că lungimea diagonalei mari a paralelipipedului este $d = 5a$.

4. Se consideră, în spaţiu, trei semidrepte Ox, Oy şi Oz formînd, două cîte două, unghiuri de 60°. Pe semidreapta Ox se ia un punct A astfel încît $OA = 2a$. Să se determine distanţele de la punctul A la semidreptele Oy şi Oz şi la planul yOz.

5. Cunoscînd $\cos 2\alpha = \dfrac{2m}{1 + m^2}$ şi $\cos 2\beta = \dfrac{1 - m^2}{1 + m^2}$, unde m este un parametru real, să se calculeze $\sin(\alpha + \beta)$ şi $\cos(\alpha - \beta)$ ştiind că $\alpha, \beta \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

6. Se dau numerele complexe :

$$z_1 = \sin\alpha - \cos\alpha + i(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

$$z_2 = \sin\alpha + \cos\alpha + i(\sin\alpha - \cos\alpha),$$

unde α este parametru real dat. Să se găsească numerele naturale n pentru care $[z_1 \cdot z_2]^n$ este un număr real pozitiv.



1. Se dă un exagon regulat $ABCDEF$ de latură a. Se notează cu M, N şi P mijloacele laturilor AB, CD şi EF. Să se calculeze aria triunghiului MNP.

2. Se consideră un trapez isoscel, înscris într-un cerc de rază R. Ştiind că centrul cercului este în interiorul trapezului, iar baza mare şi baza mică sînt egale respectiv cu latura triunghiului echilateral şi latura exagonului regulat înscrise în cerc, să se calculeze aria trapezului.

3. Un dreptunghi $ABCD$, cu laturile $AB = CD = a$ şi $BC = AD = 2a$, se proiectează pe un plan, care conţine latura AB, în pătratul $ABC'D'$. Să se calculeze volumul prismei $ADD'BCC'$.

4. Se consideră o piramidă $SABCD$ cu baza un dreptunghi $ABCD$ cu laturile $6a$ şi $8a$. Ştiind că proiecţia vîrfului S al piramidei pe planul bazei este centrul O al dreptunghiului şi că volumul piramidei este $48\,a^3$, se cere să se determine distanţele de la O la feţele laterale ale piramidei.

5. Se dă $\sin A + \cos A = \frac{1}{2}$. Să se calculeze $\sin^3 A + \cos^3 A$.

6. Să se rezolve ecuaţia:

$$\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

★

1. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 + x^3 + mx^2 + nx + 1 = 0$$

ştiind că admite rădăcina $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ şi că m şi n sînt numere raţionale.

2. Să se determine valorile lui m pentru care ecuaţia:

$$(2m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m + 1 = 0$$

are rădăcinile reale şi pozitive.

3. Să se determine termenul care nu depinde de x în dezvoltarea binomului:

$$\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^7.$$

4. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{x^2}{x + 2} + \frac{x + 2}{x^2} = 2$$

5. Să se studieze variaţia funcţiei $f: R \to R$ ale cărei valori sînt date de:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

şi apoi să se reprezinte grafic această variaţie.

6. Să se determine parametrul real m astfel

$$\lim_{x\to+\infty}(x+m-\sqrt{x^2+x+m})=1$$

★

1. Fie funcţia $f: R \to R$ definită prin
$f(x) = |x-1|\,|x-2|\,\ldots\,|x-n|, \ (n \geqslant 1)$.

a) Să se studieze continuitatea lui $f(x)$.

b) Să se studieze derivabilitatea lui $f(x)$.

2. Se consideră funcţia :

$$f: (-2\pi, 2\pi) \to R$$

definită prin :

$f(x) = |x| - |\sin x|$.

a) Să se determine punctele unde $f(x)$ nu este derivabilă.

b) Să se reprezinte grafic funcţia.

c) Să se calculeze aria figurii delimitate de graficul funcţiei $f(x)$ axa Ox şi dreptele paralele la axa Oy care taie axa Ox în punctele $-\dfrac{\pi}{2}$ şi respectiv $\dfrac{\pi}{2}$.

3. Fie $f: [0, +\infty) \to R$ o funcţie continuă şi fie

$$a_n = \int_0^n \sqrt{x^2 + (f(x))^2}\,dx \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Să se arate că

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n} = +\infty.$$

4. Fie $f: R \to R$ o funcţie avînd proprietatea $|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|^2$ oricare ar fi numerele reale x, y. Să se arate că funcţia f este constantă.

★

1. Triunghiul ascuţitunghic ABC are unghiul C de 30°. Notînd cu M punctul de intersecţie a înălţimilor să se calculeze aria triunghiului AMB, ştiind că distanţele centrului cercului circum-

scris triunghiului ABC la laturile BC şi AC sînt egale respectiv cu $\sqrt{2}$ şi $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. O piramidă triunghiulară are două feţe triunghiuri dreptunghice isoscele, iar celelalte două feţe triunghiuri echilaterale de latură a.

a) Să se calculeze aria totală a piramidei.

b) Să se calculeze volumul piramidei.

★

1. Fie funcţia $f(x) = 3x^2-2(m+1)x + m$ definită pe $(-\infty, \infty)$ şi depinzînd de parametrul m.

a) Să se arate că oricare ar fi valoarea parametrului m, funcţia f se anulează exact în două puncte.

b) Să se stabilească dacă există (şi, în cazul afirmativ, să se indice care anume) valori ale lui m pentru care funcţia f e crescătoare pe $(-\infty, \infty)$.

c) Să se stabilească dacă există (şi, în cazul afirmativ, să se indice care anume) valori ale lui m pentru care funcţia f e convexă pe $(-\infty, \infty)$.

d) Să se stabilească pentru care valori ale lui m funcţia f admite un minim în punctul $x = 1$.

2. Fie funcţia $f: (0, \infty) \to R$, unde

$$f(x) = -x \ln x$$

a) Să se studieze continuitatea, derivabilitatea, convexitatea şi eventualele extreme ale funcţiei f. Să se traseze graficul funcţiei f.

b) Să se determine mulţimea M a valorilor lui f precum şi mulţimea $M \cap [0, \infty)$.

3. Fie a_0 şi A două numere reale şi pozitive şi fie

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{A}{a_0}\right), \quad a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right), \ldots$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right).$$

Să se stabilească direct egalitatea:

$$\frac{a_{n+1} - \sqrt{A}}{a_{n+1} + \sqrt{A}} = \left(\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}}\right)^2.$$

şi prin inducţie egalitatea:

$$\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}} = \left(\frac{a_1 - \sqrt{A}}{a_1 + \sqrt{A}}\right)^{2^{n-1}}$$

4. Fie şirul

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

x_0 fiind un număr real şi pozitiv. Folosind rezultatul de la punctul *a*) să se arate că:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{A}$$

★

1. Se consideră sistemul:

$$\begin{aligned} mx + y + z &= 3 \\ x + my + z &= 3 \\ x + 2my + z &= 4 \end{aligned}$$

a) Cum trebuie să fie m pentru ca sistemul să aibă o soluţie unică?

b) În cazul cînd are soluţie unică, să se rezolve sistemul.

c) Să se studieze sistemul pentru fiecare valoare a lui m pentru care el nu are soluţie unică.

2. 1) Să se afle valoarea maximă şi valoarea minimă a ordonatelor punctelor (x, y) ce verifică inegalităţile $y \leqslant 3x + 18$, $y \geqslant x^2 + 4x$. Aceeaşi problemă pentru abscise.

2) Să se afle mulţimea tuturor numerelor reale x care verifică inecuaţiile

$$\sqrt{2x + 1} < \frac{2(x + 1)}{2 - x}, \quad \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geqslant 2.$$

3. Să se rezolve ecuaţia

$$(|\sin x| - \sin x - 2)(\sin 11\pi x \sin 4\pi x + \sin 5\pi x \sin 2\pi x) = 0$$

★

1. Se consideră polinomul

$$P(x) = x^3 - 3p^2x + p$$

unde p este un parametru real. Să se determine valorile lui p pentru care ecuaţia

$$P(x) = 0$$

are o rădăcină dublă şi în aceste cazuri să se rezolve ecuaţia.

2. Fie funcţia : $R - \{1\} \to R$ de forma :

$$f(x) = \frac{\alpha x^2 - 3x + \beta}{1 - x}.$$

a) Să se determine α şi β astfel încît $f(x)$ să aibă un extrem în punctul de coordonate $(-1, 1)$.

b) Cu α şi β determinaţi la punctul precedent, să se reprezinte grafic funcţia $y = f'(x)$.

3. Se consideră funcţia

$$f : (1, +\infty) \to R$$

definită prin

$$f(x) = \log \frac{x + 1}{x - 1}$$

şi două puncte $a, b \in (1, +\infty)$. Să se determine c astfel ca

$$f(c) = f(a) + f(b).$$

★

1. Se consideră un triunghi ABC, dreptunghic în C şi avînd cateta CA de lungime 4.

Pe cateta CB se consideră punctul D, la distanţa de 1 de C. Ştiind că cercul care trece prin C şi D are raza de lungime $\frac{\sqrt{5}}{2}$ şi este tangent la cercul circumscris triunghiului ABC, să se găsească :

a) Aria triunghiului ABC.

b) Aria cuprinsă între cele două cercuri.

c) Să se verifice că unul din cele două cercuri trece prin centrul celuilalt.

2. Baza piramidei $OABCD$ este trapezul $ABCD$, cu baza mică $AB = 3$ cm şi baza mare $CD = 5$ cm.

Ştiind că planele feţelor laterale OAD şi OBC se taie după o perpendiculară pe bază, că aria feţei laterale OAB este de 9 cm²

şi că aria feţei laterale OCD este de 20 cm², să se găsească volumul piramidei.

3. *a.* Să se calculeze aria unui romb $ABCD$ în care se cunoaşte: vîrful $A(-1; 3)$, un punct $M(0; 2)$ situat pe una din laturile care pleacă din A şi punctul $Q(2; 1)$ de intersecţie a diagonalelor.

b. Să se calculeze aria cercului înscris în rombul $ABCD$.

c. Să se scrie ecuaţia elipsei circumscrise rombului $ABCD$, faţă de sistemul de coordonate format de diagonalele rombului, ştiind că aceste diagonale sînt axele elipsei.

★

1. Fie ecuaţia:

$$6x^4 + (3m - 23)x^3 + (28 - 4m)x^2 - (5m + 13)x + 2(m + 1) = 0,$$

unde m este un număr întreg.

a) Să se arate că ecuaţia are două rădăcini raţionale independente de m.

b) Să se determine m astfel ca suma inverselor rădăcinilor ecuaţiei date să fie egală cu 2.

2. Să se determine limita şirului $\{u_n\}_{n \in N}$ dat de termenul general:

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1}} - \sqrt{n - \sqrt{n-2}}, \ (n \geq 2).$$

3. *a*) Să se calculeze determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-a} & e^{-x} \\ e^{-a} & e^{2x} & e^{-x} \\ e^{-x} & e^{-x} & e^{2a} \end{vmatrix}$$

b). Să se rezolve ecuaţia: $D = 0$.

4. *a*) Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x + y + z = 1; \\ ax + by + cz = d; \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2. \end{cases}$$

unde:

$a, b, c, d \in R$.

b) Discuţie.

5. Folosind şirul lui Rolle să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + m = 0$, după valorile parametrului m real

6. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} (4^x)^{\frac{1}{y}} = 2^5 \cdot (8^y)^{\frac{1}{x}} \\ (3^x)^{\frac{1}{y}} = 3 \cdot (3^2(1-y))^{\frac{1}{x}} \end{cases}$$

7. Fie ecuaţia:

$$x^3 + px^2 + qx + p = 0$$

a) Să se determine p şi q astfel încît această ecuaţie să admită rădăcinile $x_1 = 2 - \sqrt{3}$, $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.

b) Să se găsească şi a treia rădăcină.

8. Se consideră funcţia f definită pe $(0, +\infty)$ prin egalitatea:

$$f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}.$$

a) Să se arate că funcţia f este monoton descrescătoare.

b) Să se calculeze

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) \text{ şi } \lim_{x \to \infty} f(x).$$

9. Să se rezolve ecuaţia:

$$(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 62.$$

10. Să se rezolve ecuaţia:

$$6 \log_x a + 3 \log_{a^2x} a + \frac{\log_{ax} x}{\log_a x} = 0$$

unde $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

11. Să se rezolve, în mulţimea numerelor naturale, ecuaţia:

$$\sqrt[4]{x - 3} - \sqrt[4]{5x + 1} = -2.$$

12. Utilizînd formula lui Lagrange pentru funcţia $f(x) = \sin x$ să se arate că:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 50° < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{36}.$$

13. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei $f: R \to R$ dată de legea:

$$f(x) = \frac{|x^2 - 2|}{x^2 + 2}.$$

14. Se consideră integrala:

$$I(a) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2x\text{tg}a + 1} \text{ unde } a \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

a) Să se arate, fără a efectua integrarea, că $I(a)$ este o funcţie monoton descrescătoare de a.

b) Să se calculeze integrala pentru $a \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ şi să se stabilească continuitatea lui $I(a)$ în punctul $a = \frac{\pi}{4}$ calculînd $\lim\limits_{\substack{a \to \frac{\pi}{4} \\ a < \frac{\pi}{4}}} I(a)$.

15. Se consideră integralele:

$$I = \int_0^{x_0} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \text{ şi } J = \int_0^{x_0} \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

cu $x_0 \in (0, a)$.

a) Să se stabilească două relaţii distincte între I şi J care să nu conţină altă integrală.

b) Să se calculeze I şi J utilizînd fie relaţiile găsite, fie direct.

16. Se dă funcţia $f: R \to R_+$, dată prin egalitatea:

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 5x + 4|}$$

a) Să se determine asimptotele oblice ale graficului acestei funcţii.

b) Să se determine a, b, c astfel ca dreptele de ecuaţii $y = 1$, $x = 2$, $x = 3$ să fie asimptote la curba dată de:

$$g(x) = \frac{f^2(x)}{ax^2 + bx + c}.$$

17. Se consideră funcţia $f(x) = \sqrt{x}$ pe intervalul $[100, 104]$. Aplicînd formula creşterilor finite să se arate că:

$$\sqrt{104} - 10 < 0{,}2.$$

18. Fie funcţia $f: R \to R$, dată prin egalitatea:

$$f(x) = \sqrt[m]{\alpha^2 x^m + x^2 + 1} + \sqrt[m]{(1-\alpha)\, x^m - x - 7}$$

unde m este un număr impar mai mare ca 2.

Să se arate că nu există nici o valoare reală a lui α aşa fel încît $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ să fie finită.

★

Se consideră funcţia:

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta - \ln(x+1),$$

şi se cere:

1. Care sînt condiţiile pe care trebuie să le satisfacă parametrii α şi β pentru ca aceasta să admită două extreme.

2. Luînd $\alpha = -1$, $\beta = 1$, să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic această funcţie.

★

1. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} = 2.$$

2. Să se rezolve ecuaţia

$$\log_x^2 6 + \log_{\frac{1}{6}}^2 \frac{1}{x} + \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{6} + \log_{\sqrt{6}} x + \frac{3}{4} = 0.$$

3. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 2x - y - 4z = 6 \\ 2x + my - 4z = 14 \\ nx - y + z = 2 \end{cases}$$

în ajutorul determinanţilor.

4. Să se determine parametrul m şi să se rezolve ecuaţia:

$$2x^3 + mx^2 + 4x + 4 = 0$$

ştiind că are o rădăcină dublă.

5. Se dă ecuaţia:

$$x^2 - 2(m + 1)x + 3m - 1 = 0.$$

Se cere să se calculeze:

$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}\right)^m$, unde x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei date.

6. Să se arate că funcţia:

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

verifică relaţia: $(y'')^2 + y' \cdot y'' = 1$.

★

1. Unui cerc de rază a, i se circumscrie un trapez isoscel $ABCD$ ($BC || AD$) avînd un unghi ascuţit α. Să se calculeze aria trapezului.

2. Se dă un triunghi dreptunghic ABC cu $\hat{A} = 90°$, $AB = 12$ cm şi $AC = 5$ cm. Să se afle lungimile perpendicularelor duse din B şi C pe mediana trasată din A pe ipotenuză.

3. Considerînd că pămîntul este o sferă de rază R, să se calculeze aria zonei cuprinse între paralela 30° şi 60°.

4. Un trunchi de piramidă regulată cu bazele pătrate, de laturi a, b are înălţimea h. Se face o secţiune în acest poliedru printr-un plan paralel cu bazele, dus la distanţă d de baza mare. Să se calculeze latura pătratului de secţiune.

5. Să se demonstreze identitatea:

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a + b + c) +$$
$$= 4 \sin\frac{a + b}{2} \sin\frac{b + c}{2} \sin\frac{c + a}{2}.$$

6. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin^2 a + \sin^2(a + x) + \sin^2(a + 2x) + \sin^2(a + 3x) = 2.$$

★

1. Fie a, b, c, trei semidrepte în acelaşi plan, cu originea comună punctul O (b interioară $\sphericalangle\ AOC$) şi k un număr real diferit de 0.

Pe semidreptele $a, b, c,$ se iau respectiv perechile de puncte (A, A'), (B, B') şi (C, C') astfel încît să avem:

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = k^2.$$

Să se arate că:

a) $A'B' = \dfrac{k^2}{OA \cdot OB} \cdot AB; B'C' = \dfrac{k^2}{OB \cdot OC} \cdot BC; C'A' =$

$$= \frac{K^2}{OC \cdot OA} \cdot CA.$$

b) $\sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle OAB + \sphericalangle OCB$ sau cu $360° - (\sphericalangle OAB + \sphericalangle OCB)$.

Ţinînd seama de 1) şi 2) să se arate că:

c) Dacă $\sphericalangle OAB + \sphericalangle OCB = 180°$, atunci:

$OA \cdot BC + OC \cdot AB = OB \cdot AC$ şi reciproc.

d) Dacă $\sphericalangle OAB + \sphericalangle OCB = 90°$ sau cu $270°$, atunci $OA^2 \cdot BC^2 + OC^2 \cdot AB^2 = OB^2 \cdot AC^2$ şi reciproc.

2. Două cercuri variabile au dreapta centrelor fixă şi sînt tangente exterior într-un punct fix T pe această dreaptă. Să se găsească locurile geometrice ale punctelor de contact ale cercurilor cu tangentele lor comune cînd raportul razelor e constant.

3. Să se găsească locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de două drepte secante d_1 şi d_2.

★

1. Fie polinomul

$$P(x) = \begin{vmatrix} 2x & -2x & 1 \\ 1 - x^2 & x^2 & -1 \\ -2x - \lambda & x + \lambda & x - 2 \end{vmatrix}$$

a) Să se afle λ astfel încît polinomul $P(x)$ să admită o rădăcină dublă întreagă.

b) Dacă $Q(x) = P(x) + 2x^2$ şi x_1, x_2, x_3, sînt rădăcinile ecuaţiei $Q(x) = 0$, să se calculeze:

$$E(\lambda) = \frac{Q(x_2 + x_3)}{x_1} + \frac{Q(x_3 + x_1)}{x_2} + \frac{Q(x_1 + x_2)}{x_3}.$$

2. Se consideră polinomul:

$$P(x) = x^4 + mx^3 + m\sqrt{2x^2} + nx + 1, \text{ unde } m, n \in R.$$

a) Să se determine m şi n astfel ca $P(x)$ să fie divizibil prin $x^2 - x + 1$.

b) În condiţiile de la punctul *a*) să se rezolve ecuaţia $P(x) = 0$ şi să se arate că patrulaterul ale cărui vîrfuri sînt afixele rădăcinilor, este un trapez isoscel.

3. Se dă ecuaţia:

$$\sqrt{1 + \cos x} = m \sin x, \ m \in R \text{ şi se cere:}$$

a) Să se rezolve ecuaţia în cazul $m = 1$;

b) Să se discute soluţiile ecuaţiei în funcţie de m.

★

1. Se consideră şirul:

$$S_n(x) = \frac{x}{1-x} - \frac{x^{2n}}{1-x^{2n}}, \ x \in R \setminus \{-1, 1\}.$$

şi fie $f(x)$ limita şirului $S_n(x)$.

a) Să se arate că:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}, \text{ pentru } |x| < 1 \\ \\ \dfrac{1}{1-x}, \text{ pentru } |x| > 1. \end{cases}$$

b) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiilor f şi g şi să se traseze graficele lor.

2. Se consideră funcţia $f: R \to R$ definită prin:

$f(x) = e^x - ax - 1$, unde a este un parametru real.

a) Să se determine condiţia pentru a astfel ca $f(x)$ să fie strict monotonă pe R.

b) Să se determine asimptotele graficului funcţiei $f(x)$.

c) Pentru $a = 1$ să se determine volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a arcului de grafic cuprins între dreptele $x = 0$ şi $x = 1$.



1) Să se simplifice fracția:

$$\frac{C_n^k - C_{n-2}^{k-1} - C_{n-2}^{k-2}}{C_{n-2}^{k-1}},$$

unde $n \geqslant 3$ și $k \geqslant 2$ sînt numere naturale, iar C_m^n este numărul combinărilor de m obiecte luate cîte n, $m \geqslant n$.

2) Să se găsească toate matricile:

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix},$$

cu $x, y \in R$ care verifică egalitatea $X^2 + X = \frac{1}{4} \cdot I$, unde I este matricea unitate de ordinul al doilea.

3) Se consideră funcția $f: E \to R$, definită de:

$$f(x) = \frac{2x - m}{2x^2 + 2x - (1 + m^2)}$$

unde E este domeniul maxim de definiție, iar m este un parametru real. Să se arate că oricare ar fi m, funcția f nu admite puncte de extrem.

4) Se dă:

$$f_n(x) = \frac{1 + x + x^2 + \ldots + x^n}{1 + x^n}$$

unde $x \in (0, +\infty)$, $n \in N$. Să se traseze graficul funcției $f:(0 + \infty) \setminus \{1\} \to R$, definită prin $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ și să se calculeze integrala:

$$\int_0^1 [f_2(x) - f_1(x)]\, dx$$



1) Fie ecuația:

$x^3 + (2m - 5)x^2 + (9 - 5m)x + 2(m - 3) = 0$, m fiind un parametrul real.

Să se arate că ecuaţia admite o rădăcină x_1 independentă de m şi apoi să se determine m astfel încît să avem:

$$\log_{10}|x_2 - x_3| = \frac{1}{2} \log_{10}(6m + 5)$$

x_2 şi x_3 fiind celelalte rădăcini ale aceleiaşi ecuaţii.

2) Să se determine numerele reale x care verifică inegalitatea:

$$\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_7 \frac{x^2 - 5x}{x + 4}\right) < 0$$

3) Să se găsească punctele de minime şi maxim ale funcţiei:

$$f: R \to R,\ f(x) = \frac{1 + 10x - 4x^2}{2(1 + x^2)} + 4\ln\sqrt{1 + x^2} - 3 \operatorname{arctg} x.$$

4) Fie $f: R \setminus \{-1\} \to R$, $f(x) = x + 4(1 + x)^{-2}$

a) Să se reprezinte graficul funcţiei f.

b) Să se afle aria $S(a)$ a domeniului plan delimitat de graficul lui f şi dreptele $y = x$, $x = 1$, $x = a$, $a > 1$ şi să se calculeze apoi $\lim_{a \to \infty} S(a)$.

★

1. Într-un $\Delta\ ABC$ cu $\hat{B} < 90°$, $\hat{C} < 90°$ se cunosc laturile a, b, c. Pe paralela dusă prin A la BC se consideră punctele D şi E astfel încît B şi D să fie de aceiaşi parte faţă de dreapta AC şi $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$, iar C şi E să fie de aceiaşi parte faţă de dreapta AB şi $\widehat{DCE} = \widehat{ABC}$.

a) Să se calculeze lungimile segmentelor BD şi CE în funcţie de a, b, şi c.

b) Să se afle raportul dintre aria trapezului $BCED$ şi aria triunghiului ABC în funcţie de a, b şi c.

2. Să se calculeze aria laterală şi volumul unui trunchi de conştiind că raza bazei mari a trunchiului este $R\sqrt{3}$ şi că în trunchiul respectiv se poate înscrie o sferă de rază R.

3. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0$$

4. În triunghiul dreptunghic ABC cu $\hat{A} = 90°$ piciorul D al înălţimii din A se proiectează în punctul M pe latura AB şi în punctul N pe latura AC. Să se arate că dreapta MN este tangentă la cercurile de diametru BD şi DC şi că dacă E, F, G sînt respectiv mijloacele segmentelor BD, DC, BC atunci are loc relaţia:

$$8(ME^2 + NF^2) = BC^2 + 4\,DG^2$$



1. Latura CD a patratului $ABCD$ se împarte în trei părţi egale: $DE = EF = FC$. Dreapta AE taie dreapta BC în G. Se notează cu H mijlocul segmentului AG. Să se calculeze lungimile segmentelor CG, AE şi DH în funcţie de $a = CD$.

2. Un con circular drept care are raza bazei R şi înălţimea $h = 2R$ se taie cu un plan paralel cu planul bazei determinînd un trunchi de con de înălţime d.

a) Să se calculeze volumul acestui trunchi de con în funcţie de R şi d.

b) Să se determine d în funcţie de R astfel ca în acest trunchi de con să se poată înscrie o sferă.

3. Să se determine valorile lui x pentru care expresia:

$$E(x) = \frac{\cos 2x}{\sin 2x - \sqrt{2}\cos x}$$

nu are sens (nu este definită). Să se scrie $E(x)$ ca un raport de forma

$\dfrac{a \sin x + b}{\cos x}$ pentru valorile lui x în care $E(x)$ are sens, a şi b

fiind constante reale.

4. Fie S_1, S_2, S_3 trei sfere cu acelaşi centru O şi razele respectiv de r_1, r_2, r_3 date astfel încît $r_2^1 + r_2^2 = r_3^2$. Fie P un punct pe sfera S_3.

a) Să se calculeze, în funcţie de r_1 şi r_2 ariile laterale A_1 şi A_2 ale conurilor cu vîrful în P înscrise în sfera S_3 şi tangente la sferele S_1, respectiv S_2.

b) În cazul cînd $A_1 = A_2\sqrt{3}$ să se calculeze unghiurile pe care le fac generatoarele celor două conuri cu dreapta PO.

26.3. OLIMPIADE INTERNAŢIONALE

1. Să se arate că fracţia $\frac{21n+4}{14n+3}$ este ireductibilă oricare ar fi numărul natural n.

București, 1959 (Polonia)

2. Se dau numerele reale a, b, c şi unghiul x astfel încît:

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

Să se stabilească ce relaţie de gradul al doilea este satisfăcută de a, b, c şi $\cos 2x$. Să se compare relaţia cu cea dată pentru cazul: $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$.

Bucureşti, 1959 (Ungaria)

3. Să se construiască un triunghi dreptunghic dacă se cunoaşte ipotenuza sa c şi dacă mediana corespunzătoare ipotenuzei este media geometrică a catetelor.

Bucureşti, 1959 (Ungaria)

4. Să se determine valorile reale ale variabilei x care verifică inecuaţia:

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9$$

Sinaia, 1960 (Ungaria)

5. În triunghiul dreptunghic ABC ipotenuza este împărţită în n segmente egale (n este un număr impar). Să notăm cu α unghiul sub care se vede din vîrful A unul din cele n segmente egale care conţine mijlocul ipotenuzei.

Să se demonstreze că:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$$ unde h este înălţimea triunghiului.

Sinaia, 1960 (România)

6. Să se construiască triunghiul ABC dacă se cunosc h_a, h_b şi m_a (h_a este înălţimea dusă din A pe latura a, h_b, înălţimea dusă din B pe latura b, şi m_a este mediana laturii a).

Sinaia, 1960 (Ungaria)

7. Se consideră trapezul isoscel avînd bazele a şi b şi înălţimea h.

a) Pe axa de simetrie a trapezului să se construiască un punct P din care laturile neparalelele ale trapezului se văd sub unghiuri drepte.

b) Să se determine distanțele de la acest punct la cele două baze ale trapezului.

c) În ce condiții este posibilă construcția punctului P.

Sinaia, 1960 (Bulgaria)

8. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ xy = z^2. \end{cases}$$

unde a și b sînt două numere reale date. Ce condiții trebuie să verifice a și b astfel încît soluțiile sistemului să fie pozitive și diferite.

Budapesta, 1961 (Ungaria)

9. Se dau lungimile a, b și c ale laturilor unui triunghi oarecare care are aria S.

Să se demonstreze relația:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}.$$

În ce caz are loc egalitatea?

Budapesta, 1961 (Polonia)

10. Să se rezolve ecuația:

$$\cos^n x - \sin^n x = 1$$

unde n este un număr natural.

Budapesta, 1961 (Bulgaria)

11. Să se rezolve ecuația:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

Praga, 1962 (România)

12. Pe circumferința cercului de centru O sînt date trei puncte A, B și C. Să se determine pe circumferință un al patrulea punct D, astfel încît patrulaterul $ABCD$ să poată fi circumscris unui cerc.

Praga, 1962 (Bulgaria)

13. Se dă triunghiul ABC, r = raza cercului circumscris triunghiului, ρ = raza cercului înscris triunghiului. Să se demonstreze că distanța dintre cele două centre ale cercurilor înscris și circumscris triunghiului ABC este:

$$d = \sqrt{r(r - 2\rho)}$$

Praga, 1962 (R.D.G.)

14. Să se găsească rădăcinile reale ale ecuației:

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

unde p este un parametru real.

Varșovia, 1963 (Cehoslovacia).

15. Să se afle toate soluțiile sistemului de ecuații:

$$\begin{aligned} x_5 + x_2 &= yx_1 \\ x_1 + x_3 &= yx_2 \\ x_2 + x_4 &= xx_3 \\ x_3 + x_5 &= yx_4 \\ x_4 + x_1 &= yx_5, \end{aligned}$$

unde y este un parametru.

Varșovia, 1963 (U.R.S.S.)

16. Să se demonstreze că:

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Varșovia, 1963 (R.D.G.)

17. *a*) Să se afle toate numerele n întregi și pozitive pentru care numărul $2^n - 1$ se divide la 7.

b) Să se demonstreze că pentru nici un număr natural n $2^n + 1$ nu se divide cu 7.

Moscova, 1964 (Cehoslovacia).

18. Să notăm cu a, b, c lungimile laturilor unui triunghi oarecare. Să se demonstreze că:

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leqslant 3abc$$

Moscova, 1964 (Ungaria).

19. În triunghiul ABC avînd laturile a, b, c se înscrie un cerc. Se construiesc trei tangente la acest cerc paralele cu laturile a, b, c ale triunghiului ABC și care intersectează două cîte două laturile triunghiului, în cîte două puncte A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2. Se formează trei mari triunghiuri AA_1A_2; BB_1B_2; CC_1C_2. În fiecare din aceste triunghiuri se înscrie cîte un cerc. Să se calculeze suma ariilor celor 4 cercuri înscrise triunghiurilor ABC, AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2.

Moscova, 1964 (Iugoslavia)

20. Să se afle toate numerele reale x aparținînd intervalului $[0,2\pi]$ și care verifică inegalitatea:

$$2\cos x \leqslant \left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right| \leqslant \sqrt{2}.$$

Berlin, 1965 (Iugoslavia)

21. Se consideră sistemul:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

$$a_{31}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

Coeficienții sistemului verifică următoarele condiții:

a) a_{11}, a_{22}, a_{33} sînt pozitive;

b) toți ceilalți coeficienți sînt negativi;

c) în fiecare ecuație suma coeficienților este pozitivă.

Să se demonstreze că $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ este unica soluție a sistemului dat.

Berlin, 1965 (Polonia)

22. Să se afle 4 numere reale x_1, x_2, x_3, x_4 astfel încît suma fiecăruia dintre cele 4 numere cu produsul celorlalte trei să fie egală cu 2.

Berlin, 1965 (U.R.S.S.)

23. Să se demonstreze că dacă laturile a, b, c ale unui triunghi ABC și unghiurile α, β și γ opuse acestor laturi verifică relația:

$$a + b = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a\operatorname{tg}\alpha + b\operatorname{tg}\beta),$$

atunci acest triunghi este echilateral.

Sofia, 1966 (Ungaria)

24. Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x,$$

unde n este un număr natural și $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$ $(k = 0, 1 \ldots n;$ $\lambda \in Z)$.

Sofia, 1966 (Iugoslavia)

25. Să se rezolve sistemul:

$$|a_1 - a_2|\,x_2 + |a_1 - a_3|\,x_3 + |a_1 - a_4|\,x_4 = 1$$

$$|a_2 - a_1|\,x_1 + |a_2 - a_3|\,x_3 + |a_2 - a_4|\,x_4 = 1$$

$$|a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_4|x_4 = 1$$
$$|a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 = 1,$$
unde a_1, a_2, a_3, a_4 sînt numere reale date, diferite între ele.

Sofia, 1966 (Cehoslovacia)

26. Într-un tetraedru dacă o muchie şi numai una are lungimea mai mare decît 1, să se demonstreze că volumul tetraedrului nu este mai mare decît $\frac{1}{8}$.

Belgrad, 1967 (Cehoslovacia).

27. k, m, n sînt numere întregi pozitive şi $m + k + 1$ este un număr prim mai mare decît $n + 1$. Fie $C_s = s(s + 1)$. Să se arate că produsul $(C_{m+1} - C_k)(C_{m+2} - C_k) \ldots (C_{m+n} - C_k)$ se divide cu produsul $C_1 C_2 \ldots C_n$.

Belgrad, 1967 (Anglia)

28. Să se demonstreze că există un singur triunghi care are proprietatea că lungimile celor trei laturi sînt trei numere naturale consecutive, iar unul din unghiuri este de două ori mai mare decît unul din celelalte două.

Leningrad, 1968 (România)

29. Să se găsească toate numerele întregi pozitive x, scrise în baza de numeraţie 10, astfel încît produsul cifrelor sale să fie egal cu $x^2 - 10x - 22$.

Leningrad, 1969 (Cehoslovacia)

30. Fie $[x]$ partea întreagă a numărului real x care este cel mai mare număr întreg, mai mic decît x.

Să se calculeze suma:

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^k}{2^k}\right] + \ldots$$

pentru fiecare număr întreg pozitiv n şi să se demonstreze că formula obţinută este adevărată.

Leningrad, 1968 (Anglia).

31. Să se demonstreze că există o mulţime infinită de numere naturale a care au următoarea proprietate: numărul $z = n^4 + a$ nu este prim, oricare ar fi numărul natural n.

Bucureşti, 1969 (R.D.G.)

32. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ constante reale, x o variabilă reală şi :

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{\cos(a_2 + x)}{2} + \frac{\cos(a_3 + x)}{2^2} + \ldots + \\ + \frac{\cos(a_n + x)}{2^{n-1}}$$

Să se demonstreze că din relaţia $f(x_1) = f(x_2) = 0$ rezultă că $x_1 - x_2 = m\pi$ unde m este un număr întreg.

Bucureşti, 1969 (Ungari)

33. Să se demonstreze că dacă $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ şi $x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2y_2 - z_2^2 > 0$, atunci :

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leqslant \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}.$$

Să se găsească condiţia necesară şi suficientă pentru ca relaţia de mai sus să devină egalitate.

Bucureşti, 1969 (U.R.S.S.)

34. Se dă triunghiul ABC, M un punct situat pe latura AB între punctele A şi B. Fie r_1, r_2 şi r razele cercurilor înscrise triunghiurilor AMC, BMC, ABC ; ρ_1, ρ_2, ρ razele cercurilor exînscrise triunghiurilor AMC, BMC şi ABC.

Să se demonstreze relaţia :

$$\frac{r_1r_2}{\rho_1\rho_2} = \frac{r}{\rho}$$

Budapesta, 1970 (Polonia)

35. În tetraedrul $ABCD$ avem : $DB \perp DC$ şi perpendiculara coborîtă din punctul D pe planul triunghiului ABC, trece prin ortocentrul acestui triunghi. Să se demonstreze relaţia :

$$(AB + BC + AC)^2 \leqslant 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$$

Pentru ce tetraedru are loc egalitatea ?

Budapesta, 1970 (Bulgaria)

36. Fie $a_1, a_2, \ldots a_n$ numere reale care verifică inegalitatea:

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_n) +$$
$$+ (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \ldots (a_2 - a_n) +$$
$$+ \ldots + (a_n - a_1)(a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1}) \geqslant 0.$$

Să se arate că inegalitatea este adevărată pentru $n = 3$ şi $n = 5$ şi nu este adevărată pentru nici un alt număr natural $n (n > 2)$.

Bratislava, 1971 (Ungaria)

37. Să se demonstreze că pentru orice numere întregi şi pozitive m şi n numărul $\frac{(2m)!\ (2n)!}{m!n!(m+n)!}$ este întreg.

Varşovia, 1972 (Anglia)

38. Să se găsească toate soluţiile sistemului de inecuaţii:

$$\begin{cases} (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leqslant 0 \\ (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leqslant 0 \\ (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leqslant 0 \\ (x_4^2 - x_1x_2)(x_5^2 - x_1x_3) \leqslant 0 \\ (x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leqslant 0, \end{cases}$$

unde x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sînt numere reale pozitive.

Varşovia, 1971 (Olanda)

39. Să se afle valoarea minimă a expresiei $a^2 + b^2$ unde a şi b sînt numere reale pentru care ecuaţia:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \text{ are o rădăcină reală.}$$

Moscova, 1972 (Elveţia)

40. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n, numărul:

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} \cdot 2^{3k}$$

se divide la 5.

Berlin, 1973 (România).

Exerciții și probleme propuse de jurii la diferite olimpiade internaționale.

1. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi \sin x}{4 \sin \alpha}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi \cos x}{4 \cos \alpha}\right)>1$$

pentru toate valorile x și α care verifică condiția

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{3}$$

U.R.S.S.

2. Să se afle x dacă:

$$\frac{\sin 3x \cos(60^\circ - 4x) + 1}{\sin(60^\circ - 7x) - \cos(30^\circ + x) + m} = 0,$$

m fiind un parametru real.

România.

3. Cîte soluții reale are ecuația:

$$x = 1964 \sin x - 189?$$

R.D.G.

4. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{p},$$

unde p este un parametru real. Să se afle pentru ce valori reale ale parametrului p, ecuația are soluții reale și cîte?

Ungaria.

5. Să se afle soluțiile reale ale ecuației:

$$\sqrt{x^2+2px-p^2}-\sqrt{x^2-2px-p^2}=1.$$

unde p este un număr real pozitiv.

Cehoslovacia.

6. Să notăm cu S aria unui patrulater convex și a, b, c, d, laturile sale.

Să se demonstreze inegalitatea:

$$S < \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

U.R.S.S.

7. Să se afle toate valorile lui x care verifică inecuația:

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$

pentru orice valoare a lui n.

U.R.S.S.

8. Să se demonstreze că dacă a și b sînt numere reale iar m un număr întreg, atunci:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^m + \left(1+\frac{b}{a}\right)^m > m+1.$$

Polonia.

26.4. PROBLEME PROPUSE PENTRU SELECȚIE LOT R.S.R. OLIMPIADA NAȚIONALĂ iunie 1978

1. Fie un patrulater convex $ABCD$ și A', B' respectiv proiecțiile ortogonale ale punctelor A, B pe DC. Se presupune că $BB' \leqslant AA'$ și că aria $ABCD = \frac{(AB + CD)\, BB'}{2}$. Rezultă sau nu că patrulaterul $ABCD$ este trapez?

Dar dacă se presupune în plus că unghiul $\widehat{BAD}$ este obtuz?

C. Ottescu

2. Se dă o piramidă triunghiulară $SABC$ și pe muchiile SA, SB, SC se iau puncte A', B', C' respectiv astfel încît planele $A'B'C'$ și ABC să se intersecteze după o dreaptă (d).

Să se arate că dacă triunghiul $A'B'C'$ se rotește în spațiu în jurul dreptei (d), atunci dreptele AA', BB', CC' sînt concurente și să se determine locul geometric al punctului de concurență.

C. Teleman

3. Se consideră în spațiu trei drepte D_1, D_2, D_3, necoplanare două cîte două. Prin fiecare punct x_2 al lui D_2 se duce dreapta secantă care intersectează D_1 în punctul x_1 și D_3 în punctul x_3.

a) Alegînd pe dreapta D_2 un punct O_2 și pe dreapta D_3 un punct O_3, să se stabilească relația între abscisele punctelor x_2, x_3 pe dreptele D_2, D_3 relativ la O_2, O_3 respectiv.

b) Să se arate că există patru drepte în spațiu, necoplanare două cîte două și neparalele cu același plan, avînd exact două secante comune. Aceeași problemă pentru o secantă comună și pentru nici o secantă comună.

c) Se consideră patru secante comune F_1, F_2, F_3, F_4 la dreptele D_1, D_2, D_3. Să se arate că F_1, F_2, F_3, F_4 au o infinitate de secante comune.

I. Cuculescu

4. Să se rezolve ecuația $\sin x \sin 2x \ldots \sin nx + \cos x \cos 2x \ldots \cos nx = 1$ ($n \geqslant 1$ natural)

L. Panaitopol

5. Se consideră un triunghi echilateral ABC. Să se determine locul geometric al punctelor M din interiorul triunghiului astfel încît

$$\widehat{MAB} + \widehat{MBC} + \widehat{MCA} = \frac{\pi}{2}$$

L. Panaitopol

6. Să se arate că în mulțimea numerelor de forma $|x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + z\sqrt{5}|$ cu x, y, z întregi, nu toți nuli, există numere nenule oricît de mici. Să se arate de asemenea că pentru orice aproximare $\sqrt{2} \simeq a$, $\sqrt{3} \simeq b$, $\sqrt{5} \simeq c$ prin numere raționale, expresia $|xa + yb + zc|$ se anulează pentru o infinitate de triplete distincte (x, y, z) de numere întregi, dar nu poate lua valori nenule oricît de mici.

H. Pop

7. Pentru o mulțime M pe puncte, oricare trei necoliniare dintr-un plan raportat la un reper se formulează următoarea proprietate (care poate să fie sau nu adevărată):

(P) centrul de greutate al oricărei submulțimi finite a lui M are coordonatele întregi.

Să se arate că:

a) pentru orice $n \geqslant 1$ există o mulțime M avînd proprietatea (P) și cu n elemente.

b) o mulțime M infinită nu poate avea proprietatea (P).

S. Popa

8. Să se rezolve problema următoare, formulînd-o în prealabil în limbaj de teoria mulțimilor:

La o serată sînt invitați băieți și fete. Fiecare băiat cunoaște un anumit număr de fete astfel încît pentru orice mulțime M de băieți, mulțimea fetelor cunoscute de cel puțin un băiat din M este cel puțin la fel de numeroasă ca M. Să se arate că la un dans pe

perechi pot dansa toţi băieţii, fiecare cu cîte o parteneră pe care o cunoaşte.

9. Să se arate că pentru orice număr natural $a \geqslant 3$ există o infinitate de numere naturale $n \geqslant 1$ astfel încît $a^n - 1$ să fie divizibil cu n.
Rămîne proprietatea adevărată pentru $a = 2$? L. Panaitopol

10. O funcţie $f: \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \to R$ definită pe o mulţime finită de numere reale se numeşte aditivă dacă ori de cîte ori $n_1, \ldots, n_k \in Z$ şi $n_1x_1 + \ldots + n_kx_k = 0$, rezultă $n_1f(x_1) + \ldots + n_kf(x_k) = 0$. Să se arate că f fiind dată ca mai sus şi $y_1, \ldots, y_p$ fiind numere reale oarecare, există o funcţie aditivă $F: \{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_p\} \to R$ astfel încît $F(x_i) = f(x_i)$, pentru orice i, $1 \leqslant i \leqslant k$.

R. Gologan

11. Se fixează o mulţime M şi două partiţii $\{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$ şi $\{B_1, B_2, \ldots, B_p\}$ ale ei astfel încît ori de cîte ori $A_i \cap B_j = \emptyset$, $1 \leqslant i, j \leqslant p$, să rezulte $|A_i| + |B_j| \geqslant p$. Să se arate că $|M| > \frac{p^2+1}{2}$; poate avea loc egalitatea?

([ ] este partea întreagă şi |C| este numărul de elemente al mulţimii C).

Dragoş Popescu

12. Într-un plan se consideră o mulţime M avînd n puncte, oricare trei fiind necoliniare. Fiecărui segment cu extremităţile în M i se atribuie unul din numerele $+1$ sau -1, iar un triunghi cu vîrfurile în M este numit negativ dacă produsul numerelor asociate laturilor sale este de -1. Presupunînd că la p din segmente este asociat numărul -1, să se arate că dacă n este par (respectiv impar), atunci numărul triunghiurilor negative este par (respectiv de aceeaşi paritate cu p).

I. Tomescu

13. Fie un triunghi dat; să se determine mulţimea tuturor punctelor M din interiorul triunghiului astfel încît să existe o dreaptă (d) trecînd prin M care să împartă triunghiul în două regiuni, simetrica uneia faţă de (d) fiind inclusă în cealaltă regiune.

M. Bălună, S. Popa

14. Într-o sferă de rază 1 pot fi aşezate 20 de tetraedre regulate de latură 1 astfel încît oricare două dintre ele să nu aibă puncte inferioare comune?

V. Pătrîngenaru

26.5. DIVERSE

● A. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile a, b, c. Sistemul:

$$a^2 x - ay + z = a^3$$

$$b^2 x - by + z = b^3$$

$$c^2 x - cy + z = c^3,$$

$a \neq b, b \neq c$; $c \neq a$ are ca soluție (x, y, z).

Se cere:

1. Să se arate că:

$2y$ reprezintă aria totală a paralelipipedului.

z reprezintă volumul paralelipipedului.

2. Prin diagonala bazei trece un plan care face cu planul baze unghiul u și taie muchia opusă în punctul I.

Să se exprime în funcție de u și de laturile bazei aria secțiunii.

3. Să se determine aria și volumul sferei circumscrise paralelipipedului.

B. Fie polinomul $P(x) = x^3 + 3x^2 - mx + 5$. Se cere:

1. Să se discute natura rădăcinilor ecuației $P(x) = 0$ în funcție de m (m real).

2. Să se rezolve ecuația $P(x) = 0$ în cazul $x_1 = x_2$.

3. Să se determine m astfel încît x_1, x_2, x_3, rădăcinile ecuației $P(x) = 0$, să satisfacă condiția:

$$\operatorname{arc\,tg} x_1 + \operatorname{arc\,tg} x_2 + \operatorname{arc\,tg} x_3 = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{21}.$$

4. Să se traseze curba $y = P(x)$ pentru m obținut la punctul 2.

● Să se rezolve ecuația

$$z^2 - 2(2 + i) z + 6 = 0; \; z \in C.$$

Să se determine modulul și argumentul fiecăreia din rădăcinile sale.

• Se consideră un grup finit de ordinul n, $(n \geqslant 2)$ şi de element neutru e.

a) Să se arate că dacă n este prim, G coincide cu subgrupul monogen generat de un element oarecare al grupului diferit de e.

b) Arătaţi că în cazul general grupul G este un pătrat latin, în sensul că fiecare element al lui G figurează o dată şi o singură dată în fiecare linie sau coloană.

c) Să se construiască o tabelă a grupului pentru $n = 4$.

Soluţii

a) Fie x un element oarecare al grupului altul decît e. Subgrupul generat de x conţine cel puţin două elemente x şi e. Să notăm cu m ordinul grupului. Ordinul său este divizor al unui număr prim n şi prin urmare $m = n$.

Prin urmare subgrupul coincide cu grupul $(H = G)$. Putem scrie:

$G = \{e = x^0; x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$, ceea ce ne arată că grupul G este comutativ.

b) Să considerăm o linie l, a tabelului; ea se scrie:

$$L = \{ax/a \text{ fix}, x \text{ descrie } G\}.$$

Din relaţia: $ax' = ax''$, deducem $x' = x''$, deoarece a este un element regulat. Elementele lui L sînt distincte două cîte două.

Să alcătuim un tabel în care să exemplificăm pentru cazul a trei elemente cum se formează subgrupul:

	a	*b*	*c*
a	*a*	*c*	*b*
b	*c*	*b*	*a*
c	*b*	*a*	*c*

În tabel se arată că G este un pătrat definit pe mulţimea $\{a, b, c\}$ dar care nu posedă element neutru.

c) Să notăm $G = \{e, a, b, c\}$.

Vom începe să alcătuim tabelul cuprinzînd o linie care corespunde lui x $(x \in G)$:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e		
b	b		e	
c	c			e

Vom afla elementele primei coloane care corespunde lui x_1; $x \in G$. Pentru a afla celelalte elemente să observăm că va trebui să plasăm pe diagonala principală, de trei ori elementul e, celelalte trebuind să fie simetrice față de diagonală:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e		e
b	b		e	
c	c	e		e

Dacă notăm cu b un element diferit de 1 și care aparține mulțimii G, avînd proprietatea că coincide cu inversul său atunci din aceste cazuri nu se pot deduce decît două posibilități ilustrate de tabelele de mai jos:

a)

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

b)

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

Lăsăm în seama cititorului să verifice cele două legi de compoziție definite prin tabelele de mai sus.

Observație

Dacă notăm cu $e = \bar{0}$, $a = \bar{1}$; $b = \bar{2}$; $c = \bar{3}$ atunci tabela b este tabela grupului aditiv modulo 4, și tabela a tabela grupului lui Klein.

● Se consideră mulțimea $R^* = R - \{0\}$. Să se arate că legea

de compoziţie $*$ determinată prin relaţia : $(x, y)*(x', y') = \left(xx'; \frac{y'}{x} + x'y\right)$ determină pe $R^* \times R$ o structură de grup.

Demonstraţie

Se observă că legea de compoziţie este internă şi necomutativă.

Asociativitatea

$$\underbrace{[(x, y)*(x', y')]}_{(u,\, v)}*(x'', y'') = (u, v)*(x'', y'') = \left(ux'', \frac{y''}{u} + x''v\right)$$

$$(u, v) = (x, y)*(x', y') = \left(xx', \frac{y}{x} + x'y\right)$$

$$[(x, y)*(x', y')] * (x'', y'') = \left(xx'x'', \frac{y''}{xx'} + x''\left(\frac{y'}{x} + x'y\right)\right) =$$

$$= \left(xx'x''; \frac{y''}{xx'} \frac{x''y' + xx'x''y}{x}\right) = \left(xx'x''; \frac{y'' + x''y' + xx'x''y}{xx'}\right).$$

$$(x, y)*[(x'y')*(x'', y'')] = (x, y)*(z, t) = \left(xz, \frac{t}{x} + zy\right)$$

$$(z, t) = (x', y')*(x'', y'') = \left(x'x''; \frac{y''}{x'} + x''y'\right)$$

$$(x, y) * [(x', y)*(x''', y''')] = \left(xx'x''; \frac{y''}{x'''} + \frac{x''y' + xx'x''y}{x}\right)$$

Legea este asociativă.
Element neutru

Pentru orice element $(x, y) \in R^* \times R$ avem :

$$(1, 0)*(x, y) = (x, y)*(1, 0) = (x, y).$$

Simetricul unui element

Pentru orice element $(x, y) \in R^* \times R$ avem:

$$(x, y) * \left(\frac{1}{x}, -y\right) = \left(\frac{1}{x}, -y\right) * (x, y) = (1, 0).$$

● Se consideră grupul G, și să notăm:

$$C = \{cG/(\forall x \in G), xc = cx\}.$$

Să se arate că mulțimea C este un subgrup a lui G.
Dacă G este un grup vom avea:

$$(ax)^{-1} = x^{-1}\ a^{-1}, \text{ deoarece } (x^{-1}\ a^{-1})(ax) = x^{-1}(a^{-1} \cdot a)x =$$
$$= x^{-1}\ ex = x^{-1}\ x = e.$$

Fie: a și a' două elemente ale mulțimii C. Dacă $x \in G$ și dacă $a' \in C$, vom avea evident relația:

$$xa'a^{-1} = a'xa^{-1} = a'(ax^{-1})^{-1}.$$

Pentru $a \in C$ avem:

$$xa'a^{-1} = a'(x^{-1}a)^{-1} = a'a^{-1}x.$$

Prin urmare pentru orice element a și $a' \in C$ avem relația $a'a^{-1} \in C$, ceea ce permite să afirmăm că C este un subgrup a lui G.

● Să considerăm grupul G, în care avem o aplicație h definită în felul următor:

Pentru orice element $a \in G$ aplicația h este definită prin relația:

$$f_a(x) = axa^{-1}.$$

Să se arate că f_a este un izomorfism a grupului G pe el însuși, adică un automorfism interior lui G.

Soluție

Din relația $y = axa^{-1}$ se obține: $x = a^{-1}ya$ și reciproc, sau $y = axa^{-1} \Leftrightarrow x = a^{-1}ya$

Orice element y al lui G este deci imaginea prin f_a a unui singur x din G. Prin urmare f_a este o aplicație bijectivă a lui G pe G.

Avem:

$$f_a(xx') = axx'a^{-1} = (axa^{-1})(ax'a^{-1}) = f_a(x) \cdot f_a(x').$$

Rezultă că aplicația f_a este homomorfism de grup.

● Să se arate că în R, legea de compoziție internă: $x*y = x + y - xy$ este comutativă și asociativă și admite un element neutru. Să se cerceteze dacă această lege formează un grup.

Să se calculeze : $\underbrace{x*x*x*x* \ldots *x}_{n\text{-ori}}$

Soluție :

Comutativitatea :

$$x*y = x + y - xy = y + x - yx = y*x$$

Asociativitatea :

$x * (y * z) = x * u = x + u - xu;$

$u = y * z = y + z - yz.$

$x * (y * z) = x + y + z - yz - x(y + z - yz) =$

$= x + y + z - yz - xy - xz + xyz.$

$\underbrace{(x * y)}_{\downarrow} * z = v * z = v + z - vz.$

$v = x * y = x + y - xy;$ $\underline{(x * y) * z} = x + y - xy + z -$

$- z(x + y - xy) =$

$= \underline{x + y + z - xy - zx - zy + xyz}.$

Prin urmare $x * (y * z) = (x * y) * z.$

Element neutru

$\forall x;\ x * e = x \Rightarrow x + e + ex = x \Rightarrow e(1 + x) = 0 \Rightarrow e = 0,$

$x * 0 = x.$

Element simetric

Numărul real 1 nu are simetrie deoarece : $(\forall x \in R)\ x * 1 = 1 \neq 0.$

Legea de compoziție nu formează grup.

2) Vom calcula produsul $\underbrace{x * x * x \ldots}_{n\text{-ori}}$ inductiv :

$x * x = x + x - x^2 = 2x - x^2 = 1 - (1 - 2x + x^2) = 1 - (1 - x)^2.$

$x * x * x = x * (x * x) = x*[1 - (1 - x)^2] = x + [1 - (1 - x)^2] - x[1 - (1 - x)^2] = x + 1 - (1 - x)^2 - x + x(1 - x)^2 = x + 1 - (1 - x)^2(1 + x) - x = 1 - (1 - x)^3$

Utilizînd un raţionament prin recurenţă se deduce relaţia :

$$\underbrace{x * x * x * \ldots * x}_{n\text{-ori}} = 1 - (1 - x)^n.$$

● Un grup G se numeşte involutiv dacă $\forall x \in G$, $x^2 = e$. Să se arate că dacă un grup este involutiv el este comutativ.

Demonstraţie

Dacă x şi y sînt două elemente oarecare ale lui G, atunci avem :

$$(yx)(xy) = y(xx)y = y \cdot e \cdot y = (ye)y = y \cdot y = e.$$

Să notăm cu $z = yx$. Deducem $z \in G$ şi prin urmare avem :

$$z * z = e \Rightarrow (yx)(yx) = e.$$

Din egalitate : $(yx)(xy) = (yx)(yx)$ deducem : $xy = yx$.
Prin urmare grupul este comutativ.

● Să se arate că dacă într-un grup G avem relaţia : $\forall (x, y)$ $(xy)^2 = x^2y^2$, atunci grupul este comutativ.

Demonstraţie

$$(xy)^2 = (xy)(xy) = xyxy.$$

Din enunţ rezultă că : $xy \cdot xy = xx\, yy$.
Dacă înmulţim ambii membrii ai acestei egalităţi la dreapta cu y^{-1} şi la stînga cu x^{-1}, atunci obţinem :

$$x^{-1}(xy\, xy)y^{-1} = x^{-1}(xxyy)y^{-1} \text{ sau } (x^{-1}\, x)(yx)(yy^{-1}) = (x^{-1}\, x)$$

$$(xy)(yy^{-1}) \Rightarrow e(xy)e = e(xy)e \Rightarrow yx = xy.$$

● În mulţimea R se consideră două legi de compoziţie, definite astfel :

$$\forall (a, b) \in R,\ a * b = k \cdot a \cdot b;\ a \top b = a + k \cdot b (k \neq 0; 1)$$

a) Să se studieze comutativitatea şi asociativitatea acestor legi.

b) Să se arate că prima lege de compoziţie este distributivă faţă de cea de a doua lege.

Soluție

$\forall(a, b)\ a*b = k \cdot a \cdot b;\ a \top b = a + kb\ (k \neq 0, 1)$

Vom studia separat comutativitatea și asociativitatea fiecărei legi.

a) $a * b = k \cdot a \cdot b = k \cdot b \cdot a = b * a.$

Să notăm :

$$a * b = x;\ x = kab$$

$$b * c = y;\ y = kbc.$$

Avem :

$$(a * b) * c = x * c = kxc = k(kab) \cdot c = k^2abc,$$

$$a * (b * c) = a * y = kay = ka(k \cdot bc) = k^2abc.$$

Prin urmare :

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Prima lege de compoziție este asociativă și comutativă.

b) $a \top b = a + kb;\ b \top a = b + ka;\ a \top b \neq b \top a.$

Prin urmare această lege de compoziție nu este comutativă. Să notăm :

$$a \top b = x;\ x = a + kb;\ b \top c = y;\ y = b + kc.$$

Avem :

$$(a \top b) \top c = x \top c = x + kc = a + kb + kc.$$

$$a \top (b \top c) = a \top y = a + ky = a + k(b + kc).$$

Prin urmare :

$$(a \top b) \top c \neq a \top (b \top c).$$

Cea de a doua lege nu este nici comutativă nici asociativă. Să notăm :

$$b \top c = x;\ x = b + kc.$$

$$a * (b \top c) = a * x = kax = ka(b + kc).$$

Fie:

$$a * b = z;\ z = kab \text{ şi } a * c = y;\ y = kac$$

$$(a * b) \top (a * c) = z \top y = z + ky = kab + k(kac) =$$
$$= ka(b + kc).$$

Prin urmare:

$$a * (b \top c) = (a * b) \top (a * c).$$

● Se dă un grup multiplicativ G, astfel încît:

$$\forall a \in G;\ \forall b \in G;\ (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2.$$

Să se arate că acest grup este abelian.

Soluţie

Avem: $(a \cdot b)^2 = (a \cdot b)\cdot(a \cdot b)$.

Deoarece G formează un grup avem:

$$(a \cdot b)^2 = (a \cdot b)\cdot(a \cdot b) = a \cdot (b \cdot a)\cdot b = a^2\cdot b^2 =$$
$$= (a \cdot a)\cdot(b \cdot b) = a\cdot(a \cdot b)\cdot b.$$

Prin urmare avem egalitatea:

$a\cdot(b \cdot a)\cdot b = a\cdot(a \cdot b)\cdot b$ de unde rezultă:

$$b \cdot a = a \cdot b$$

● În mulţimea numerelor reale R se defineşte operaţia $\top$ astfel:

$$(m, n) \top (m', n') = (mm', mn' + n).$$

Să se demonstreze existenţa şi unicitatea elementului neutru şi că pentru $m \neq 0$, (m, n) admite un element simetric unic.

Soluţie

1) Să presupunem că există un element neutru pe care-l notăm cu (e, e') şi avem:

$$(m, n) \top (e, e') = (me, me' + n) = (m, n).$$

Din această relaţie obţinem:

$(me, me' + n) = (m, n)$ sau $me = m$; $me' + n = n$; deci $e = 1$, $e' = 0$.

Prin urmare legea de compoziție admite un element neutru (1, 0).

2) $(m, n) \top (m^{-1}, n^{-1}) = (mm^{-1}, mn^{-1} + n) = (1, 0)$,

sau : $mm^{-1} = 1, \; mn^{-1} + n = 0.$

$$m^{-1} = \frac{1}{m}; \; n^{-1} = -\frac{n}{m}.$$

Prin urmare elementul simetric (m^{-1}, n^{-1}) este $\left(\frac{1}{m}; -\frac{n}{m}\right)$.

● În mulțimea R se definește operația $*$ astfel :

$$a * b = a - b + \frac{a}{b}; \; b \neq 0,$$

Se notează cu x_1, soluția ecuației $x * a = 0$ și cu x_2 soluția ecuației $x * a = 1$. Să se arate că $x_1 * x_2 = 0$.

Soluție

$$x_1 * a = 0 \Leftrightarrow x_1 - a + \frac{x_1}{a} = 0 \Leftrightarrow ax_1 - a^2 + x_1 =$$

$$= 0 \Leftrightarrow x_1(a + 1) - a^2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{a^2}{a + 1}.$$

$$x_2 * a = 1 \Leftrightarrow x_2 - a + \frac{x_2}{a} = 1 \Leftrightarrow ax_2 - a^2 + x_2 =$$

$$= a \Leftrightarrow x_2(a + 1) = a(a + 1) \Leftrightarrow x_2 = a, \; (a \neq -1).$$

$$x_1 * x_2 = x_1 - x_2 + \frac{x_1}{x_2} \Leftrightarrow x_1 * x_2 = \frac{a^2}{a + 1} - a +$$

$$+ \frac{\frac{a^2}{a + 1}}{a} = \frac{a^2}{a + 1} - a + \frac{a^2}{a^2 + a} = \frac{a^2}{a + 1} - a +$$

$$+ \frac{a}{a + 1} = \frac{a^2 - a^2 - a + a}{a + 1} = 0.$$

● Să se arate că funcţiile : $f_1(x) = x$; $f_2(x) = -x$; $f_3(x) = \frac{1}{x}$; $f_4(x) = -\frac{1}{x}$, formează grup pentru operaţia : $f_j(x) \perp f_i(x) = f_j[f_i(x)]$

Soluţie

$$f_1(x) \perp f_2(x) = f_2(x) \perp f_1(x) = -x = f_2(x)$$

$$f_1(x) \perp f_3(x) = f_3(x) \perp f_1(x) = \frac{1}{x} = f_3(x)$$

$$f_1(x) \perp f_4(x) = f_4(x) \perp f_1(x) = -\frac{1}{x} = f_4(x)$$

$$f_2(x) \perp f_3(x) = f_3(x) \perp f_2(x) = -\frac{1}{x} = f_4(x)$$

$$f_2(x) \perp f_4(x) = f_4(x) \perp f_2(x) = \frac{1}{x} = f_3(x)$$

$$f_3(x) \perp f_4(x) = f_4(x) \perp f_3(x) = -x = f_2(x).$$

Compunerea elementelor poate fi redată sub forma următorului tabel :

	f	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

$$f_2(x) \perp f_2(x) = f_1(x)$$

$$f_3(x) \perp f_3(x) = f_1(x)$$

$$f_4(x) \perp f_4(x) = f_1(x).$$

Prin urmare :

$$f_2^{-1}(x) = f_2(x)\,;\ f_3^{-1}(x) = f_3(x)$$

$$f_4^{-1}(x) = f_4(x)\,;\ f_1^{-1}(x) = f_1(x)$$

Mulţimea $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ formează un grup comutativ faţă de operaţia notată deoarece:

1) $f_i(x) \perp f_j(x) = f_j(x) \perp f_i(x)$ (comutativă)

2) $(f_i(x) \perp f_j(x) \perp f_k(x) = f_i(x) \perp (f_j(x) \perp f_k(x))$.

$i \neq j \neq k$ (asociativă)

3) $f_1(x) \perp f_i(x) = f_i(x)$ pentru orice $i \neq 1$, admite un element neutru $f_1(x)$.

4) $f_i(x) \perp f_i(x) = f_1(x)$. Orice element $f_i(x)$ admite un element invers egal cu el însuşi.

● În mulţimea G a cuplurilor ordonate (a, b) cu $a \neq 0$ şi pentru care avem:

$$a \neq 0;\ (a, b) = (a', b') \Rightarrow a = a';\ b = b'$$

se consideră următoarea lege de compoziţie:

$$(a, b) * (a', b') = (aa', ba' + b').$$

Să se arate că G formează grup.

Soluţie

1) Să notăm elementul neutru cu (e, e') şi avem:

$(a, b) * (e, e') = (ae, be + e') = (a, b)$, de unde rezultă:

$$ae = a;\ be + e' = b, \text{ sau } e = 1,\ e' = 0.$$

Prin urmare elementul neutru este $(1, 0)$.
2) Să notăm:

$$(a, b) * (c, d) = (x, y) = (ac, bc + d)$$

$$(c, d) * (e, f) = (z, w) = (ce, de + f).$$

Avem:

$$((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (x, y) * (e, f) = (xe, ye + f) =$$

$$= (ace,\ bce + de + f).$$

$$(a, b) * ((c, d) * (e, f)) = (a, b) * (z, w) = (az, bz + w) =$$

$$= (ace, bce + de + f), \text{ sau :}$$

$$((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (a, b) * ((c, d) * (e, f)).$$

Legea de compoziție este asociativă.

3) $(a, b) * (a^{-1}, b^{-1}) = (1, 0)$, sau :

$$(aa^{-1}, ba^{-1} + b^{-1}) = (1\ , 0)$$

$$aa^{-1} = 1, \; ba^{-1} + b^{-1} = 0$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}\ ; \ \frac{b}{a} + b^{-1} = 0 \Rightarrow b^{-1} = -\frac{b}{a}.$$

Prin urmare :

$$(a^{-1}, b^{-1}) = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right).$$

Orice element admite un simetric.

● Fie I mulțimea numerelor întregi $a \in I$, $b \in I$, $a' \in I$ și $b' \in I$. Fie operația $*$ definită în felul următor :

$$(a, b) * (a', b') = (aa' + 2bb', ab' + ba').$$

Să se demonstreze că legea este asociativă și comutativă și că admite element neutru.

Soluție

1) $(a, b) * (a', b') = (aa' + 2bb', ab' + ba').$

$$(a', b') * (a, b) = (aa' + 2bb', a'b + b'a)$$

Prin urmare :

$$(a, b) * (a', b') = (a', b') * (a, b).$$

Legea este comutativă.

2) Să notăm :

$$(a, b)*(c, d) = (ac + 2bd, ad + bc) = (x, y)$$

$$(c, d) * (e, f) = (ce + 2df, cf + de) = (z, w).$$

Avem :

$$(a, b) * ((c, d) * (e, f)) = (a, b) * (z, w) = (az + 2bw,\ aw + bz) =$$
$$= (ace + 2adf + 2bcf + 2bde, acf + ade + bce + 2bdf)$$

$$((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (x, y) * (e, f) = (xe + 2yf, xf + ye) =$$

$$= (ace + 2bde + 2adf + 2bcf; acf + 2bdf + ade + bce).$$

Prin urmare :

$$(ab) * ((c, d) * (e, f)) = ((a, b) * (c, d)) * (e, f).$$

Legea de compoziție este asociativă.

3) Să presupunem că legea de compoziție dată admite elementul neutru (e, e').

Avem : $(a, b) * (e, e') = (a, b)$ sau

$$(ae + be', ae' + be) = (a, b).$$

De unde rezultă că : $ae + be' = a$; $ae' + be = b$.

$$\begin{cases} ae + be' = a \\ be + a\,e' = b \end{cases} \begin{vmatrix} -\,b \\ a \end{vmatrix}$$

$$-\,abe - b^2e' = -\,ab$$
$$abe + a^2e' = ab$$

$$e'(b^2 - a^2) = 0 \Rightarrow e' = 0,\ e = 1$$

Prin urmare legea de compoziție dată admite elementul neutru (1,0).

● Dacă elementele $a, b,$ ale unui grup necomutativ verifică relația :

$$a^{-1}\,b\,a = b^{-1};\quad b^{-1}\,a\,b = a^{-1},\ \text{atunci :}$$

$$a^2b^2 = b^2a^2 = e;\ a^2 = b^2 \ \text{și}\ a^4 = b^4 = e.$$

Soluție

Din relațiile $a^{-1}ba = b^{-1}$ și $b^{-1}ab = a^{-1}$ deducem:

$a(a^{-1}ba) = ab^{-1}$; $ba = ab^{-1}$; $b(ba) = bab^{-1}$;

$b^2a = bab^{-1}$; $(b^2a)a = (bab^{-1})a$; $b^2a^2 = bab^{-1}a$;

$a^2b = aba^{-1}$; $a^2bb = aba^{-1}b$; $a^2b^2 = aba^{-1}b$;

$b^2a^2b = ba(b^{-1}ab)$; $b^2a^2b = b(aa^{-1}) = b$; $b^2a^2 = e$;

$a^2b^2a = ab(a^{-1}ba)$; $a^2b^2a = a(bb^{-1})$; $a^2b^2 = e$.

Prin urmare avem: $b^2a^2 = a^2b^2 = e$.

Se urmează în linii mari același procedeu pentru a arăta că $a^2 = b^2$.

Din relația $a^2 = b^2$ deducem:

$$a^2a^2 = a^2b^2 = e \Leftrightarrow a^4 = e;$$

$$a^2b^2 = b^2b^2 = e \Leftrightarrow b^4 = e.$$

Prin urmare $a^4 = b^4 = e$.

- În mulțimea R se consideră operația $*$ definită astfel:

$$m * n = \frac{m}{n - m} + n \ (n \neq m).$$

Să se rezolve sistemul:

$$(x + by) * a = 0;\ (ax - y) * b = 0$$

Soluție

Să notăm $x + by = z$; $ax - y = w$

$$z * a = 0;\ w * b = 0 \text{ sau:}$$

$$\frac{z}{a - z} + a = 0;\ \frac{w}{b - w} + b = 0.$$

Din aceste relații deducem:

$z + a^2 - az = 0$; $w + b^2 - bw = 0$

$$z(1 - a) = a^2;\ w(1 - b) = -b^2$$

$$z = \frac{a^2}{a - 1};\ w = \frac{b^2}{b - 1}$$

$$\begin{cases} x + by = \dfrac{a^2}{a-1} & \Big| -a \\ ax - y = \dfrac{b^2}{b-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -ax - aby = \dfrac{-a^3}{a-1} \\ ax - y = \dfrac{b^2}{b-1} \end{cases}$$

$$-y(ab+1) = -\frac{a^3}{a-1} + \frac{b^2}{b-1}$$

$$y(ab+1) = \frac{a^3}{a-1} - \frac{b^2}{b-1}$$

$$y(ab+1) = \frac{a^3b - a^3 - b^2a + b^2}{(a-1)(b-1)} =$$

$$= \frac{a^3(b-1) - b^2(e-1)}{(a-1)(b-1)}$$

$$y = \frac{a^3(b-1) - b^2(a-1)}{(a-1)(b-1)(ab+1)}$$

$$\begin{cases} x + by = \dfrac{a^2}{a-1} & \Big| \\ ax - y = \dfrac{b^2}{b-1} & \Big| \; b \end{cases} \qquad \begin{aligned} x + by &= \frac{a^2}{a-1} \\ ax - by &= \frac{b^3}{b-1} \end{aligned}$$

$$x(a+1) = \frac{a^2}{a-1} + \frac{b^3}{b-1}$$

$$x(a+1) = \frac{a^2b - a^2 + b^3(a-1)}{(a-1)(b-1)} = \frac{a^2(b-1) + b^3(a-1)}{(a-1)(b-1)}$$

$$x = \frac{a^2(b-1) + b^3(a-1)}{(a-1)(a+1)(b-1)}.$$

• O urnă conţine cinci sfere numerotate de la 1 la 5. Se extrag în acelaşi timp două sfere din această urnă şi se admite că tragerile sînt echiprobabile; cu fiecare eventualitate vom asocia cel mai mic număr înscris pe cele două sfere (exemplu tragerilor 4, 5 vom asocia 4). Vom defini astfel o variabilă aleatoare X.

a) Determinaţi legea de probabilitate a lui X;

b) Determinaţi valoarea medie $\overline{X}$;

c) Determinaţi dispersia.

(Bacalaureat Orleans — Tours, 1975)

Preliminare. Mulţimea Ω a evenimentelor elementare este mulţimea.
$\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$ deci elementele sînt zece perechi (x, y) astfel ca $x < y$ cu $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ şi $y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Toate aceste evenimente sînt echiprobabile, fiecare avînd probabilitate $\frac{1}{10}$.

Vom avea: $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ şi vom observa că

$$P\{x = k\} = P(k, k+1) + P(k, k+2) + \ldots + P(k, 5) = \frac{5-k}{10}.$$

Legea de probabilitate a lui x este dată de relaţia:

k	1	2	3	4
$P(x = k)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$E(x) = \sum_{k=1}^{k=4} kP(x = k) = \frac{1}{10}(1 \times 4 + 2 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \times 1) =$$

$$= \frac{5 + 6 + 6 + 4}{10} = \frac{20}{10} = 2.$$

Vom avea:

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

şi

$$E(x^2) = \sum_{k=1}^{k=4} k^2 P(x = k) = \frac{1}{10}(1 \times 4 + 4 \times 3 + 9 \times 2 + 16 \times 1) =$$

$$= \frac{4 + 12 + 18 + 16}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

De unde, în consecință

$$V(x) = 5 - 4 = 1.$$

● Fie f și g funcții numerice de variabilă reală x, astfel ca:

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-1} \text{ și } g(x) = 5x^2 - 3x + 1.$$

a) Arătați că f este o bijecție a lui $R - \{1\}$ pe $R - \{3\}$.

b) Determinați funcția compusă $g \circ f$;

c) Calculați derivatele f' și g';

d) Calculați funcția derivabilă $(g \circ f)'$ în următoarele două moduri:

— utilizînd rezultatul punctului *b*;

— utilizînd teorema de derivare a unei funcții compuse și rezultatele punctului *c*.

(Bacalaureat Poitiers, 1975)

Soluție.

Un număr real $x \in R - \{1\}$ are ca imagine prin f numărul $y \in R - \{3\}$, dat prin:

$$f(x) = y = \frac{3x+1}{x-1} = \frac{3(x-1)+4}{x-1} = 3 + \frac{4}{x-1}$$

deci $y \neq 3$, pentru că $\frac{4}{x-1} \neq 0$ și orice număr real $y \in R - \{3\}$ are în $R - \{1\}$ un antecedent x prin f și unul singur dat prin ecuația:

$$3 + \frac{4}{x-1} = y \Leftrightarrow \frac{4}{x-1} = y - 3 \Leftrightarrow x - 1 =$$

$$= \frac{4}{y-3} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{4}{y-3} \quad \left(x \neq 1, \text{pentru că } \frac{4}{y-3} \neq 0\right).$$

Funcția f este deci o bijecție a lui $R - \{1\}$ pe $R - \{3\}$.
Observație: Funcția reciprocă f^{-1} este definită prin:

$$x \mapsto f^{-1}(x) = 1 + \frac{4}{x-3} = \frac{x+1}{x-3}$$

Funcţia g este definită pe R; funcţia f este definită pe $R-\{1\}$; funcţia $g \circ f$ este definită pe $R - \{1\}$, domeniu pe care vom avea:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = 5\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)^2 - 3\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) + 1 =$$

$$= \frac{5(3x+1)^2 - 3(3x+1)(x-1) + (x-1)^2}{(x-1)^2}$$

sau, făcînd toate reducerile:

$$(g \circ f)(x) = \frac{37x^2 + 34x + 9}{(x-1)^2} \tag{1}$$

Observaţie: Dacă vom pune $x = 1 + u$, avem:

$$\frac{37x^2 + 34x + 9}{(x-1)^2} = \frac{37(1+u)^2 + 34(1+u)^2 + 9}{u^2} =$$

$$= \frac{37u^2 + 108u + 80}{u^2} = 37 + \frac{108}{u} + \frac{80}{u^2};$$

$$(g \circ f)(x) = 37 + \frac{108}{x-1} + \frac{80}{(x-1)^2} \tag{2}$$

Vom avea:

$$\forall x \in R - \{1\};\ f'(x) = -\frac{4}{(x-1)^2}$$

şi

$$\forall x \in R;\ g'(x) = 10x - 3.$$

Calculul $(g \circ f)'(x)$ utilizînd rezultatele de la (2). Dacă vom pune $(g \circ f)(x)$ sub forma (2) avem pentru $x \in R - \{1\}$.

$$(g \circ f)'(x) = -\frac{108}{(x-1)^2} - \frac{2 \cdot 80(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{-4}{(x-1)^3}[27(x-1) + 40] = \frac{-4(27x+13)}{(x-1)^3}$$

Calculul $(g \circ f)'(x)$ utilizînd teorema de derivare a unei funcţii compuse.
Derivata funcţiei $g \circ f$ este funcţia

$$(g \circ f) = (g' \circ f) \times f',$$

avînd domeniul de definiţie $R - \{1\}$.

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \times f'(x) = g'[f(x)] \times f'(x)$$

şi cum, ţinînd cont de c)

$$g'[f(x)] = g'\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) = 10\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) - 3 =$$

$$= \frac{10(3x+1) - 3(x-1)}{x-1} = \frac{27x+13}{x-1}$$

şi $f'(x) = -\dfrac{4}{(x-1)^2}$,

Vom avea în final:

$$(g \circ f)'(x) = \frac{27x+13}{x-1} \cdot \left[\frac{-4.}{(x-1)^2}\right] = -\frac{4(27x+13)}{(x-1)^3}$$

Vom regăsi, evident, rezultatul precedent.

● La orice element al unui grup G se asociază o aplicaţie f_a a lui G în G, definită astfel:

$$f_a(x) = axa^{-1}$$

a) Să se arate că f_a este un izomorfism al grupului G pe el însuşi (f_a este un automorfism interior al lui G).

b) Să se arate că mulţimea E a automorfismelor interioare a lui G, înzestrată cu legea $\circ$, formează un grup izomorf cu grupul cît al lui G.

Soluţie.

a) $(y = axa^{-1}) \Leftrightarrow (x = a^{-1}ya)$.

Orice element y a lui G este o imagine prin f_a a unui singur element al lui G. Prin urmare f_a este o bijecție a lui G pe G. În plus, avem relațiile:

$$f_a(xx') = axx'a^{-1} = (axa^{-1})(ax'a^{-1}) = f_a(x)\, f_a(x').$$

Bijecția f_a este deci un omomorfism de grupuri.

b) a și b fiind două elemente oarecare ale lui G, $f_a \circ f_b$ este definită prin relația:

$$x \to a(bxb^{-1})a^{-1}, \text{ sau } (ab)x(ab)^{-1}.$$

Prin urmare aplicația $a \to f_a$ este deci un omomorfism f, surjectiv față de legea de compoziție a grupului pe z și față de legea $\circ$.

Rezultă că legea $\circ$ este o lege de compoziție a unui grup pe G.

Grupul E este izomorf grupului $G/Ker\, f$, sau:

$$(a \in Ker\, f) \Leftrightarrow (\forall x \in G)\ axa^{-1} = x \text{ sau } ax = xa.$$

● Se consideră două grupuri G și G' notate multiplicativ și punem:

$$(a, a') * (b, b') = (ab, a'b')$$

Să se arate că mulțimea $G \times G'$ înzestrată cu legea $*$ este un grup.

Soluție.

$$[(a, a') * (b, b')] \times (c, c') \text{ și } (a,a') * [(b, b') * (c, c')]$$

sînt egale cu $(abc, a'b'c')$. Legea $*$ admite elementul neutru (e, e') unde e și e' sînt elementele neutre ale grupurilor G și G'. Elementul (a, a') a lui $G \times G'$, admite $(a^{-1}, (a')^{-1})$ ca simetric în $*$, unde a^{-1} și $(a')^{-1}$ sînt simetricele elementelor a și a' în G și G'.

● În inelul $Z/6Z = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \bar{5}x + \bar{2}y = a \\ \bar{2}x + \bar{4}y = b \end{cases}$$

Dacă k este un element inversabil și k' un element oarecare al inelului cele trei sisteme:

$$S\begin{cases} A = \bar{0} \\ B = \bar{0} \end{cases} \qquad S'\begin{cases} B + KA = \bar{0} \\ B = \bar{0} \end{cases} \qquad S''\begin{cases} B + KA = \bar{0} \\ B + K'(B + KA) = \bar{0}, \end{cases}$$

admit aceeaşi soluţie.

Soluţie.

Utilizînd $k = \bar{1}$ şi $k' = \bar{4}$, se obţine aici:

$$(S')\begin{cases} x = a + b \\ \bar{2}x + \bar{4}y = b \end{cases} \qquad (S'')\begin{cases} x = a + b \\ \bar{4}y = \bar{4}a + \bar{5}b. \end{cases} \qquad (1)$$

Pentru a rezolva sistemul S'', vom începe cu ecuaţia (1). Dificultatea constă în faptul că $\bar{4}$ nu este element inversabil al inelului, dar este un divizor a lui $\bar{0}$ ($\bar{4} \cdot \bar{3} = \bar{0}$). De unde rezultă: $\bar{3} \cdot \bar{4}y = \bar{3} \cdot \bar{4}a + \bar{3} \cdot 5b$, unde $\bar{3}b = \bar{0}$.

1) b este egal cu $\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}$. Sistemul nu admite soluţii.

2) $b = \bar{0}$. Aici ecuaţia (1) se scrie:

$\bar{4}(y - a) = \bar{0}$ şi admite soluţiile $y = a$ şi $y = a + \bar{3}$.

(S) admite două soluţii:

$$\begin{cases} x = a \\ y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a \\ y = a + \bar{3} \end{cases}$$

3) $b = 2$. Avem $\bar{4}(y - a - \bar{1}) = 0$.
Se admit soluţiile:

$$\begin{matrix} x = a + \bar{2} \\ y = a + 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x = a + \bar{2} \\ y = a + \bar{4} \end{matrix}$$

4) $b = \bar{4}$ şi avem: $\bar{4}(y - a + \bar{1}) = \bar{0}$
Sistemul (S) admite soluţiile:

$$\begin{cases} x = a + \bar{4} \\ y = a + \bar{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a + \bar{4} \\ y = a + \bar{2}. \end{cases}$$

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

PARTEA I

Cap. 1. Mulțimi

1) $\{m; a\}$; 2) $\{t; a\}$; 3) *a*) adevărat; *b*) fals; *c*) fals; *d*) adevărat; 4) *a*) fals; *b*) fals; *c*) adevărat; *d*) fals; 5) *a*) corect; *b*) incorect; *c*) incorect; 6) *A*-vidă; *B*-mulțime cu un element; 9) $A = \{6; 7; 9\}$; $B = \{6; 7; 10; 11\}$; $C = \{3; 4; 6\}$; 12) $A_1 = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $A_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; 13) $\{1\}$; $\{1; 2\}$, $\{1; 2; 3\}$, $\{1; 2; 3; 4\}$. 18) *a*) fals; *b*) adevărat; *c*) fals; 21) *a*) fals; *b*) adevărat; *c*) fals; 23) *a*) nu definește; *b*) definește; *c*) nu definește; 24) *a*) fals; *b*) fals; *c*) adevărat; 25) *a*) fals; *b*) adevărat; *c*) fals; *d*) adevărat; 26) *a*) adevărat; *b*) adevărat; *c*) fals; 28) $x = 4$; $y = 5$ sau $x = 5$, $y = 4$. 30) *a*) fals; *b*) fals; *c*) fals; *d*) adevărat; 33) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. 34) $A = \{2, 3; 4; 5; 6; 7\}$. 35) $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $B = \{2; 3; 4; 5\}$. 36) *a*) adevărat; *b*) fals; *c*) fals; 37) $X = \{2; 4; 6; 8\}$; $Y = \{1; 3; 5; 7\}$; 38) $A = \{3; 6; 9; 12\}$. 39) $A = \{1; 5; 8\}$. 40) *a*) fals; *b*) fals; *c*) adevărat; 41) *a*) fals; *b*) fals; *c*) adevărat; 43) $A = \{x \in N / x = 2n + 1; n = 1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{x \in N / x = 3n + 1; n = 1; 2; 3; 4\}$; 45) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. 47) $A \cap B = \{3; 4\}$; $A \cap C = \{3\}$; $B \cap C = \{3; 6; 7\}$; $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$; $A \cup C = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9\}$; $B \cup C = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; 48) $A \cup (B \cap C) = \{0; 1; 2; 3\}$; $(A \cup B) \cap (B \cap C) = \{0; 1; 2; 3\}$; 49) $A \cup B = \{x / 1 \leqslant x \leqslant 6\}$; 52) $A \cap B = \{x \in N / 5 \leqslant x \leqslant 7\}$; 53) $A \cap B = \{5\}$; 54) $A \cap B = \emptyset$; 55) $A \cup B = \{4; 5; 6\}$; 56) $A \cup B = \{x \in N / 5 \leqslant x < 9\}$; 60) $P \cup Q = N$; $P \cap Q = \emptyset$; 62) $a = 3$; 63) $x = 1$, $y = 4$ sau $y = 1$, $x = 4$. 64) $a = 4$; 73) $C_E A = \{5; 6; 7; 8\}$; $C_E B = \{1; 2; 7; 8\}$; 74) $C_E A = \{9; 10\}$; $C_E B = \{1; 9; 10\}$. 75) $E \cup F = \{1; a; b; c; d; 2; 7\}$; $E \cup G = \{1; a; c; d; x; b\}$; $F \cup G = \{a, b, c, d, x, 2, 7\}$; $E \cap (F \cup G) = \{a; c; d\}$; $C_E(E \cap G) = \{1; c\}$. 95) Mulțimile sînt disjuncte; 89) Card $A \cap B = 10$; 97) $\{123; 132; 213; 231\}$; 115) $A \cap B = \{x \in N; x = 2n + 1; n = 1; 2; 3; 4\}$. 118) 1) 1) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; 2) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$; 3) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Cap. 2. Baze de numerație

1. a) $(22)_4$ b) $(21)_5$ c) $(22)_3$; 3) a) 13; b) 315; c) 73; 4) a) $(3012)_5$; b) $(12132)_5$; c) $(13000)_5$; 5) 1421; 4312; 3212; 6) $(11010)_4$; $(1551)_6$; 7) a) $(131)_5$; b) $(122)_5$; c) $(1204)_5$; 8) a) $(112)_5$; b) $(134)_5$; 15) a) 11010; b) 101010.

19. $\frac{N_1}{N_2} =$

$$= \frac{x\cdot 10^8 + y\cdot 10^7 + z\cdot 10^6 + x\cdot 10^5 + y\cdot 10^4 + z\cdot 10^3 + x\cdot 10^2 + y\cdot 10 + z}{x\cdot 10^5 + y\cdot 10^4 + z\cdot 10^3 + x\cdot 10^2 + y\cdot 10 + z} =$$

$$= \frac{(10^6 + 10^3 + 1)(x\cdot 10^2 + y\cdot 10 + z)}{(10^3 + 1)(x\cdot 10^2 + y\cdot 10 + z)} = \frac{10^6 + 10^3 + 1}{10^3 + 1}$$

Cap. 5. Relații — Funcții

1) (1; 2); (2; 1); (1; 3); (3; 1); (2; 3); (3; 2); 2) $x = 1$, $y = 2$; 3) a) $x = 2$; b) $x = 4$; c) $x = 4$; 4) a) $a = 2$; $b = 1$; b) $a = 3$; $b = 3$ c) $a = 1$; $b \in R$; d) $a = 1$; $b = 5$; 5) $\{(4; a); (4; b); (5; a); (5; b)\}$ 14) $(A \cup B) \times C = \{(1; 3); (1; 5); (2; 3); (2; 5); (3; 4); (3; 5); (4; 3); (4; 5)\}$; 16) $\{(1; 2); (1; 4); (1; 5); (5; 2); (5; 4); (7; 2); (7; 4); (7; 5)\}$. 17) $\{(1; 2); (2; 4)\}$; 20) $\{(1; 1); (4; 2); (9; 3)\}$; 23) $\{(2; 1); (4; 3); (5; 4); (6; 5); (7; 6)\}$. 24) $\{(-1; 0); (-1; 1); (-1; 2); (0; 1); (0; 2); (1; 2)\}$. 27) $\{(12; 2); (12; 3); (25; 5); (8; 2)\}$. 32) $\{(1; 1); (0; 0); (4; -2); (1; -1)\}$. 33) $\{(1; 2); (2; 1); (1; 0); (2; 0); (0; 2); (3; 0); (0; 3); (4; 0); (0; 4); (5; 0); (0; 5); (3; 1); (1; 3); (2; 3); (3; 2); (4; 1); (1; 4)\}$. 39) $\{(431; 4); (332; 3); (235; 2); (437; 4)\}$; 40) $\{(1; 2); (1; 4); (2; 4); (3; 4)\}$; 41) $\{(1; 2); (1; 4); (1; 5); (2; 4); (2; 2)\}$; 43) $\{(a; b); (b; c); (c; d)$; 44) $\{(1; 1); (0; 0); (2; 4)\}$. 45) $\{(-1; 1); (-2; 2); (0; 0); (1; 1); (2; 2)\}$ 55). Da; 56) Da; 59) $a = 1$; 60) $a = 1$; 64) $f(0) = 0$; $f(4) = 16$; $f(8) = 32$; $f(12) = 48$; $g(0) = 1$; $g(4) = 9$; $g(8) = 17$; $g(12) = 25$; 68) $\{(1; 4); (2; 3); (3; 2)\}$; 69) $f(x) = 5 - x$; $f(1) = 4$; $f(2) = 3$; $f(3) = 2$; 75) $A = \{1; 2; 3; 4\}$; $B = \{3; 4; 5; 6\}$; $f(1) = 3$; $f(2) = 4$; $f(3) = 5$; 79) b) $(-2; 2)$; c) $(-\infty; 0)$; d) $[-4; 6)$; e) $(-10; +\infty)$. 80) $y = [CD]$; $f(A) = C$; $f(B) = D$; $f(Q) = Q'$ cu proprietatea $DQ' = Q'C$. 88) $x = -2$; $x = -3$; $x = 4$; 90) $y = -5$; $y = 0$; $y = 10$; $y = 15$; 92) $f(0) = -2$; $f(-1) = 3$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$; 103) $a = 2$; 104) $a = 1$.

Cap. 7. Probabilități

3) $P_1 = \frac{2}{5}$; $P_2 = \frac{1}{5}$; $P_3 = \frac{1}{5}$; 4) $\frac{4}{9}$; $\frac{5}{9}$; 5) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{1}{8}$;

8) $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$; 9) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 11) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; 14) $\frac{1}{6}$; 15) $\frac{1}{12}$; 16) $\frac{1}{6}$;

18) *a*) $\frac{5}{6}$; 19) *a*) $\frac{3}{15}$; *b*) $\frac{7}{15}$; *c*) $\frac{8}{15}$; *d*) $\frac{3}{15}$; *e*) $\frac{6}{15}$.

Cap. 8 — Logică matematică

1) *a*) Îmi place această carte *și* îmi place matematica; 3) *a*) adevărat; *b*) fals; *c*) adevărat; 4) *a*) adevărat; *b*) adevărat; *c*) adevărat; *d*) fals; 5) *a*) $x = 7$; *b*) $\forall x \in N$; *c*) $x \neq 6$; *d*) $x \neq 7$; *e*) $x = 2$; *f*) $x \neq 2$. 7) *a*) *A*; *b*) *A*; *c*) *F*; *d*) *A*; *e*) *F*; *f*) *F*; *g*) *F*; *h*) *A*; *i*) *A*; *j*) *F*; *k*) *A*; *l*) *F*; *m*) *A*; 8) *a*) *A*; *b*) *A*; *c*) *A*; *d*) *A*; 9) *a*) *A*; *b*) *A*; 12) *a*) *A*; *b*) *A*; *c*) *F*; 13 *a*) *A*; *b*) *F*; 14) *a*) *A*; *b*) *F*; *c*) *F*; 20) *a*) *A*; *b*) *F*; *c*) *F*; 21) *a*) *A*; *b*) *F*; *c*) *F*; 24) *A*; 25) *F*; 27) *A*; 28) *A*; 29) *A*; 31) *A*; 35) *a*) *A*; *b*) *A*; *c*) *A*; 39) *a*) *A*; *b*) *F*; *c*) *A*;

Cap. 11. Probleme cu conținut practic

1. Să notăm cu x, numărul de spire căutat. Este evident că numărul spațiilor dintre spire este cu 1 mai mic decît numărul spirelor arcului. Se scrie ecuația:

$$5x + 8(x - 1) = 122,$$

de unde: $x = 10$; rezultă că arcul are 10 spire.

2. Notînd cu x numărul scîndurilor, numărul tăieturilor va fi cu 1 mai mic decît numărul x al scîndurilor.

Rezultă:

$$x = \frac{b + t}{b_1 + t} = \frac{236 \text{ mm} + 4 \text{ mm}}{20 \text{ mm} + 4 \text{ mm}} = 10.$$

3. Trebuie aflate relațiile dintre laturile unui dreptunghi încît suprafața, în cazul unui perimetru $2p$, să devină maximă.

Notînd cu x o latură a dreptunghiului, cealaltă latură neparalelă este egală cu $p - x$.

Suprafaţa dreptunghiului va fi :

$$A = x(p - x)$$

În consecinţă A capătă valoarea maximă atunci cînd : $x = -\frac{p}{2(-1)} = \frac{p}{2}$, adică dreptunghiul cu perimetrul dat $2p$ devine pătrat.

4. Problema duce la inecuaţia :

$$rx - (dx + s) \geqslant p,$$

x reprezentînd capacitatea de producţie pe an. După rezolvarea inecuaţiei rezultă :

$$\frac{p + s}{r - d} \leqslant x$$

În acest caz problema are sens numai dacă $d < r$.

5. Problema duce la inecuaţia :

$$p \leqslant \frac{100 - f}{100} x - 0{,}1\, h,$$

unde x reprezintă presiunea căutată pe care apa o primeşte de la staţia de pompare şi care se măsoară în kgf cm^{-2}.
Rezolvînd inecuaţia obţinem :

$$\frac{100\, p + 10\, h}{100 - f} \leqslant x$$

6. Suprafaţa totală a unei şaibe este :

$$A = \frac{\pi}{A}(D^2 - d^2) = \frac{3{,}14}{4}(5^2 - 2^2)\ \text{cm}^2 \approx 15{,}8\ \text{cm}^2.$$

Notînd cu x suprafaţa totală a foii din tablă, atunci deşeul reprezintă 0,35 x şi, dacă scădem din suprafaţa totală a tablei, obţinem

suprafața celor 25 de șaibe, care este egală cu:

$$15{,}8\ \text{cm}^2 \cdot 25 = 395\ \text{cm}^2;$$

$$x - 0{,}35\,x = 395\ \text{cm}^2$$

Rezolvînd ecuația obținem:

$$0{,}65\,x = 395\ \text{cm}^2, \quad \text{rezultă} \quad x = 610\ \text{cm}^2.$$

7. Înlocuim în ecuația: $\mu = a + bv$
întîi valoarea v_1, apoi valoarea v_2 și obținem sistemul:

$$\begin{cases} 0{,}4 = a + 0{,}1\ b \\ 0{,}5 = a + 0{,}5\ b \end{cases}$$

Prin rezolvarea sistemului, avem soluțiile:

$$a = 0{,}375$$
$$b = 0{,}25.$$

8. Problema duce la inecuația:

$$0{,}2\ v_1 x + m \leqslant v_1 x + (1 - 0{,}01\ f)\ v.$$

unde x este numărul de plăci de plută căutat.
Rezolvarea inecuației duce la:

$$\frac{100\ m - (100 - f)v}{80\ v_1} \leqslant x$$

9. Fie x numărul de elemente ale conductei elevatoare, rezultînd lungimea totală egală cu $8\,x$. Dacă la aceasta se adaugă lungimea conductei elevatorului de la sol, obținem distanța totală de 350.

Rezultă:

$$8x + 46 = 350$$
$$8x = 304 \Rightarrow x = 38.$$

10. Problema conduce la inecuația:

$$\frac{s}{v + v_1} + \frac{s}{v - v_1} \leqslant t,$$

unde s este distanța căutată de la chei pînă la mal.

Rezolvînd inecuaţia în raport cu s obţinem:

$$s \leqslant \frac{t(v^2 - v_1^2)}{2v}.$$

11. Problema conduce la inecuaţia:

$$\frac{q(100 + p)}{100} + nx < q + (s - x)\, n,$$

unde x reprezintă distanţa de la B la punctul căutat (în km). Ca soluţiile problemei să aibă sens, trebuie să avem relaţia $0 \leqslant x$.

Rezultă: $0 \leqslant x < \dfrac{100\ ns - pq}{200n}$.

12. Să notăm cu x cantitatea de alcool ce trebuie adăugată soluţiei de iod. Problema conduce la inecuaţia:

$$0{,}01\, p_1 \leqslant \frac{0{,}01\ pm}{m + x}$$

Rezultă: $x \leqslant \dfrac{m(p - p_1)}{p_1}$.

13. Notăm cu x eroarea care s-a făcut la măsurarea găurii cu ajutorul unui şubler cu fălcile egale (fig. 11.3)

În triunghiul dreptunghic ABC, notăm:

$$d^2 = a^2 + b^2,$$

şi luînd în consideraţie: $d = a + x$, după înlocuire obţinem: $(a + x)^2 = a^2 + b^2$, de unde: $x_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 + b^2} - a$.
Cum semnul minus dinaintea radicalului nu satisface condiţia problemei, rămîne valabilă relaţia:

$$x = x_1 = \sqrt{a^2 + b^2} - a = \sqrt{15^2 + 6^2} - 15 \approx 1{,}16 \text{ mm}.$$

Această eroare este inadmisibilă, fiindcă precizia de măsurare a şublerului depăşeşte un milimetru, care pentru diferite produse sînt cuprinse între 0,1 mm pînă la 0,02 mm.

14. Notînd cu x distanţa dintre marginile tablei şi deschizătura acesteia, suprafaţa deschizăturii va fi:

$$A = (a - 2x)\ (b - 2x),$$

sau: $4x^2 - 2(a + b)x + (ab - A) = 0,$
de unde:

$$x_{1,2} = \frac{(a+b)\pm\sqrt{(a + b)^2 - 4(ab - A)}}{4}$$

Cum expresia de sub radical este mai mare decît 0, se obţine următoarea relaţie:

$$x_1 = \frac{(a + b) + \sqrt{(a - b)^2+4A}}{4} > \frac{a+b}{2} > \frac{b}{2}\text{, deci}$$

o soluţie convenabilă deoarece b este muchia mai scurtă a tablei. După înlocuirea valorilor numerice, obţinem:

$$x_1 = \frac{(60+40) - \sqrt{(60- 40)^2 + 4.1000}}{4} \approx 8{,}4 \text{ cm}.$$

15. Conform principiului lui Arhimede, forţa cu care este împinsă geamandura este: $F = v \cdot \rho \cdot g = m \cdot g$, în care v este volumul părţii scufundate a geamandurii.

Volumul este: $V = \frac{\pi}{3}\ h(r^2 + rR + R^2)$ şi după înlocuire rezultă:

$$m = \rho \frac{\pi}{3} h(r^2 + rR + R^2)$$

sau:

$$R^2 + rR + r^2 - \frac{3m}{\pi \cdot \rho \cdot h} = 0,$$

rezultînd $R_{1,2} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{3\ m}{\pi \cdot \rho \cdot h} - \frac{3}{4}r^2}.$

Semnul minus dinaintea radicalului nu satisface condiţiile problemei, deci soluţia convenabilă este:

$$R = R_1 = \sqrt{\frac{3m}{\pi \cdot \rho \cdot h} - \frac{3}{4}r^2} - \frac{r}{2}.$$

16. Ţinînd seamă de raportul dintre diametrul de rostogolire (primitiv) şi numărul de dinţi al roţilor dinţate, obţinem :

$$z_2 d_1 = z_1 d_2.$$

Pe de altă parte avem : $a = \frac{d_1 + d_2}{2}$.

Rezolvînd sistemul de ecuaţii :

$$\begin{cases} z_2 d_1 - z_1 d_2 = 0 \\ d_1 + d_2 = 2a \end{cases}$$

obţinem : $d_1 = \frac{2a}{1 + \frac{z_2}{z_1}}$ şi $d_2 = \frac{2a}{1 + \frac{z_1}{z_2}}$.

17. Raportul de transmisie $\frac{n_1}{n_2} = i$,

sau exprimînd altfel $\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$, rezultînd sistemul de ecuaţii :

$$\begin{cases} \frac{z_2}{z_1} = i \\ z_1 + z_2 = z_0 \end{cases}$$

cu soluţiile : $z_1 = \frac{z_0}{i+1}$ şi $z_2 = \frac{iz_0}{i+1}$.

Exemplul numeric ; pentru $z_0 = 64$ şi $i = 2$ obţinem :

$$z_1 = \frac{z_0}{i+1} = \frac{64}{2+1} = 21{,}33.$$

163. Notăm cu x numărul de piese de 35 kg. Masa fiecărei serii de piese va fi : $35\,x$ şi $42(40-x)$. Ecuaţia căutată este :

$$35x + 42(40-x) = 1575, \; x = 15 \text{ buc};$$

166. $R = S_2 + r - e = S_1 + r - e$, sau $S_2 - e = S_1 + e$.

Rezultă : $e = \frac{S_2 - S_1}{2}$.

167. Grosimea peretelui o vom nota x, obţinem $x + l = L$, sau înlocuind $x + 25 = 37$; $x = 12$ mm.

170. Notăm cu x productivitatea maşinii B şi cu y pe cea a maşinii C. Rezultă următorul sistem de inecuaţii:

$$\begin{cases} \dfrac{m(p+y)}{100} \leqslant x \\ \dfrac{n(p+x)}{100} \leqslant y. \end{cases} \qquad (1)$$

Rezolvînd, obţinem:

$$\frac{n(p+x)}{100} \leqslant y \leqslant \frac{100\,x - mp}{m}$$

$$\frac{mp\,(n+100)}{10000 - nm} \leqslant x.$$

$$0 < p,\ 0 < m,\ 0 < n \text{ şi } mn \leqslant 10\,000.$$

171. Paratrăznetul trebuie montat astfel încît el să fie egal depărtat de fiecare punct al suprafeţei de bază.

Dacă înălţimea paratrăznetului o notăm ca h (în m) obţinem inecuaţia:

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \leqslant 2h, \text{ sau } \frac{1}{4}\sqrt{a^2 + b^2} \leqslant h.$$

172. Din figură rezultă: $l'^2 = (R + h)^2 - R^2$ şi $l' = l$. Rezolvînd ecuaţia obţinem: $h_{1,2} = R \pm \sqrt{R^2 + l^2}$ cum înălţimea turnului nu poate fi negativă, avem soluţia: $h = h_1 = \sqrt{R^2 - l^2} - R$ sau $h = R\left[\sqrt{1 - \frac{l^2}{R^2}} - l\right]$. Raportul $\frac{l^2}{R^2}$ tinde spre 1 şi-l vom nota cu α.

Obţinem cu aproximaţie $\sqrt{1 - \alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2}$. În cazul nostru $\alpha = \frac{l^2}{R^2}$. Aşadar $h = \frac{l^2}{2R} = \frac{300^2 \text{ km}^2}{2 \cdot 6368 \text{ km}}$.

173. Fie $AB = 156$ mm. Să determinăm domeniul admisibil pentru lungimile de şină cînd pentru arcul $\overset{\frown}{ADB}$ trebuie să avem

$MD \geqslant 600$ m. În $\triangle AMC$ conform teoremei lui Pitagora avem $(r - \overline{CD})^2 + (78)^2 = r^2$ şi deoarece $MC = r - CD$ şi $AC = \frac{AB}{2} = 78$, rezultă :

$$\frac{CD^2 + 6084\ m^2}{2\ CD} = r(1)$$

Dacă înlocuim în (1) valoarea dată $600 \leqslant r$, obţinem :

$$600 \leqslant \frac{CD^2 + 6084\ m^2}{2CD}, \text{ conducînd la :}$$

$$CD^2 - 1200\ CD + 6084 \geqslant 0.$$

Rezolvînd această inecuaţie vor rezulta două domenii de valabilitate şi anume 1194,9 m $\leqslant CD \leqslant$ 5,1 m. În sensul geometric urmează că $0 < CD$ şi deoarece din datele problemei trebuie să avem $\overset{\frown}{AMB} < 180°$ reiese că $CD < R$.
Deci, domeniul valorilor admisibile pentru CD se reprezintă prin intervalul $0 < CD < 5{,}1$ m.
Exemplu numeric. Fie $CD = 4$ m. Ecuaţia (1) dă :

$$r = \frac{16 + 6084}{8} = 762{,}5 \text{ m} > 600 \text{ m}.$$

174. Raportul dintre masa discului şi masa corpului se poate exprima prin raportarea ariei secţiunii transversale a găurii la aria secţiunii transversale a corpului. Din datele problemei se vede că în ambele cazuri este vorba despre cilindri cu raze diferite. De aceea, raportul secţiunii transversale ale cilindrilor, se indică tot prin pătratul razelor. Problema conduce la examinarea raportului în care se află raza r a unui cerc înscris într-un triunghi şi raza R a cercului circumscris aceluiaşi triunghi :

$$\frac{r}{R} \leqslant \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Pentru efectuarea demonstraţiei inecuaţia (1) trece printr-un şir de transformări. Deoarece:
$R = \dfrac{abc}{4A}$ şi $r = \dfrac{A}{p}$, inecuaţia poate fi transformată astfel:

$$\frac{2A}{p} \leqslant \frac{abc}{4A} \tag{2}$$

dar cum $0 < p$ şi $0 < A$, rezultă:

$$8A^2 \leqslant pabc \tag{3}$$

sau: $8\, p(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant p\, abc$ (4)

sau: $8(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant abc$ (5)

sau: $(2\,p - 2a)(2p-2b)(2p - 2c) \leqslant abc$ (6)

$$(b+c - a)(a+c-b)(a+b-c) \leqslant abc. \tag{7}$$

Ridicînd inecuaţia (7) la pătrat vom avea:

$$(b+c-a)^2 (a+c-b)^2 (a+b-c)^2 \leqslant a^2b^2c^2, \tag{8}$$

$$b+(c-a)b-(c-a)\, c+(a-b)\, c-(a-b)\, a+(b-c)\, a-(b-c) \leqslant a^2b^2c^2 \tag{9}$$

sau:

$$[b^2-(c-a)^2]\,[a^2-(b-c)^2][c^2-(a-b)^2] \leqslant a^2b^2c^2. \tag{10}$$

Inecuaţia (10) este valabilă deoarece:

$$a^2 - (b-c)^2 \leqslant a^2$$

$$b^2 - (c-a)^2 \leqslant b^2$$

$$c^2 - (a-b)^2 \leqslant c^2.$$

Rezultă că şi inecuaţia (1) trebuie să fie valabilă.

Aşadar, vom avea :

$$\frac{r}{R} \leqslant \frac{1}{2} \text{ şi } \frac{r^2}{R^2} \leqslant \frac{1}{4}; \quad \frac{r^2}{R^2} \leqslant 25\ \%.$$

175. Vom nota cu x şi y lungimea şi lăţimea materialului din care vom confecţiona abajurul. Avem :

$$0 < MA < AB \text{ şi } 0 < \frac{MA}{AB} < 1.$$

Evident avem: $A_1B_1 \leqslant x$, $A_1D_1 \leqslant y$(1) unde $A_1B_1C_1D_1$ este un dreptunghi. A_1B_1 se poate calcula astfel :

$$A_1B_1 = 2MA \sin\frac{\alpha}{2}, \tag{2}$$

sau $MA \cdot \alpha = \pi D$; $(MA - 1)\,\alpha = \pi d$ (3)

unde $\alpha = \dfrac{D-d}{1}\pi$ (4) şi $MA = \dfrac{Dl}{D-d}$.

Din (2), (4) şi (5) rezultă :

$$A_1B_1 = \frac{2\,Dl}{D-d} \sin \frac{D-d}{2\,l}\pi \tag{6}$$

Mai departe : $A_1D_1 = ME - MK$ (ME este bisectoarea unghiului α) şi $MK = MD \cos\dfrac{\alpha}{2} = (MA - l)\cos\dfrac{\alpha}{2}$,

dar : $ME = MA$.

De aici : $A_1D_1 = MA - (MA - 1)\cos\dfrac{\alpha}{2}$. (7)

Din (5), (6), (7) rezultă :

$$A_1D_1 = \frac{l}{D-d} \cos\frac{D-d}{2l}\pi \tag{8}$$

Din (1), (6), (8) se obţine

$$\frac{2\,Dl}{D-d}\sin\frac{D-d}{2l}\pi \leqslant x$$

$$\frac{l}{D-d}\cos\frac{D-d}{2l}\pi \leqslant y.$$

176. Notăm cu x numărul tone de oţel cu 20% nichel şi y numărul de tone oţel cu 40% nichel. Obţinem sistemul de inecuaţii :

$$\begin{cases} \dfrac{0{,}2\,x + 0{,}4\,y}{x+y} \geqslant 0{,}25 \\[2ex] \dfrac{0{,}2x+0{,}4\bar{y}}{x+y} \leqslant 0{,}30. \end{cases}$$

Rezolvînd obţinem : $\frac{1}{3}x \leqslant y \leqslant x$, unde $0 \leqslant x \leqslant \infty$.

PARTEA A II-A

Cap. 13 Logica matematică

4. Folosind formulele lui De Morgan obţinem :

$$\bar{x} \vee (\overline{y \wedge \bar{z}}) \Rightarrow (y \vee \bar{z})$$

$$\bar{x} \vee (\bar{y} \vee z) \Rightarrow (y \vee \bar{z}) \Leftrightarrow \overline{\bar{x} \vee (\bar{y} \vee z)} \vee (y \vee \bar{z}) \Leftrightarrow$$

$$x \wedge \overline{(\bar{y} \vee z)} \vee (y \vee \bar{z}) \Leftrightarrow (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (y \vee \bar{z})$$

7. A ; **11.** A ; **12.** *a*) F ; *b*) A ; *c*) F ; **13.** *a*) A ; *b*) A ; *c*) A ; *d*) A. **17.** $S(x, y) \wedge Q(x, y)$ **18.** *a*) F ; *b*) F ; *c*) F.

19. $P(x, y) = S(x, y) \wedge Q(x, y)$ **26.** $(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \vee (g \wedge h)$

27. $a \vee [(b \vee c \vee d) \wedge e]$.

2. *a*) Un număr întreg oarecare are una din formele :

$3m$, $3m + 1$, $3m + 2$, unde m ia valori : 0, 1, 2, 3, . . .

Dacă facem $n = 0$ în relația $3m + 5n$ se obține $x = 3m$ și deci toate numerele de această formă (multiplii lui 3), astfel încît $m \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, sînt în mulțimea A. Dacă $n = 1$ atunci : $x = 3m + 5 = 3(m + 1) + 2$; m ia toate valorile 0, 1, 2, 3 . . . și rezultă că $m + 1 \neq 0$ și $x \neq 2$, deci $2 \notin A$. Dacă $n = 2$ atunci $x = 3m + 10 = 3(m + 3) + 1$ și cum $m + 3$ nu poate lua valorile 0, 1, 2, rezultă că $1 \notin A$ și $4 \notin A$, $7 \notin A$. Deci mulțimea $C = \{1, 2, 4, 7\}$

b) Un număr întreg oarecare nenegativ are una din formele : $4k$; $4k + 1$; $4k + 2$; $4k + 3$; unde $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ adică :

$4k$	0	4	8	12	16	20	24	. . .
$4k+1$	1	5	9	13	17	21	25	. . .
$4k+2$	2	6	10	14	18	22	26	. . .
$4k+3$	3	7	11	15	19	23	27	. . .

Trebuie să găsim în tabloul de mai sus care sînt numerele care aparțin lui B.

În relația $x = 4m + 7n$, dacă $n = 0$, se obține $x = 4m$ adică numerele din prima linie a acestui tablou, deci numerele care figurează în B. Dacă $n = 2$, atunci $x = 4m + 14$ se obțin numerele din a treia linei a tabloului în afară de 2, 6, 10. Dacă $n = 3$, atunci $x = 4m + 21$ și cînd m ia valorile 0, 1, 2 . . . se obțin pentru valorile 21, 25, 29 . . . adică numerele din a doua linie a tabloului în afară de 1, 5, 9, 13, 17. Deci mulțimea :

$$D = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 17\}$$

3. Elementele mulțimii X se găsesc în mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$. Din condiția $\{1, 3\} \subset X$ rezultă că $1 \in X$ și $3 \in X$; Dar $2 \notin X$ dacă $2 \in X$ și cum $X \subset \{1, 3, 5\}$ ar rezulta că : $2 \in \{1, 3, 5\}$ ceea ce este evident fals. În același mod se arată că $4 \notin X$ și deci $X = \{1, 3\}$.

4. Dacă $\{1, 2, 3\}$ și $\{2, 3, 7\}$ sînt submulțimi ale lui X atunci rezultă că $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 7\}$ este o submulțime a lui X sau $\{1, 2, 3, 7\} \subset X$. Dar $C \times C \subset \{1, 2, 3, 7\}$ și prin urmare $X = \{1, 2, 3, 7\}$.

5. $A = \{2, 3\}$ $B = \{2, 4\}$ $C = \{6, 1\}$.

6. B este o parte nevidă a lui A, deoarece pentru $n = 1$ se obține $x = 2 \in B$. Se poate ușor arăta că $A \subset B$. Trebuie să verificăm că oricare ar fi numărul natural n avem :

$$2 \leqslant \frac{3n^2 + 1}{n^2 + n} \leqslant 3$$

$$2 \leqslant \frac{3n^2 + 1}{n^2 + n} \Leftrightarrow 2\,n^2 + 2n \leqslant 3n^2 + 1 \Leftrightarrow n^2 - 2\,n +$$

$$+ 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (n - 1)^2 \geqslant 0\,;$$

$$\frac{3n^2 + 1}{n^2 + n} = \frac{3(n^2 + n) - 3n + 1}{n^2 + n} = 3 - \frac{3n - 1}{n^2 + n} < 3.$$

Din relațiile $A \subset B$ și $B \subset A$ deducem $A = B$.

7. Dacă $1 \in A$ conform condiției (c) există $y \in B$; $y \in A \cup B$ astfel încît $1 - y = 1 \Leftrightarrow y = 0$. Dar $0 \notin B$ și prin urmare $1 \notin A$. Ținînd seama de condiția (a) rezultă că $1 \in B$. Se demonstrează în același mod următoarele relații : $3 \in A$; $4 \in A$; $4 \notin B$; $5 \notin A$; $5 \in B$; $6 \in A$; $6 \notin B$.

Se obține în final : $A = \{2\,; 4\,; 6\}$; $B = \{1, 2, 5\}$.

8. Din condițiile problemei se obține : $1 \in A$; $1 \in B$; $2 \in A$; $2 \in B$; $5 \in A$; $5 \notin B$; Dacă $3 \in A$, atunci $3 \notin B$ și deci $3 \in A - B$, ceea ce este fals. Prin urmare $3 \in B$ și $3 \notin A$. În același mod se pot arăta că 4, 6, 7, aparțin deasemeni lui B.

Deci : $A = \{1\,; 2\,; 5\}$ $B = \{1\,; 2\,; 3\,; 4\,; 5\,; 7\}$

9. Avem : $\{1\,; 2\} \triangle X = \{1\,; 2\,; 3\} \Rightarrow \{1, 2\} \triangle (\{1\,; 2\} \triangle X) = \{1\,; 2\} \triangle \{1\,; 2\,; 3\} \Rightarrow (\{1\,; 2\} \triangle \{1, 2\} \triangle X) = \emptyset \cup \{3\} \Rightarrow \emptyset \,\Delta X = \{3\} \Rightarrow X = \{3\}$.

Evident $X = \{3\}$ verifică ecuația $\{1\,; 2\} \triangle X = \{1\,; 2\,; 3\}$. Avem $A \triangle X = B \Rightarrow A \triangle (A \triangle X) = A \triangle B \Rightarrow (A \triangle A) \triangle X = A \triangle B \Rightarrow X = A \triangle B; X = A \triangle B \Rightarrow A \triangle X = A \triangle (A \triangle B) \Rightarrow A \triangle X = (A \triangle A) \triangle B \Rightarrow A \triangle X = \emptyset \triangle B \Rightarrow A \triangle X = B$ și deci $A \triangle X = B \Leftrightarrow X = A \triangle B$.

10. *a*) Se aplică distributivitatea intersecției față de reuniunea și se obține : $(A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$

b) $A \cap (B \setminus A) = A \cap (B \cap \bar{A}) = (A \cap \bar{A}) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$

c) $(A \cup B) \cap \bar{C} = (A \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{C}) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

d) $A \setminus (B \cup C) = A \cap (\overline{B \cup C}) = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} = (A \setminus B) \setminus C$.

11. *a*) Dacă $x \in A \cup B$ atunci ($x \in A$ sau $x \in B$) și $x \in C$ adică ($x \in A$ și $x \in C$) sau ($x \in B$ și $x \in C$). Prin urmare dacă propoziția $A \cup B \subseteq C$ este adevărată propoziția $A \subseteq C$ și $B \subseteq C$.

b) Dacă $A \cap B \subseteq C$ și $x \in A$. Să considerăm două cazuri: $x \in \bar{B}$ sau $x \in \bar{B}$. Dacă $x \in \bar{B}$ atunci $x \in A \cap B \subseteq C$ și prin urmare $x \in \bar{B} \cup C$. Dacă $x \in \bar{B}$ atunci: $x \in \bar{B} \cup C$ și rezultă că $x \in C$;

c) Fie $(A \setminus B) \cup B = A$ și $x \in B$. Atunci este adevărat că $x \in A$. Fie $B \subseteq A$. Atunci $(A \setminus B) \cup B = (A \cup B) \cup B = (A \cup B) \cap \cap (\bar{B} \cup B) = A$.

d) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$. Dacă $C \subseteq A \cap (B \cup C)$ rezultă că $C \subseteq A$. Fie $C \subseteq A$. Atunci $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = = A \cap (B \cup C)$.

12. Fie $x \in A \cap (B \triangle C)$. Atunci $x \in A$ și $x \in B \triangle C$. De unde rezultă că dacă $x \in B$, atunci $x \notin C$ ceea ce înseamnă că $x \in A \cap B$. Dar $x \notin A \cap C$. Dacă $x \in C$, atunci $x \notin B$. Înseamnă că $x \in (A \cap C)$. Dar $x \notin (A \cap C)$, în felul acesta $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ și astfel: $A \cap (B \triangle C) \subseteq (A \cap B) \triangle (A \cap C)$. Fie $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$. Dacă $x \in A \cap B$ și $x \notin A \cap C$, atunci $x \in A$, $x \in B$, $x \notin C$. Rezultă că $x \in A \cap (B \triangle C)$. Dacă $x \in A \cap C$ și $x \notin A \cap B$ atunci, $x \in A$; $x \in C$; $x \in B$. Înseamnă că $x \in A \cap (B \triangle C)$ și astfel $(A \cap B) \triangle (A \cap C) \subseteq A \cap (B \triangle C)$.

13. *a*) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = (B \triangle A)$;

b) Dacă $x \in A \triangle (B \triangle C)$ atunci ($x \in A$ și $x \notin B \triangle C$) sau ($x \in B \triangle \bar{C}$ și $x \notin A$). Dacă ($x \in B \triangle C$ și $x \notin A$) atunci ($x \in B$ și $x \notin C$) sau [($x \in C$ și $x \notin B$)] și $x \notin A$. Prin urmare: [($x \in B$ și $x \notin C$) sau $x \in C$]. Din relația $(A \triangle B) \triangle C = [(A \triangle B) \setminus C] \cup [C \setminus (A \triangle B)]$, rezultă că: $x \in (A \triangle B) \triangle C$; dacă și numai dacă $x \in (A \triangle B) \setminus C$ sau $x \in C \setminus (A \triangle B)$; Din aceste relații deducem; $x \in A$ și $x \notin B$ și $x \notin C$ sau $x \in B$ și $x \notin A$ și $x \notin C$. Avem $x \in C \setminus (A \triangle B)$ dacă și numai dacă $x \in C$ și $x \notin A \triangle B$. Rezultă că $x \in C \setminus (A \triangle B)$ dacă și numai dacă ($x \in C$ și $x \in A$ și $x \in B$) sau $x \in C$, $x \notin A$ și $x \notin B$). Prin urmare $x \in A \triangle (B \triangle C)$ dacă și numai dacă x aparține tuturor celor trei mulțimi sau aparține unei mulțimi și nu aparține celorlalte două. Se arată urmărind aceeași cale că $x \in A \triangle (B \triangle C)$, dacă x aparține celor trei mulțimi sau aparține unei mulțimi și nu aparține celorlalte două.

c) Demonstrația se poate face urmînd un procedeu analog cu cel de la punctul (*b*) sau folosind proprietățile operațiilor cu mulțimi după cum urmează: $A \cap (B \triangle C) = A \cap [(B \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C)] = = (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C)$; $(A \cap B) \triangle (A \cap C) = [(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C})] \cup \cup [(\overline{A \cap B}) \cap (A \cap C)] = [A \cap B \cap (\bar{A} \cup \bar{C})] \cup [(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (A \cap C)] = = (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C)$.

d) $A\triangle(A\triangle B) = (A\triangle A)\triangle B = B.$

14. *a*) $(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{B} \cap A) = \emptyset \Rightarrow (\bar{A} \cap B = \emptyset) \wedge (\bar{B} \cap A) = \emptyset \Rightarrow$ $\Rightarrow A = B$. Reciproc dacă $A = B \Rightarrow (\bar{A} \cap A) \cup (\bar{B} \cap B) = \emptyset$.
b) Fie $A\triangle B = C$. Atunci $B\triangle C = B\triangle(A\triangle B) = B\triangle(B\triangle A) = A$.

15. Din condiţiile problemei deducem: $B \subseteq X \subseteq \bar{A} \cup B$ şi $C \cap (\bar{A}) \subseteq X \subseteq C$. De unde rezultă că: $B \cap (C \cap \bar{A}) \subseteq X \subseteq (\bar{A} \cup B) \cap$ $\cap\ C = (\bar{A} \cap C) \cup (B \cap C) = (\bar{A} \cap C) \cup B$. Se poate uşor arăta că $X = (C \setminus A) \cup B$ verifică sistemul dat.

16. $$\begin{cases} \bar{A} \cap X = B \\ X \cap \bar{A} = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{A} \cup X = \bar{B} \\ X \cap \bar{A} = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cap (\bar{A} \cup X) = (A \cap B) \\ X \cap A = C \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \cap X = A \cap \bar{B} \\ \bar{A} \cap X = C \end{cases} \Leftrightarrow X = (A \cap \bar{B}) \cup C$$

18. Să notăm prin f, g, h funcţiile caracteristice ale mulţimilor E, F şi G. Folosind rezultatele de la exerciţiul precedent obţinem: $[f(x) \cdot g(x)]\ h(x) = f(x)\ [g(x) \cdot h(x)]$.
Avem: $(f(x) + g(x))\ h(x) = g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h(x)$.

19. $\{4; 5\} \times \{2; 4\} \subset A \times B \Leftrightarrow [\{4; 5\} \subset A]$ şi $\{2; 4\} \subset B$. Din $A = \{1, 2, 3, x, y\}$ şi $\{4; 5\} \subset A$ rezultă că:
$x = 4$, $y = 5$, sau $x = 5$ şi $y = 4$. Din $B = \{5; 6; x; z;\}$ şi $\{2; 4\} \in B$, rezultă că $x = 4$ şi $z = 2$ sau $x = 2$, $z = 4$.
Din aceste relaţii se deduce că:

$$x = 4,\ y = 5,\ z = 2.$$

31. $$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{1} = \frac{y^2}{4} = \frac{z^2}{9} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{14} = \frac{14}{14} = 1.$$

Se găseşte $x = \pm 1$, $y = \pm 2$, $z = \pm 3$.

35. Din $x^5 y^3 = 81$ rezultă $xy > 0$ şi deci x, y au acelaşi semn. Din ecuaţia a doua rezultă că $x > 0$, $y > 0$. Vom avea $x.x.x.x.x.$ $y.y.y = 81$, $x + x + x + x + x + y + y + y = \frac{27}{2}$, sau

$$\sqrt[8]{x^5y^3} \leq \frac{5x + 3y}{8} = \frac{27}{16}, \text{ sau } \sqrt{3} < \frac{27}{16} = 1{,}69.$$

38. $C_E A \cap C_E B = C_E(A \cup B) = \{7\}$. Se deduce:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\};\ A = \{2, 4, 6, 8\}.$$

39. $\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}=\frac{x+3}{x-3}=\frac{x-3+6}{x-3}=1+\frac{6}{x-3}$

$x-3=\pm 1$; $x-3=\pm 2$; $x-3=\pm 3$; $x-3=\pm 6$.

44. Dreptele de ecuaţie $x=-1, y=0, y=\frac{1}{2}, \quad y=2$, împart planul în opt regiuni. În regiunea I-a: $x \leqslant -1, \; y \leqslant 2$, soluţia $x=y=\frac{1}{2}$ nu convine. În regiunea II-a $x>-1, y>2$, soluţia $x=y=\frac{1}{2}$ nu convine. În regiunea III-a $x \leqslant -1$, $\frac{1}{2}$ $y \leqslant 2$.

Soluţia $x-y=\frac{1}{2}$ nu convine, ş.a.m.d. Se găseşte că singura soluţie este $x=y=-1$, prin urmare $A=\{-1, -1\}$.

45. $20k'-4=796-20k \Leftrightarrow 20(k+k')=800$, sau $k+k'= =40$; $k=1$; $k'=39$; $k=2, k'=38$; ....

Avem $x=20-4=16$; $x=796-780=16$ ş.a.m.d.

46. $x^2-xy-3x+3y=1 \Leftrightarrow x(x-y)-3(x-y)=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x-3)=1 \Leftrightarrow x=4, y=3.$$

$xy-2x-3y+6=1 \Leftrightarrow x(y-2)-3(y-2)=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (y-2)(x-3)=1, x=4, y=2.$$

50. $(x, y) \in A \Leftrightarrow 9x+10y \vdots 3 \Leftrightarrow [(6x+7y)+(3x+3y)] \vdots 3 \Rightarrow \Rightarrow 6x+7y \vdots 3 \Rightarrow (x, y) \in B$. În mod analog se arată că dacă $(x, y) \in B$, atunci $(x, y) \in A$.

51. $(x-1)(4x^2-4xy+y^2)=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x-y)^2=0$,

$x=1, \quad y=2$.

52. $x^5-xy^2+y^2-1=(x^5-1)-y^2(x-1)=$

$=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1-y^2)=0$;

$4x^4+4x^3+4x+4=4y \Leftrightarrow (2x^2+x)^2+3x^2+x+4=4y^2$

$4y^2>(2x^2+x)^2$. Se găseşte: $2y=(2x^2+x+1)$;

$x_1=-1$; $x=3$.

53. $x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 6z + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - 3)^2 = 0.$

54. $(x^2 - m^2)^2 + (x + m)^2 + 2 = 0$, imposibil

55. $x^5 + 5 = 4xq'$; $x^5 + 4 = 5xq''$; $q', q'' \in Z$.

Scăzînd cele două egalități se obține:

$1 = x(4q' - 5q'')$. Rezultă $x = 1$, $4q' - 5q'' = 1$.

56. $6x^2 - 4xy - 9xy + 6y^2 = 19 \Leftrightarrow (3x - 2y)(2x - 3) =$

$$= 19 \Leftrightarrow x = \pm 7;\ y = \pm 11.$$

57. Inecuația este echivalentă cu sistemul:

$\frac{x-1}{x-4} > 0$, $\frac{x-2}{x-3} > 0$; $\frac{x-2}{x-3} > \frac{x-1}{x-4}$, sistem care conduce la cercetarea semnului funcțiilor $f_1 = \frac{x-1}{x-4}$ și $f_2 = \frac{5-2x}{(x-3)(x-4)}$. Se găsește $A = (-\infty, 1)$.

58. $x - 2y = 0$; $x + 3 = 0$; $x = -3$.

Cap. 15. **Relații**

3. Dreapta dusă prin punctul O întîlnește cercul în două puncte. Aceste puncte au o singură imagine și deci putem spune că este o funcție. Dacă punctul O este interior cercului atunci avem o *aplicație*. Această aplicație nu este nici surjectivă și nici injectivă. Există două puncte invariante care se confundă cu imaginile lor.

4. a) aplicație; *b*) bijectivă; *c*) A este imaginea mijlocului BC; *d*) Imaginea este un punct care împarte latura AC în același raport;

7. Este o aplicație bijectivă și $f^{-1} = f$

8. Aplicație bijectivă: $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$

9. Aplicaţie bijectivă : $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{-1}$

11. $f : A \to B$; $g : B \to C$; $h : C \to D$;
$y = f(x)$; $z = g(y)$; $t = h(z)$

Trebuie să studiem $h\circ(g\circ f)(x)$ şi $((h\circ g)\circ f)(x)$ Aplicînd definiţia compunerii aplicaţiilor avem :

$$h\circ(g\circ f)(x) = h(z);\ (g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

$$(h\circ(g\circ f))(x) = h((g\circ f)(x))$$

$$((h\circ g)\circ f)(x) = ((h\circ g)f(x)) = (h\circ g)(y) = h(g(y)) = h(z)$$

Cele două elemente a lui D sînt egale oricare ar fi x, prin urmare funcţiile sînt egale.

63. $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)[(x_1^2 - 5x_1 + 6) + (x_2^2 - 5x_2 + 4) + x_1x_2]$.

64. Valorile lui a şi b se determină din ecuaţiile $a + b = 1$ şi $2a + b = 4$. Se deduce că $y = 3x - 2$ este corespunzătoare pe $(1, 2)$ şi f este monoton crescătoare. Mai departe f este injectivă, ceea ce rezultă din monotonie. Se verifică uşor că este şi surjectivă.

65. Se notează : $u(x) = \left(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6}\right)$, de unde rezultă că $-\frac{10\pi}{9} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{9}$. Funcţia $u(x)$ este crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{10\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}\right]$, iar mulţimea valorilor ei este $[-2, 2]$ şi, prin urmare, funcţia $y = a^{2\sin\left(\frac{3x}{9} + \frac{\pi}{6}\right)}$ este bijectivă şi, deci, inversabilă.

Se găseşte apoi $f\circ f^{-1} = x$.

Cap. 16. Legile compoziţiei interne

1. Nu; $4*5 = 10$; 2. Da;

4. $3\ \theta\ 5 = 3^5$; 6. $a\theta(b\theta c) = \dfrac{a + \dfrac{b+c}{2}}{2} = \dfrac{2a + b + c}{4}$

$$(a\theta b)\theta c = \frac{\dfrac{a+b}{2} + c}{2} = \frac{a + b + 2c}{4}$$

11. *a*) necomutativă; *b*) comutativă; *c*) comutativă;
d) necomutativă; *e*) comutativă.

18. b) $x^2 + 9 + 3x = 10$; $x \in \left\{\frac{-3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}\right\}$

Cap. 17. **Structuri algebrice — calcul vectorial**

29. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$;

30. *a*) vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ trebuie să fie perpendiculari;

b) unghiul format de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ trebuie să fie ascuțit;

c) unghiul format de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ trebuie să fie obtuz;

31. Vectorul $\vec{b}$ este de trei ori mai lung decît $\vec{a}$.
Ei sînt orientați în sensul contrar;

32. $\alpha = 4$; $\beta = -1$;

33. Vectorul $\overrightarrow{AB}$ este de două ori mai lung decît $\overrightarrow{CD}$ și sînt de același sens.

35. $\vec{c} = \{-3; 15; 12\}$;

36. $\alpha = \pm 1$;

38. 0;

45. $\overrightarrow{AB} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}$; $\overrightarrow{BC} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}$; $\overrightarrow{CD} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$; $\overrightarrow{DA} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$;

46. $\overrightarrow{AB} = \frac{\lambda\vec{a} - \vec{b}}{1 + \lambda}$; $\overrightarrow{BC} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{1 + \lambda}$; $\overrightarrow{CD} = \frac{\lambda\vec{b} - \vec{a}}{1 + \lambda}$; $\overrightarrow{DA} = -\frac{\lambda(\vec{a} + \vec{b})}{1 + \lambda}$;

49. $\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}}{2}$

50. $\overrightarrow{MM'} = \dfrac{\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}}{3}$

51. $\overrightarrow{AB} = \{1; 0\}$; $\overrightarrow{BC} = \{-1; 1\}$ $\overrightarrow{CD} = \{-2; 1\}$; $\overrightarrow{DE} = \{-1; +0\}$; $\overrightarrow{EF} = \{1; -1\}$; $\overrightarrow{FA} = \{2; -1\}$.

52. $\overrightarrow{AB} = \{0, 1\}$; $\overrightarrow{BC} = \{\lambda; 0\}$; $\overrightarrow{CD} = \{1 - \lambda, -1\}$; $\overrightarrow{DA} = \{-1, 0\}$; $\overrightarrow{AC} = \{\lambda; 1\}$; $\overrightarrow{BD} = \{1; -1\}$;

54. $\overrightarrow{AB} = \{-1, 1, 0\}$; $\overrightarrow{BC} = \{0, -1, 1\}$; $\overrightarrow{CA} = \{1, 0 - 1\}$, $\overrightarrow{DE} = \left\{-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$;

57. $\vec{r}_4 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 + \vec{r}_3$;

59. $\overrightarrow{AD} = \dfrac{\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}| + AC|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|}$

61. Avem: $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD}$. Adunăm membru cu membru aceste egalități și obținem: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

Dacă notăm cu M și N mijloacele coardelor AB și CD obținem:

$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$; $2\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ și prin urmare avem: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO} + 2\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{PO}$.

62. $-\dfrac{3}{2}$; 63. 0; 64. Din relațiile evidente $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC}$ se obține: $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{CD})(\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PB}) - \overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}$.

65. Din ipoteză avem: $\vec{b} = \vec{x} + \vec{y} = \lambda\vec{a} + \vec{y}$. Dacă înmulțime ambii membri ai egalității date scalar cu vectorul $\vec{a}$ obținem:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \lambda\vec{a}^2 + \vec{a}\vec{y} = \lambda\vec{a}^2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}.$$

Prin urmare avem: $x = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\cdot\vec{a}$; $y = \vec{b} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\cdot\vec{a}$.

66. $x = \frac{(\vec{b}\cdot\vec{b})\,\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{b}}{a^2b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$;

70. Un paralelogram $ABCD$ avem: $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. De unde rezultă egalitățile:

$\overrightarrow{DB}^2 = \overrightarrow{DA}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{DA}^2 - 2\overrightarrow{DA}\ \overrightarrow{AB}$ sau, $\overrightarrow{DB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = 2\,(\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AB}^2)$.

71. În triunghiul ABC ($A = 90°$) ducem $AD \perp BC$ și avem:

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$ sau $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}^2$ sau $\overrightarrow{CA}^2 = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD} = CB\cdot CD$.

72. Ducem perpendiculara în D pe SD care taie cercul în A'. În triunghiul SDA' avem: $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA'} + \overrightarrow{A'D}$. Înmulțim egalitatea membru cu membru cu $\overrightarrow{SA}$ și se obține:

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA}\,(\overrightarrow{SA'} + \overrightarrow{A'D}) = \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SA'} + \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{A'D}$. Produsul scalar $\overrightarrow{SA} \times \overrightarrow{A'D}$ este nul, deoarece vectorii sînt ortogonali și prin urmare avem: $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SA'}$. Din triunghiurile SOA și SOA' vectorii $\overrightarrow{SA}$ și $\overrightarrow{SA'}$ se scriu astfel: $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{SA'} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{SO} - \overrightarrow{OA}$ și prin urmare avem: $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SD} = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{SO} - \overrightarrow{OA}) = SO^2 - OA^2 = d^2 - R^2$

73. Fie O punctul de intersecţie al diagonalelor dreptunghiului M şi N mijloacele laturilor AD şi BC. Avem : $\overrightarrow{OM} = 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{ON} = 2(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$.

74. Fie O punctul de intersecţie al diagonalelor dreptunghiului. Avem : $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QL}$; $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NS}$, $\overrightarrow{OL} = -\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{NS}$; $\overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{ON}$ sau $\overrightarrow{OL} = -\overrightarrow{NS} - \overrightarrow{ON} = -(\overrightarrow{NS} + \overrightarrow{ON}) = -\overrightarrow{OS}$.

78. Din centrul O se construiesc perpendicularele OM, OP, OQ, OR, OS pe mijloacele laturilor pentagonului. Se construiesc apoi bisectoarele unghiurilor formate de aceste perpendiculare cu razele OA, OB, OC, OD şi OE şi se notează cu M_1, M_2; P_1, P_2; Q_1, Q_2; R_1, R_2; S_1, S_2, intersecţiile cu laturile AB, BC, CD, DE, EA ale paralelogramului.

Mai departe se deduc relaţiile $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \ldots$ şi se pun apoi în evidenţă vectorii opuşi.

79. Dacă G şi G' sînt centrele celor două triunghiuri avem :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}, \quad \overrightarrow{OG'} \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OC_1}}{3} =$$

$$= \frac{(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})}{6} = \frac{2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})}{6}.$$

80. $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PE}$. Dacă O este intersecţia dreptelor AD şi CF, atunci $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{AF} = K.\ \overrightarrow{CD}$. Se deduce apoi $\overrightarrow{BE} = (K + 1)\ \overrightarrow{CD}$.

81. Se deduce uşor $\dfrac{\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MB}} = k$.

Se obţine relaţia $(1-k)\ \overrightarrow{XM} = \overrightarrow{MA}\left(k\ \dfrac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MA}} - 1\right)$ şi deoa-

rece $\dfrac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MA}} = \pm\dfrac{R}{r}$. Se deduce $\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{MA}\left(\dfrac{-1 \pm K\dfrac{R}{r}}{k-1}\right)$.

Este deci un cerc omotetic cu cercul de diametru MA.

82. Se notează $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{PB}$ şi atunci se scriu relaţiile:

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{1+\lambda}\,\overrightarrow{OC} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\,\overrightarrow{OD};\ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}.$$

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \dfrac{1}{1+\lambda}\,\overrightarrow{AC} + \dfrac{\lambda}{1+\lambda}\,\overrightarrow{BD}$. De unde se deduce $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{QS} = 0$.

89. Dacă notăm $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$, atunci din relaţia $\overrightarrow{ma} = \overrightarrow{mc} = 0$($\vec{m}_a$ şi $\vec{m}_c$ fiind vectorii medianei, deducem: $\cos B = \dfrac{4}{5}\,\dfrac{a^2+c^2}{ac}$.

Cap. 18. Construcţii algebrice de mulţimi

10. Divizorii lui a şi b divid de asemenea sumele $5a + 3b$ şi $13a + 8b$ şi reciproc toţi divizorii lui $5a + 3b$ şi $13a + 8b$ divid a şi b.

$$\begin{cases} 8(5a + 3b) - 3(13a + 18b) = a \\ 5(13a + 8b) - 13(5a + 3b) = b. \end{cases}$$

Prin urmare perechile (a, b) şi $(5a + 3b, 13a + 8b)$ au aceeaşi mulţime de divizori.

12. $7^n \equiv (-1)^n \pmod 8$

Dacă n este par avem: $7^n + 1 \equiv 2 \pmod 8$ şi prin urmare restul împărţirii numărului $7^n + 1$ prin 8 este egal cu 2.

15. Avem: $37 = 7 \cdot 5 + 2$; $16 = 7 \cdot 2 + 2$; $23 = 7 \cdot 3 + 2$.

$37 \equiv 2 \pmod 7$; $16 \equiv 2 \pmod 7$; $23 \equiv 2 \pmod 7$

Din aceste relaţii se obţine:

$37^{n+2} \equiv 2^{n+2} \pmod 7$; $16^{n+1} \equiv 2^{n+1} \pmod 7$

$23^n \equiv 2^n \pmod 7$, sau:

$37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n \equiv 2^n \cdot 7 \pmod 7$

16. $3^5 = 243 = 181 + 62$; $4^5 = 1024 = 181 \cdot 6 - 62$

$3^5 = 62 \pmod{181}$; $4^5 \equiv -62 \pmod{181}$

sau:

$3^{105} \equiv 62^{21} \pmod{181}$; $4^{105} \equiv -62^{21} \pmod{181}$

Adunăm cele două egalităţi membru cu membru şi obţinem:

$3^{105} + 4^{105} \equiv 0 \pmod{181}$.

17. $7a + 3 \equiv 3 \pmod 7$; $7b + 25 \equiv -3 \pmod 7$

Din aceste relaţii obţinem:

$(7a + 3)^{2n+1} \equiv 3^{2n+1} \pmod 7$,

$(7b + 25)^{2n+1} \equiv -3^{2n+1} \pmod 7$.

Adunăm cele două egalităţi membru cu membru şi obţinem:

$7(a + 3)^{2n+1} + (7b + 25)^{2n+1} \equiv 0 \pmod 7$

18. $28 = 25 + 3$; $47 = 25 \cdot 2 - 3$; $72 = 25 \cdot 3 - 3$,

atunci $72 \equiv -3 \pmod{25}$, $47 \equiv -3 \pmod{25}$; $28 \equiv 3 \pmod{25}$

$72^{2n+2} \equiv 3^{2n+2} \pmod{25}$

$47^{2n} \equiv 3^{2n} \pmod{25}$

$28^{2n-1} \equiv 3^{2n-1} \pmod{25}$

$72^{2n+2} - 47^{2n} + 28^{2n-1} = 3^{2n+2} - 3^{2n} + 3^{2n-1} \pmod{25}$

Cum însă: $3^{2n+2} - 3^{2n} + 3^{2n-1} = 3^{2n-1}(3^3 - 3 + 1) = 25 \cdot 3^{2n-1}$,

rezultă că: $72^{2n+2} - 47^{2n} + 28^{2n+1} \equiv 3^{2n-1} \cdot 25 \pmod{25} \equiv 0 \pmod{25}$

19. $2^4 = 16 = 13 + 3$;

$7^2 = 49 = 13 \cdot 4 - 3$

$2^4 \equiv 3 \pmod{13}$; $7^2 \equiv -3 \pmod{13}$

Obținem: $2^{60} \equiv 3^{15} \pmod{13}$; $7^{30} \equiv -3^{15} \pmod{13}$

Din aceste două relații obținem:

$2^{60} + 7^{30} \equiv 0 \pmod{13}$ și prin urmare:

$2^{60} + 7^{30}$ se divide cu 13.

20. $N = 4^n + 15n - 1 = 4^n - 1 - 3n + 18n$

$(4^n - 1) : 3 = (4^n - 1) : (4 - 1) = 4^{n-1} + 4^{n-2} + 4^{n-3}$

Să notăm: $N_1 = 4^n - 1 - 3n = 3(4^{n-1} + 4^{n-2} + \ldots + 4 + 1 - - n) = 3[(4^{n-1} - 1) + (4^{n-2} - 1) + (4^{n-3} - 1) + \ldots + (4^2 - 1) + + (4 - 1)]$.

Fiecare termen al acestei sume se se divide la 3 și prin urmare: $N_1 \vdots 9$. Dar $N = N_1 + 18n$, și deci $N \vdots 9$.

21. Avem:

$a(x^3 + a^2x^2 + a^2 - 1) = ax^3 + a^3x^2 + a(a^2 - 1) =$

$= ax^3 + ax^2 + (a^3 - a)x^2 + (a^3 - a) = (a^3 - a)(x^2 + 1) + ax^2(x + 1)$.

Avem: $a^3 - a = (a + 1)(a - 1)a$, care se divide la 6. Prin urmare $(a^3 - a)(x^2 + 1)$ se divide la 6 pentru orice valori întregi ale lui x.

Pentru ca polinomul dat să se dividă la 6 este necesar ca expresia $ax^2(x + 1)$ să se dividă la 6 pentru orice a, adică în particular și pentru $a = -1$. Din această condiție rezultă că $x(x+1)$ trebuie să se dividă la 3 și această proprietate are loc dacă:

$$x = 3k \text{ sau } x = 3k - 1.$$

22. Avem : $10N = 4 \cdot 25^n \cdot 2^n + 15 \cdot 3^n \cdot 4^n = 4(50^n - 12^n) + 19 \cdot 12^n$.

Deoarece $50^n - 12^n$ se împarte la diferenţa :

$50 - 12 = 38 = 19 \cdot 2$ atunci $10N$ se divide la 19.

23. $P_n = a^{4n+1} - a$. Pentru $n = 1$ avem :

$$P_1 = a^5 - a = a(a-1)(a+1)[(a^2-4)+5] =$$

$$= (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) - 5(a-1)a(a+1).$$

Produsul $(a-2)(a-1)(a+1)(a+2)a$, se divide la $5! = 120$ şi prin urmare se divide la 30. Produsul $5(a-1)a(a+1)$ se divide de asemenea la $5 \cdot 3! = 30$. Prin urmare P_1 se divide la 30. Avem :

$$P_{n+1} = a^{4n+5} - a = P_n + a^{4n+5} - a^{4n+1} = P_n + a^{4n} \cdot P_1.$$

Aplicînd principiul inducţiei deducem că P_{n+1} se divide la 30.

24. $n^2 + 1 = n(n+1) - (n-1)$. Punînd condiţia ca $n^2 + 1$ să se dividă prin $n + 1$, rezultă că $n - 1$ trebuie să se dividă la $n + 1$. De aici deducem că $n - 1 = 0$ sau $n = 1$. Prin urmare numai pentru $n = 1$, expresia $n^2 + 1$ se divide la $n + 1$.

25. Avem : $x^2y^3 - 4x^2y = x^2y(y+2)(y-2)$

şi $x^4 + x^2 - 2 = x^4 - x^2 + 2x^2 - 2 = x^2(x^2-1) + 2(x^2-1) =$

$= (x^2+2)(x+1)(x-1)$

În felul acesta obţinem :

$$N = x^2y(x+1)(x-1)(y+2)(y-2)(x^2+2)$$

Avem : $216 = 2^3 \cdot 3^3$. Dacă x este un număr par atunci x^2 se divide la 4 şi $x^2 + 2$ se divide la 2 prin urmare N se divide la 8. Dacă x este un număr impar, atunci unul din factorii $(x+1)(x-1)$ se divide la 4 şi celălalt se divide la 2 şi prin urmare N se divide şi în acest caz la 8.

$[x = 2p + 1 \Rightarrow (x+1)(x-1) = (2p+2) \cdot 2p = 4p(p+1) \vdots 8]$.

Unul din factorii $y + 2$, y şi $y - 2$ se divid la 3. Pentru $x = 3k$, $x + 1$ se divide la 3. Pentru $x = 3k \pm 1$, unul din factorii $x - 1$

şi $x+1$ se divid la 3. În ambele cazuri expresia x^2+2 se divide la 3, deoarece avem: $x^2+2=9k^2\pm 6k+1+2=3\ (3k^2\pm \pm 2k+1)$. Rezultă că N se divide la $3^3=27$. Prin urmare N se divide la $8\cdot 27=216$.

26. Fie $x-y=a,\ y-z=b,\ z-x=c;\ a+b+c=0,$ $c=-(a+b)$. Avem: $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5=a^5+b^5-$ $-(a+b)^5=a^5+b^5-a^5-5a^4b-10a^3b^2-10a^2b^3-5ab^4-b^5=$ $=-5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)=-5ab[(a+b)$ $(a^2+ab+b^2)+2ab(a+b)]=-5ab(a+b)(a^2+ab+b^2).$

Prin urmare numărul $N=(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ se divide la $-5ab\ (a+b)=5abc=5(x-y)(y-z)\ (z-x)$.

27. Avem:

$$N=\frac{2^{5n-1}\cdot 2-1}{2-1}=2^{5n}-1=32^n-1.$$

Diferența 32^n-1 se divide la $32-1=31$.

28. Avem: $2n^3-3n^2+n=(n^3-n)+(n^3-3n^2+2)=$ $=n(n^2-1)+n(n^2-3n+2)=(n-1)(n+1)n+$ $+n\ (n-2)(n-1).$

Expresia obținută este suma a doi termeni. Fiecare termen este produsul a trei numere naturale consecutive care este divizibilă cu 6.

29. $2^6=64\equiv 1\ (\text{mod } 9)$; $2^{6n}\equiv 1\ (\text{mod } 9)$ în afară de aceasta avem $2^{6n+2}\equiv 2^2\ (\text{mod } 9)$ și prin urmare obținem: $2^{6n+2}\equiv 2^2$ $(\text{mod } 18)$. Prin urmare avem: $2^{6n+2}=18k+2^2$. Mai departe avem: $2^{18}-1=(2^9+1)\ (2^9-1)=513\cdot 511$ de unde rezultă evident că $2^{18}-1$ se divide la 19 sau $2^{18}\equiv 1\ (\text{mod } 19)$ sau $2^{18k}\equiv 1$ $(\text{mod } 19)$.
Dar:

$$2^{18k+2^2}=2^{18k}\cdot 2^4\equiv 2^4\ (\text{mod } 19);$$

$$2^{2^{6n+2}}\equiv 16\ (\text{mod } 19),\text{ de unde rezultă că:}$$

$$2^{2^{6n+2}}+3\equiv 16+3\equiv 0\ (\text{mod } 19)$$

Prin urmare $2^{2^{6n+3}}+3$ se divide la 19.

30. $A_{n+1} - A_n = 10^{6n+8} - 10^{6n+2} + 10^{3n+4} - 10^{3n+1} =$
$= 10^{6n+2}(10^6 - 1) + 10^{3n+1}(10^3 - 1) = (10^3-1)[(10^3 + 1)\cdot$
$\cdot 10^{6n+2} + 10^{3n+1}]$.

Deoarece $10^3 - 1 = 999 = 9.111$, rezultă $A_{n+1}-A_n \equiv 0 \pmod{111}$.

32. Numărul: $n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4 =$
$= n^4(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) = n^4(n + 1)^4 =$
$= [n(n + 1)]^4$ se împarte la $2^4 = 16$.

34. Avem:

$N = [1^{2n+1} + (2a)^{2n+1}] + [2^{n+1} + (2a - 1^2)^{n+1}] + \dots +$
$+ [a^{2n+1} + (a + 1)^{2n+1}]$, sau:

$$N = \sum_{k=1}^{a} [k^{2n+1} + (2a + 1 - k)^{2n+1}].$$

35. Avem:

$$n^{8888} - n^{7777} + 1 = n^2(n^3)^{\frac{8886}{3}} - n(n^3)^{\frac{7776}{3}} + 1 =$$

$$n^2[(n^3)^{\frac{8886}{3}} - 1] - n[(n^3)^{\frac{7776}{3}} - 1] + n^2 - n + 1.$$

Dar $(n^3)^{\frac{8886}{3}} - 1 = (n^2)^{2962} - 1$ se divide la:

$n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1)$ şi $(n^3)^{\frac{7776}{3}} - 1 = (n^3)^{2592} - 1$

se divide la $n^3 + 1$. Prin urmare numărul dat se divide la: $n^2 - n + 1$.

36. $9x^5 - 5x^3 - 4x = 9x^5 - 6x^3 - 3x + x^3 - x =$
$= 3(3x^5 - 2x^3 - x) + (x - 1)x(x + 1)$, care se divide la 3.
$9x^5 - 5x^3 - 4x = 10x^5 - 5x^3 - 5x - x^5 + x =$
$= 5(2x^5 - x^3 - x) - x(x - 1)(x + 1)$, care se divide la 5.

Expresia se mai poate scrie:

$$9x^5 - 5x^3 - 4x = x[8x^4 - 8 + (x^4 - 5x^2 + 4)] =$$
$$= x[8(x^4 - 1) + (x^2 - 4)(x - 1)(x + 1)].$$

Dacă x este un număr impar, atunci $x - 1$ şi $x + 1$ sînt numere pare şi produsul lor care se divide la 8 şi deci $N \vdots 8$. Dacă x este un număr par se arată că expresia $9x^5 - 5x^3 - 4x$ se divide la 8. Prin urmare $9x^5 - 5x^3 - 4x$ se divide la produsul $3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$.

37. $9^n(9^n + 1) + 1 = 9^{2n} + 2 \cdot 9^n + 1 - 9^n =$

$= (9^n + 1)^2 - (3^n)^2 = (9^n + 1 - 3^n)(9^n + 1 + 3^n) =$

$= [3^n(3^n - 1) + 1][3^n(3^n + 1) + 1]$, care în mod evident se divide la $3^n(3^n + 1) + 1$.

42. Avem: $1000a + 100b + 10c + a = (5c + 1)^2$.
unde $0 < a < 9$; $0 < b < 9$; $0 < c < 9$ sau:
$1000a + 100\,b - 25\,c^2 = 1 - a$.

Partea stîngă a acestei egalităţi se divide la 25 şi prin urmare din condiţia ca $1 - a$ să se dividă la 25 obţinem $a = 1$. Prin urmare avem: $c^2 = 4(b + 10)$. De unde rezultă că $b + 10 = 16$ sau $b = 6$ şi $c = 8$. Numărul căutat este 1681.

43. $\dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!} = 4C_{2n-1}^{n} - C_{2n+1}^{n}$

44. Să presupunem că ar exista un astfel de număr $\overline{xyz}$. Să notăm cu d raţia progresiei şi atunci obţinem:

$$y = x + d;\ z = x + 2d$$

Avem: $x + y + z = 3x + 3d = 3(x + d)$ şi prin urmare suma cifrelor sale se divide la 3.

45. Dacă $a = 0$, atunci ecuaţia dată are forma $x = 0$. Dacă $a = -1$, atunci ecuaţia devine $x - 2 = 0$; $x = 2$. Dacă $a \neq 0$ şi $a \neq -1$, obţinem:

$$x_1 = \frac{a-1}{a},\ x_2 = -\frac{a}{a+1},\ \text{unde}\ x_1 = 1 - \frac{1}{a};\ x_2 = -1 + \frac{1}{a+1}$$

Dacă $a = 1$, atunci $x_1 = 0$ şi dacă $a = -2$, atunci $x_2 = -2$.
Răspuns:

$$a = 0;\ x = 0;$$

$$a = -1;\ x = 2;$$

$$a = 1;\ x = 0;$$

$$a = -2;\ x = -2;$$

46. Avem $\begin{cases} x + y = a^2 \\ |x - y| = a \end{cases}$

1. Fie $x > y$, atunci: $\begin{cases} x + y = a^2 \\ x - y = a \end{cases}$, de unde rezultă că $x = \dfrac{a(a+1)}{2}$ şi $y = \dfrac{a(a-1)}{2}$, unde a este un număr natural diferit de unitate.

2. Fie $x < y$ atunci obţinem:

$$x = \frac{a(a-1)}{2},\quad y = \frac{a(a+1)}{2}$$

47. Avem: $3x^2 \equiv 0 \pmod 3$, $y^2 \equiv 0 \pmod 3$ sau $y^2 \equiv 1 \pmod 3$, de unde rezultă că $y^2 - 3x^2 \equiv 0 \pmod 3$ sau $y^2 - 3x^2 \equiv 1 \pmod 3$. Dar $8 \equiv 2 \pmod 3$.

48. Ecuaţia dată poate fi scrisă sub forma:

$$y^2 - (1 - 2x)y + (x^2 - 3x - 150) = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{1 - 2x \pm \sqrt{1 - 4x + 4x^2 - 4x^2 + 12x + 600}}{2}$$

$$\text{sau } y_{1,2} = \frac{1 - 2x \pm \sqrt{8x + 601}}{2}$$

Avem:

$$8x + 601 = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1.$$

De unde rezultă că:

$$y_1 = 76 - \frac{x(x-1)}{2}$$

$$y_2 = 75 - \frac{x(x+3)}{2},$$

se obţin două sisteme de inecuaţii:

$$\begin{cases} \frac{x(x+1)}{2} - 75 > 0 \\ 76 - \frac{x(x-1)}{2} > 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \frac{x(x+1)}{2} - 75 > 0 \\ 75 - \frac{x(x+3)}{2} > 0 \end{cases}$$

Din aceste două sisteme deducem:

$$x^2 + x > 150; \quad x^2 - x < 152.$$

Înmulţim ambii membri ai acestor egalităţi cu 4 şi adunăm 1, se obţine:

$$(2x+1)^2 > 601 \qquad (2x-1)^2 < 609 \qquad (1)$$

sau:

$$(2n+1) > 24 \qquad (2n-1) < 25$$
$$n > 11{,}5 \qquad n < 13$$

Din condiţiile (1) rezultă că $n = 12$ şi atunci $x = 3$, $y = 10$. Din cel de-al doilea sistem obţinem:

$$x^2 + 3x < 150 < x^2 + x.$$

Ecuaţia dată admite în mulţimea numerelor întregi soluţia:

$$x = 3, \quad y = 10.$$

49. Avem: $3y^2 = 2(12 + xy)$. Partea dreaptă a acestei ecuaţii se divide la y. Dacă y este un divizor al numărului 24, atunci el poate fi: ± 2; ± 4; ± 6; ± 8; ± 12; ± 24.

Substituind aceste valori în ecuaţia de bază se obţin soluţiile:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 2 \end{cases} \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -2 \end{cases} \begin{cases} x_3 = -3 \\ y_3 = 4 \end{cases} \begin{cases} x_4 = 3 \\ y_4 = 4 \end{cases} \begin{cases} x_5 = -7 \\ y_5 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_6 = 7 \\ y_6 = -6 \end{cases} \begin{cases} x_8 = 17 \\ y_8 = -12 \end{cases}$$

50. Ecuaţia dată poate fi pusă sub forma:

$$2x^2 + xy - 4x - 2xy - y^2 + 4y + 6x + 3y - 12 = 72$$

$$x(2x + y - 4) - y(2x + y - 4) + 3(2x + y - 4) = 72$$

$$(2x + y - 4)(x - y + 3) = 72.$$

Din sistemul: $\begin{cases} 2x + y - 4 = -72 \\ x - y + 3 = 1 \end{cases}$ se obţin soluţiile:

$3x - 1 = 73$ şi atunci $x = \dfrac{74}{3} = 24\,\dfrac{2}{3}$. Din acest sistem nu se obţin soluţii în mulţimea numerelor întregi.

Răspuns:

$$x_1 = 13,\ y_1 = 14,\ x_2 = 6,\ y_2 = 1$$

51. Ecuaţia dată poate fi scrisă sub forma:

$$x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1 = 3x^2y + 3xy^2 + 3xy$$

sau:

$$(x + y)^3 + 1 - 3xy(x + y + 1) = 0$$

$$(x + y + 1)[(x + y)^2 - (x + y) + 1] - 3xy(x + y + 1) = 0$$

$$(x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1) = 0.$$

Dacă $x > 0$, $y > 0$, atunci $x + y + 1 \neq 0$ şi atunci:

$$x^2 - xy + y^2 - x - y + 1 = 0$$

sau:

$$x^2 - (y+1)x + (y^2 - y + 1) = 0;$$

$$x = \frac{y + 1 \pm (y-1)\sqrt{-3}}{2}.$$

Pentru ca x să fie un număr real este necesar ca $y - 1 = 0$, $y = 1$. Rezultă că $x = \dfrac{y+1}{2} = 1$.

52. Ecuaţia dată se poate scrie sub forma:

$$2^{x^2-4}(2^{x+2} - 1) = 2^5 \cdot 31.$$

Mai departe se obţine sistemul:

$$\begin{cases} 2^{x^2-4} = 2^5 \\ 2^{x+2} - 1 = 31 \end{cases}$$

Din prima ecuaţie se obţine $x^2 = 9$ sau $x \pm 3$. Dacă înlocuim $x = 3$ în cea de-a doua ecuaţie, obţinem: $2^5 - 1 = 31$. Singura soluţie a ecuaţiei date este $x = 3$.

53. Avem $yz - y - z = 5$

$$yz - y - z + 1 = 6$$

$$(y-1)(z-1) = 6.$$

Dacă $y < z$, atunci din ultima ecuaţie se obţine sistemul:

$$\begin{cases} y - 1 = 1 \\ z - 1 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} y - 1 = 2 \\ z - 1 = 3. \end{cases}$$

Din primul sistem se obţine: $y = 2$, $z = 7$ şi din al doilea $y = 3$, $z = 4$. Înlocuind aceste valori în ecuaţiile date se obţin soluţiile:

$$x_1 = 5;\ y_1 = 2;\ z_1 = 7;$$

$$x_2 = 7;\ y_2 = 3;\ z_2 = 4.$$

Sistemul fiind simetric relativ la necunoscutele $y, z (y > z)$. Avem :

$$x_3 = 5 ; \; y_3 = 7 ; \; z_3 = 2 ;$$

$$x_4 = 7 ; \; y_4 = 4 ; \; z_4 = 3.$$

54. Ecuaţia dată poate fi scrisă sub forma :

$(x^x - 2x) + (y^y - y) = 0$ sau

$x(x^{x-1} - 2) + y(y^{y-1} - 1) = 0.$

Dacă $x > 2$ atunci $x - 1 > 1$.
Obţinem : $x^{x-1} > 2^{x-1} > 2^1 x - 1$ şi prin urmare pentru $x > 2$ are loc inegalitatea : $x(x^{x-1} - 2) > 0$.
În mod asemănător, dacă $y > 1$ are loc inegalitatea :

$$y(y^{y-1} - 1) > 0.$$

În final se găseşte că $x = 2$, $y = 1$, este soluţia ecuaţiei date în mulţimea numerelor naturale.

55. $(xy + 2x + y + 2) = 2xy$

$x(y - 2) + (y - 2) = 4$

$$(x - 1)(y - 2) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 \\ y - 2 = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 1 = 4 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 1 = 2 \\ y - 2 = 2 \end{cases}$$

62. Să notăm $\frac{1}{x} = y$ şi atunci obţinem :

$x + y = 1$ şi $xy = 1$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 1 - 2 = -1$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^2 - xy + y^2 =$$
$$= (x^2 + y^2) - xy = -2$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) =$$
$$= (-1) \cdot (-2) - 1^2 \cdot 1 = 1$$

63. $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$ şi atunci avem:

$$P = 3\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{1}{3^{2n-1}}\right)$$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3^2};$$

$$\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{3^2}\right) = 1 - \frac{1}{3^{2^2}}$$

$$P = 3\left(1 - \frac{1}{3^{2^n}}\right).$$

64. Avem egalitatea:

$2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2)$; $2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2)$.

Ţinînd seama de condiţiile problemei obţinem:

$\begin{cases} xy = ab \\ x + y = a + b \end{cases}$ de unde rezultă că $x = a$; $y = b$ sau

$x = b$; $y = a$.

În ambele cazuri avem: $x^n + y^n = a^n + b^n$.

65. $(ax + by + cz)^2 = 0$, $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2bcyz +$

$$+ 2caxz + 2abxy = 0 \qquad \text{(I)}$$

Numitorul expresiei raţionale poate fi scris sub forma:

$$a(b + c)x^2 + b(c + a)y^2 + c(a + b)z^2 - 2bcyz - 2cazx - 2abxy.$$

Dacă scădem din această egalitate partea stîngă egalitate (1) care este egală cu zero, atunci obţinem:

$a(a + b + c)x^2 + b(a + b + c)y^2 + c(a + b + c)z^2$,

sau:

$$(a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2).$$

Fracția dată poate fi adusă la forma :

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{(a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2)} = \frac{1}{a + b + c}.$$

66. $a + b + c = 0$ sau $a^2 + b^2 + c^2 \neq 2ab + 2ac + 2bc = 0$ De unde obținem : $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$. Dacă ridicăm ambii membri ai acestei expresii la pătrat obținem :

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = [4(a^2b^2 + b^2c^2) + a^2 + 2abc\,(a + b + c)].$$

Din condiția $a + b + c = 0$ obținem :

$$(a^2 + b^2 + c^2) = [4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)] \qquad (1)$$

Pe de altă parte.avem :

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Prin urmare avem :

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 4(a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2).$$

De unde rezultă că :

$$2(a^4 + b^4 + c^4) = 4(a^2 + b^2 + b^2c^2 + c^2a^2). \qquad (2)$$

Din egalitățile (1),(2) se obține :

$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4).$

67. Se înmulțesc ambii membri ai acestei egalități cu $\sqrt[3]{\alpha}$ și se obține : $a\alpha + b\sqrt[3]{\alpha^2} = c\sqrt[3]{\alpha}$. Dacă se elimină între cele două egalități $\sqrt[3]{\alpha^2}$ se obține : $(b^2 + ac).\ \sqrt[3]{\alpha} = bc + a^2\alpha$ sau :

$$\begin{cases} b^2 + ac = 0 \\ bc + a^2\alpha = 0 \end{cases} \quad \alpha = -\frac{bc}{a^2} = \frac{-abc}{a^3} = -\frac{b^3}{a^3}; \quad \sqrt[3]{\alpha} = -\frac{b}{a}$$

$$a = 0; \quad b = 0; \; b^2 + ac = 0$$

68. Se notează: $\dfrac{a\sqrt[3]{\alpha^2}+b\sqrt[3]{\alpha}+c}{a'\sqrt[3]{\alpha^2}+b'\sqrt[3]{\alpha^2}+c'}=\lambda$. Din această relație se obține $(a-\lambda a')\sqrt[3]{\alpha^2}+(b-\lambda b')\sqrt[3]{\alpha}=-(c-\lambda c')$, sau:

$$a-\lambda a'=0;\ b-\lambda b'=0;\ \lambda-\lambda c'=0.$$

69. Din relația evidentă $\dfrac{ax+b}{a'x+b'}=r$ se deduce:

$ax+b=r(a'x+b')$ sau: $x(a-ra')=rb'-b$.

Deoarece $rb'-b$ este rațional, $x\ (a-ra')$ este rațională și prin urmare $a-ra'=0$

$$\frac{a}{a'}=r;\quad rb'-b=0;\quad \frac{b}{b'}=r \text{ sau } \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=r$$

70. $\cos 30° = 2\cos^2 15° - 1 = 1 - 2\sin^2 15$ sau $\sin 15^0 = \sqrt{\dfrac{1-\cos 30°}{2}}$

71. Se notează $a=3+\sqrt{\dfrac{371}{27}}$; $b=-3+\sqrt{\dfrac{371}{27}}$; $x=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ și se obține: $x^3=a-b-3\sqrt[3]{ab}\,x$; $a-b=6$; $ab=\left(\dfrac{5}{3}\right)^3$

de unde rezultă $a^3=6-5x \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+6)=0 \Rightarrow x=1$

72. Să notăm $x=\sqrt[3]{3}-\sqrt{2} \Leftrightarrow x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{3}$
sau $(x-\sqrt{2})^3=3=x^3-3\sqrt{2}x^2+6x-2\sqrt{2}$.
Din această relație obținem:

$$(x^3+6x-3)^2=2(3x^2+2)^2$$

sau:

$$x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0$$

observă că $x=\pm 1$ nu sînt rădăcini.

74. $z = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{4}$;

76. $z = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

83. $\alpha = \frac{k\pi}{2n}$; $k \in N$; 90. $z = \left[1, \frac{2k\pi}{5}\right]$;

84. $S_n = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos(n+1)\frac{x}{2}$; $T_n = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin(n+1)\frac{x}{2}$;

85. $E = \cos 2x + \mathrm{i}\sin 2x$;

86. $E = -1$;

87. $x_k = -\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right)$;

88. $Z = \frac{3}{2} - 2i$;

89. $S_1 = \frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}\cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$,

$$S_2 = \frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

90. $|z| = 1$;

96. $z = 0$, dacă $n \neq 1$; $z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$

102. $\frac{(1+\mathrm{i})^{2n+1}\cdot(1+\mathrm{i})^{2n-1}}{2^{2n-1}} = \frac{(1+\mathrm{i})^{4n}}{2^{2n-1}} = \frac{[(1+\mathrm{i})^2]^{2n}}{2^{2n-1}} =$

$$= \frac{(2\mathrm{i})^{2n}}{2^{2n-1}} = \frac{2^{2n}}{2^{2n-1}}\cdot \mathrm{i}^{2n} = (-1)^n\cdot 2$$

103. $\left|\left[\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2\right]^{12}\right| =$

$= 2^{12}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{12} = 2^{12}\left[\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2\right]^6 =$

$= 2^{12}(2\sqrt{3}+2i)^6 = 2^{18}(\sqrt{3}+i)^6 = 2^{18}[(\sqrt{3}+i)^2]^3 =$

$= 2^{18}\cdot 2^3(1+i\sqrt{3})^3 = 2^{21}\cdot(-2)^3 = -2^{24}.$

107. Din ecuația dată avem : $a = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ sau

$$a_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2};\quad a_2 = \frac{1}{a_1} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2};$$

$$a = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3};$$

$$\frac{1}{a} = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

108. $Z|Z|^{-1} + |Z|Z^{-1} = m(\cos\alpha + i\sin\alpha)m^{-1} +$
$+ m\cdot m^{-1}(\cos\alpha - i\sin\alpha) = 2\sin\alpha.$

Cap. 19. Matrici

3. $x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

4. $x = \dfrac{1}{17}(A - 6B - 2C)$; 7. $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

9. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab-ab \\ ac-ac & a^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

11. $B^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin^2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

12. $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$;

13) *a*) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$;

14. *a*) $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$; *b*) $\begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}$; *c*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} \cos n\alpha; & -\sin n\alpha \\ \sin \alpha; & -\cos n\alpha \end{pmatrix}$; *e*) $\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$;

15. *a*) $\begin{pmatrix} -1; & -1 \\ 2; & 3 \end{pmatrix}$; *b*) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; *c*) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

17. *a*) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; *b*) $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; *d*) $\begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

21. *a*) 2; *b*) 3; *c*) 4; *d*) 5.

23. *b*) $-2(x^3 + y^3)$; *c*) $\sin(\alpha - \beta)$; *d*) 0; *h*) 0; *i*) $2ab$; *j*) 0

27. *a*) 0; *b*) 0; *c*) 0; *d*) 0.

37. Să punem $\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} = aE + bI + cJ + dK,$

unde $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Avem :

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E;\ IJ = JI = c$$

Cap. 20. Calcul informațional

16. Pentru ca din trei segmente să se poată construi un triunghi, fiecare dintre ele trebuie să fie mai mic decît suma celorlalte două. Deoarece suma celor trei segmente este egală cu l, fiecare segment va trebui să fie mai mic decît $\frac{l}{2}$. Coordonatele punctelor B și C, adică x și y, vor trebui să satisfacă dubla inegalitate: $0 \leqslant x \leqslant l$ și $0 \leqslant y \leqslant l$.

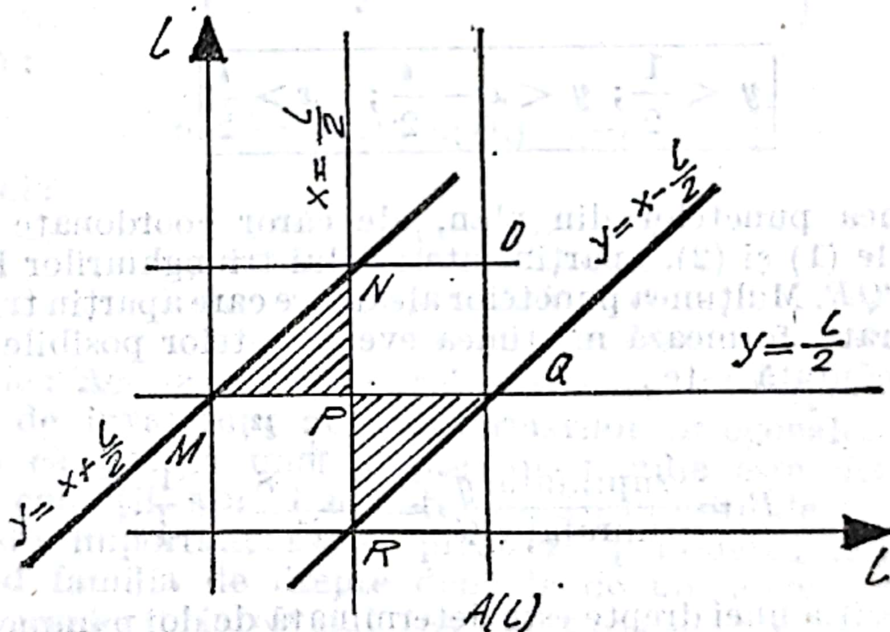


Fig. 20.1

Aceste coordonate sînt satisfăcute de coordonatele oricărui punct din interiorul patratului (fig. 20.1).

1) Să considerăm primul caz în care punctul C este mai la dreapta de punctul B.

Deoarece segmentul are o lungime mai mică decît $\frac{l}{2}$, atunci şi coordonatele x şi y trebuie să satisfacă condiţiile :

$$x < \frac{1}{2}, \; y - x < \frac{l}{2} ;$$

$$l - y < \frac{l}{2},$$

sau :

$$\boxed{x < \frac{l}{2} ; \; y < x + \frac{l}{2} ; \quad y > \frac{l}{2}} \qquad (1)$$

În al doilea caz presupunem că punctul B se află la dreapta punctului C.

În acest caz, coordonatele x şi y verifică dubla inegalitate :

$$y < \frac{l}{2} ; \; x - y < \frac{l}{2} ; \; 1 - x < \frac{l}{2} \text{ sau :}$$

$$\boxed{y < \frac{1}{2} ; \; y < x - \frac{l}{2} ; \quad x > \frac{l}{2}} \qquad (2)$$

Mulţimea punctelor din plan, ale căror coordonate satisfac inegalităţile (1) şi (2), aparţin interiorului triunghiurilor haşurate MNP şi PQR. Mulţimea punctelor aleatoare care aparţin triunghiurilor haşurate formează mulţimea evenimentelor posibile. Probabilitatea căutată este :

$$P = \frac{\text{suprafaţa } g}{\text{suprafaţa } G} = \frac{\frac{l^2}{8} + \frac{l^2}{8}}{l^2} = \frac{1}{4}.$$

20. Poziţia unei drepte este determinată de doi parametri : distanţa p de la centru pînă la coardă şi unghiul φ care-l face direcţia coardei cu direcţia pozitivă a axei xx' (fig. 20.2).

Domeniul D al punctelor (p, φ) care generează mulţimea coardelor este dreptunghiul determinat de relaţiile :

$$0 \leqslant p \leqslant R ;$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Dacă dreapta este mai mică decît latura triunghiului, atunci: $p < a_3 (a_3$ este apotema triunghiului echilateral).

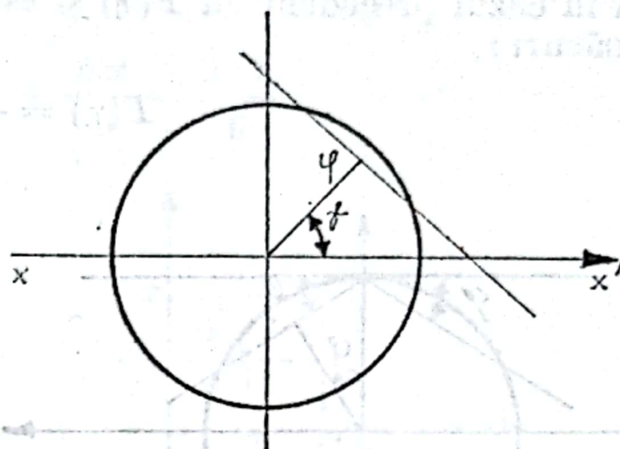


Fig. 20.2

Domeniul D_0 al punctelor (p, φ) care generează submulţimea coardei mai mici decît latura triunghiului este domeniul determinat de relaţiile:

$$D_0 = \left\{ (p, \varphi) \ \frac{R}{2} \leqslant p \leqslant R;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \right\}$$

Avem:

$$\mu(D) = 2\pi R,\ \mu(D_0) = \pi R$$

Atunci:

$$p(\eta) = \frac{\mu(D_0)}{\mu(D)} = \frac{\pi R}{2\pi R} = \frac{1}{2}$$

Observaţie: Acesta este singurul caz în care se aplică formula grupului de invarianţă al transformărilor ortogonale. Dacă se consideră că poziţia unei drepte din familie este determinată prin alte condiţii, atunci se obţin soluţii diferite de aceasta. De aceea, este important să se precizeze parametrii familiei. În cazul cînd familia de drepte depinde de un singur parametru trebuie considerat intervalul său de variaţie, ale cărei puncte generează familia de drepte. Măsura unei mulţimi a familiei de drepte este egală cu lungimea intervalului (a, b) de variaţie al parametrului: $\mu(\eta) = \mu[(a, b)] = b - a$ (fig. 20.3). Măsura fami-

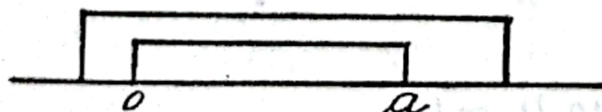


Fig. 20.3

liei este lungimea e a întregului interval de variaţie care generează familia. Probabilitatea unei submulţimi de drepte se notează ca şi în cazul precedent cu $P(\eta)$ şi este egală cu raportul celor două măsuri:

$$P(\eta) = \frac{b-a}{2}$$

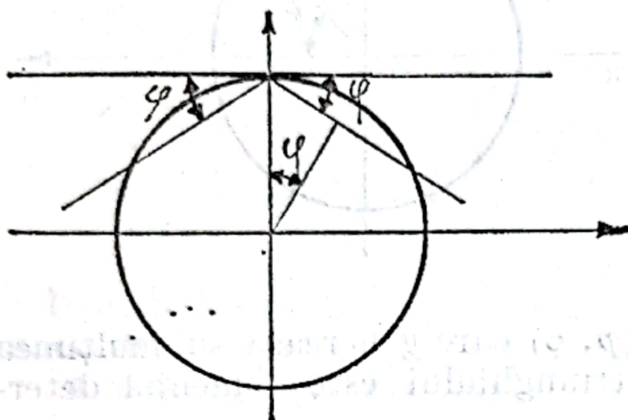


Fig. 20.4

21. Se observă că domeniul O al parametrilor (p, φ) ale cărui puncte generează familia de coordonate este: (fig. 20.5):

$$D = \left\{(p, \varphi)/0 \leqslant p \leqslant R;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$$

Fie AB latura triunghiului echilateral înscris în cerc. Avem:

$$P_0 = \overline{OP} = a_3 = \frac{R}{2};\ \varphi_0 = \frac{\pi}{3}$$

Domeniul D al parametrilor (p, φ) care generează subfamilia de drepte este reuniunea a două domenii (fig. 20.5a şi fig. 20.5b)

$$D_1 = \left\{(p, \varphi)/0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3};\ \frac{R}{2} \leqslant p \leqslant R\right\}$$

$$D_2 = \left\{(p, \varphi)\ /\ \frac{2\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \pi;\ \frac{R}{2} \leqslant p \leqslant R\right\},$$

deci:

$$D_0 = D_1 \cup D_2 \quad D \cap D_2 = \emptyset.$$

Avem:

$$\mu(D_0) = \mu(D_1) + M(D_2)$$

sau:

$$\mu(D_0) = \frac{R\pi}{6} + \frac{R\pi}{6} = \frac{2\pi R}{6}.$$

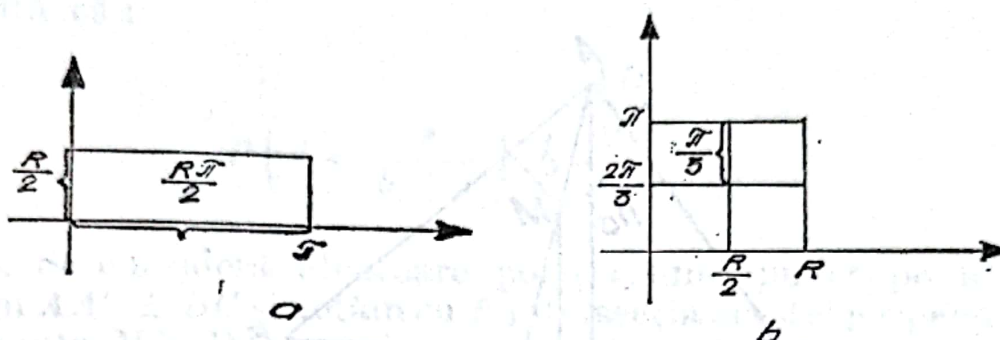


Fig. 20.5

Atunci rezultă:

$$P(\eta) = \frac{\mu(D_0)}{\mu(D)} = \frac{\frac{2\pi R}{6}}{\frac{\pi R}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Să observăm că această problemă admite o soluţie foarte simplă dacă considerăm mulţimea de drepte depinzînd de un singur parametru.

Parametrul este unghiul pe care-l face direcţia coardei cu direcţia pozitivă a tangentei în punctul A. În intervalul de variaţie $[0, \pi]$ al unghiului ale cărui puncte generează familia de coarde subfamilia de coarde este generată de reuniunea de intervale:

$$\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$$

Avem:

$$\mu(I) = \mu(I_0) = \mu\left[0, \frac{\pi}{3}\right] + \mu\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$P(\mu) = \frac{\mu(I_0)}{\mu(I)} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi R}{2}} = \frac{2}{3}$$

22. Este necesar să atragem atenţia că în această problemă se consideră aleatoare poziţia unui punct pe bisectoare. Fie M un punct oarecare situat pe bisectoarea AD a triunghiului ABC. Să notăm cu d şi d'' distanţele de la punctul M la laturile AB şi BC ale triunghiului. Din fig. 20.6 rezultă :

$$db + dc + d'a = 2s \quad \text{sau} \quad d(b + c) + d'a = 2s$$

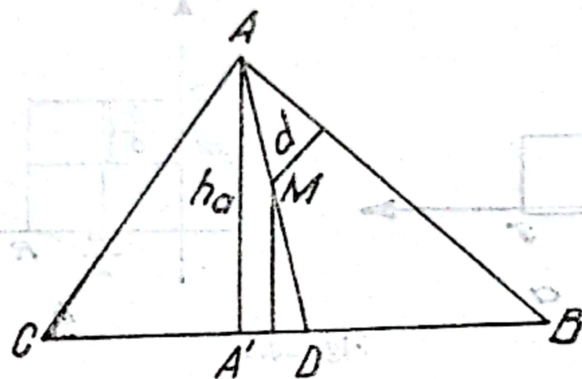


Fig. 20.6

de unde :

$$d = \frac{2s - d'a}{b + c}$$

Tot din figură rezultă :

$$\frac{d'}{AA'} = \frac{MD}{AD} \quad \text{sau} \quad \frac{d'}{h_a} = \frac{MD}{AD} = m \quad \text{deci} \quad d' = mh_a$$

Din relaţiile de mai sus rezultă :

$$d = \frac{3s - maha}{b + c} \cdot \frac{2s - 2s_m}{b + c} = \frac{2s(1 - m)}{b + c}$$

Să notăm cu $1 - m = m'$ şi observăm că :

$$1 - m = 1 - \frac{MD}{AD} = \frac{AD - MD}{AD} = \frac{AM}{AD}.$$

Din ipoteza problemei rezultă că : $d < \dfrac{s}{b + c}$

sau :

$$\frac{2sm'}{b + c} < \frac{s}{b + c} \ ; \ m' < \frac{1}{2}$$

Deci evenimentele $d < \frac{s}{b+c}$ și $m' < \frac{1}{2}$ sînt echivalente. Măsura geometrică a mulțimii punctelor situate pe bisectoare este AD, va măsura mulțimea punctelor care realizează evenimentul $m' < \frac{1}{2}$ este $\frac{AD}{2}$.
Rezultă că :

$$P\left(d < \frac{s}{b+c}\right) = \frac{\frac{AD}{2}}{AD} = \frac{1}{2}.$$

23. Se consideră aleatoare poziția unui punct pe înălțime. Ducem $AA' \perp BC$ și notăm cu E intersecția acestei perpendiculare cu dreapta MN. Dacă notăm cu a, b, c laturile triunghiului, atunci din figura 20.7 rezultă :

$$\frac{MC}{CA} = \frac{BN}{BA} = \frac{EA'}{AA'}$$

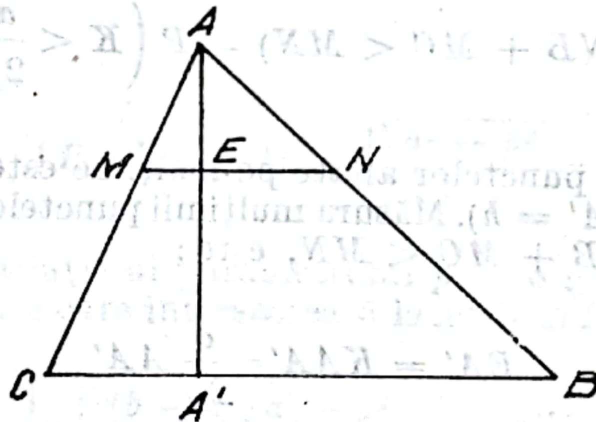


Fig. 20.7

Să notăm $\frac{EA'}{AA'} = K$ Atunci rezultă că :

$$\frac{MC}{CA} = \frac{BN}{BA} = K; \frac{NC + BM}{CA + CB} = K,$$

sau :

$$MC + BN = K(b + c).$$

Să observăm că:

$$1 - K = 1 - \frac{A'E}{AA'} = \frac{AA' - A'E}{AA'} = \frac{AE}{AA'} =$$

$$= \frac{MN}{a} \text{ sau } MN = a\,(1 - K)$$

Ținînd seama de condiția dată în problema și de relațiile de mai sus deducem:

$$K(b + c) < a(1 - K)$$

De unde rezultă imediat:

$$K(a + b + c) < a \text{ sau } K < \frac{a}{2p}.$$

Evenimentele $NB + MC < MN$ și $K < \frac{a}{2p}$ sînt echivalente, deci:

$$P(NB + MC < MN) = P\left(K < \frac{a}{2p}\right).$$

Măsura mulțimii punctelor aflate pe înălțime este egală cu lungimea înălțimii ($AA' = h$). Măsura mulțimii punctelor care realizează evenimentul: $NB + MC < MN$, este:

$$EA' = KAA' = \frac{a}{2p}\,AA'$$

Atunci: $P(NB + MC < NM) = \frac{EA'}{AA'} = \frac{a}{2p}$.

Probabilitatea cerută este $\frac{a}{2p}$.

24. Fie M mijlocul segmentului de dreapta BC. Poziția unui anumit segment din familie este determinată dacă se cunoaște distanța p de la punctul M la mijlocul segmentului.

Familia segmentelor de dreaptă depinde de un singur parametru (fig. 20.8 *a*).

Fie RQ poziţia unui segment din familie care intersectează ambele laturi ale triunghiului, în punctele R şi Q. (fig. 20.8 b)

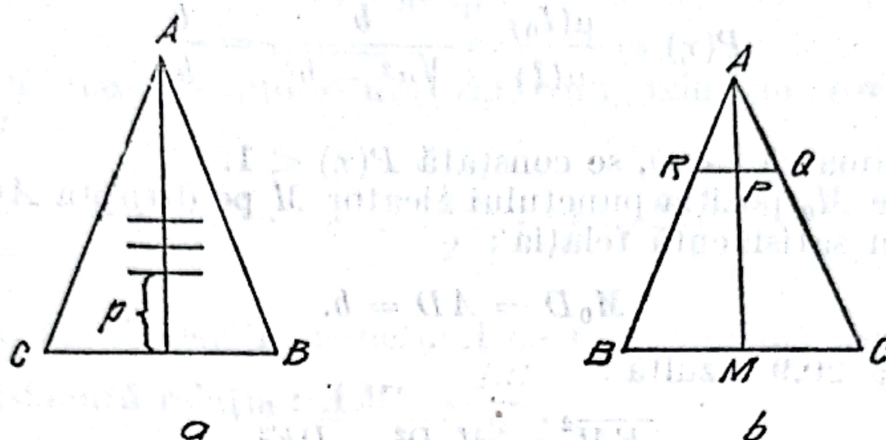


Fig. 20.8

Avem : $\frac{AP}{AM} = \frac{PQ}{MC}$, sau $\frac{\overline{AP}}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{1}{b}$; rezultă : $AP = \frac{1\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

deci :

$$MP = AM - AP = \sqrt{a^2-b^2} - \frac{1\sqrt{a^2-b^2}}{b} = \frac{(b-1)\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

Intervalul de variaţie al parametrului p care generează submulţimea de segmente care intersectează laturile AB şi AC este :

$$I_0 = \left\{p \,\middle|\, \frac{(b-1)\sqrt{a^2-b^2}}{b} \leqslant p \leqslant \sqrt{a^2-b^2}\right\}.$$

Intervalul de variaţie al parametrului p ale cărui puncte generează familia de segmente este :

$$I = \{p \mid 0 \leqslant p \leqslant \sqrt{a^2-b^2}\}$$

Avem :

$$\mu(I) = \sqrt{a^2-b^2},\ \mu(I_0) = \frac{l\sqrt{a^2-b^2}}{b};$$

atunci:

$$P(\eta)=\frac{\mu(I_0)}{\mu(I)}=\frac{\frac{l\sqrt{a^2-b^2}}{b}}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{l}{b}$$

Ţinînd seama că $l<b$, se constată $P(\eta)<1$.

25. Fie M_0 poziţia punctului aleator M pe dreapta AC pentru care avem satisfăcută relaţia:

$$M_0D=AD=b. \qquad (1)$$

Din figura 20.9 rezultă:

$$\overline{EM_0^2}=\overline{M_0D^2}-\overline{DE^2}$$

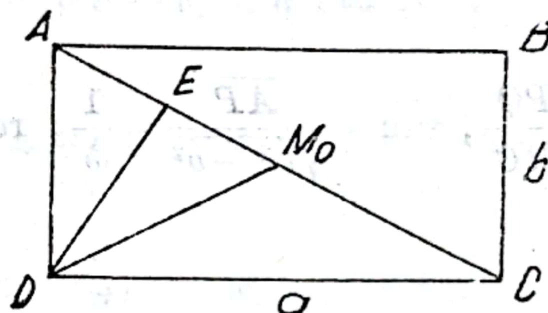


Fig. 20.9

$$DE=\frac{ab}{AC}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad (2)$$

deci:

$$EM_0^2=b^2-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{b^4}{a^2+b^2}\,;\ EM_0=\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}. \qquad (3)$$

Măsura mulţimii punctelor care realizează evenimentul $MD>b$ este:

$$\gamma(l_0)=M_0C$$

$$M_0C=\sqrt{a^2+b^2}-\frac{2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Măsura mulţimii întregii familii de puncte este:

$$\gamma(l)=AC=a^2+b^2,$$

deci:

$$P(\eta) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \qquad (5)$$

26. Din relațiile cunoscute dintr-un triunghi dreptunghic deducem:

$$b = \frac{a}{2}; \quad c = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \qquad (1)$$

Să notăm cu M' poziția punctului de pe ipotenuză pentru care avem satisfăcută relația: $AM' = \frac{BC}{2}$.

Fie M'' simetricul punctului M față de punctul H. Din figura 20.10 deducem:

$$HM' = \sqrt{AM'^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}} = \frac{a}{4}. \qquad (2)$$

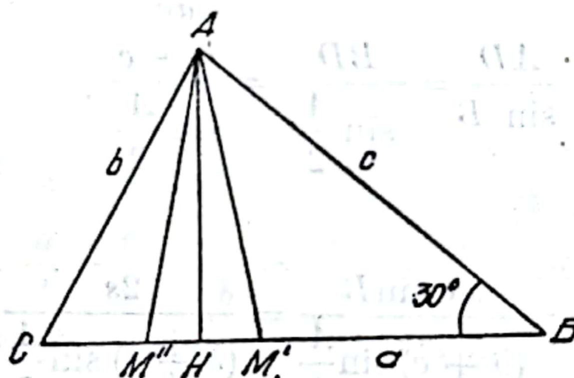


Fig. 20.10

Măsura geometrică a mulțimii punctelor care realizează evenimentele:

$$AM < \frac{BC}{2} \text{ este } \gamma(l_0) = \frac{a}{2}. \qquad (3)$$

Măsura mulțimii punctelor dreptei BC este $\gamma(l) = a$;

$$P(\eta) = \frac{\gamma(l_0)}{\gamma(l)} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}. \qquad (4)$$

Să se afle care este probabilitatea luînd la întîmplare un punct M pe bisectoarea unghiului A al triunghiului ABC, să avem relația $\widehat{CMB} > 90° + \frac{A}{2}$.

27. Să notăm cu O centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

$$\widehat{COB} = \widehat{COD} + \widehat{DOB} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = 90° + \frac{\hat{A}}{2}. \quad (1)$$

Rezultă deci că mulțimea punctelor care realizează evenimentul:

$$\widehat{CMB} > 90° + \frac{\hat{A}}{2} \text{ este } \gamma(l_0) = \overline{OD}.$$

Măsura mulțimii punctelor situate pe bisectoarea unghiului A este $\gamma(l) = AD$. Din figură deducem:

$$\frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\frac{ac}{b+c}}{\sin \frac{A}{2}}. \quad (2)$$

De unde rezultă:

$$AD = \frac{ac \sin B}{(b+c)\sin \frac{A}{2}} = \frac{2s}{(b+c)\sin \frac{A}{2}}. \quad (3)$$

Din triunghiul dreptunghic OEA ($OE \perp AC$), rezultă:

$$OA = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{s}{p \sin \frac{A}{2}}. \quad (4)$$

De unde avem:

$$OD = AD - OA = \frac{2sp - s(b+c)}{p(b+c)\sin \frac{A}{2}} = \frac{sa}{p(b+c)\sin \frac{A}{2}} \quad (5)$$

$$P(\gamma) = \frac{\gamma(l_0)}{\gamma(l)} = \frac{OD}{AD} = \frac{sa}{p(b+c)\sin\frac{A}{2}} \cdot \frac{(b+c)\sin\frac{2A}{2}}{2s} = \frac{a}{24} \cdot \quad (6)$$

Cap. 24. Probleme cu conţinut practic

Soluţie :

1. $20\,\text{kg} \cdot 15°\text{C} \cdot 0{,}09\,\text{cal/g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} + 120\,\text{kg} \cdot 1\,\text{cal/g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1}\, 15°\text{C} + 80\,\text{kg} \cdot 1\,\text{cal/g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} \geqslant 20\,\text{kg}\, 30°\text{C} \cdot 0{,}09\,\text{cal/g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} + (120\,\text{kg} + x)\, 1\,\text{cal/g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} \cdot 30°\text{C}$;

$20\,\text{kg} \cdot 15°\text{C} \cdot 0{,}09\,\text{cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} + 120\,\text{kg cal g}^{-1}\,\text{grd}^{-1} \cdot 15° + 80\,\text{kg} \cdot 1\,\text{cal g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} x \leqslant 20\,\text{kg} \cdot 40°\text{C} \cdot 0{,}09\,\text{cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} + (120\,\text{kg} + x) \cdot 1\,\text{cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grd} \cdot 40°\text{C}$.

Rezultă : $36{,}540\ \text{kg} \leqslant x \leqslant 76{,}125\ \text{kg}$.

2. Fie $0 < b < a$. Fracţia $\frac{a}{b}$ este subunitară, numărătorul şi numitorul sînt pozitivi. Din diferenţa $\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b}$ pentru $0 < c$, rezultă $\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} = \frac{(b-a)c}{b(b+c)} < 0$, deoarece conform datelor avem $0 < b < a$ şi $0 < c$. Atunci în cazul considerat avem: $\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$. O fracţie subunitară al cărui numărător şi numitor sînt pozitivi, se micşorează dacă numărătorului şi numitorului i se adaugă acelaşi număr pozitiv. Raportul dintre suprafaţa pardoselii şi suprafaţa ferestrelor se micşorează dacă se măresc simultan cu aceeaşi cantitate. Exemplu :

— Fie suprafaţa pardoselii 24 m², iar a ferestrelor 2 m². Vom avea $\frac{24}{2} \cdot 100 = 1200\%$. Dacă vom mări în acelaşi timp cu 6 m², vom obţine : $\frac{30}{8} \cdot 100 = 375\% < 1200\%$.

3. Din formula aplicată în fizică $\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$, unde b este distanța imaginei, g distanța obiectului, f distanța focală a oglinzii concave, rezultă:

$$\frac{b}{g}=\frac{f}{g-f}. \tag{1}$$

Factorul de proporționalitate dintre mărirea liniară a imaginii și a obiectului este $\frac{b}{g}$. Din ecuația (1), ținînd cont de datele problemei, rezultă sistemul de ecuații:

$$\frac{f}{|g-f|}>2;\ \frac{f}{|g-f|}<3. \tag{2}$$

Distingem două cazuri:

1) — Formarea unei imagini reale. Dacă $f<g$, atunci avem $0<g-f$ și deci $|g-f|=g-f$. În acest caz sistemul (2) ia forma:

$$\begin{cases}\dfrac{f}{g-f}>2\\[2ex]\dfrac{f}{g-f}<3\end{cases} \tag{3}$$

Dacă rezolvăm sistemul (3) în raport cu g, obținem:

$$1\frac{1}{3}f<g<1\frac{1}{2}f.$$

2) — Forma unei imagini virtuale. Dacă $g<f$ și, deci, $g-f<0$, atunci avem $|g-f|=f-g$. În acest caz sistemul (2) devine:

$$\begin{cases}\dfrac{f}{f-g}>2\\[2ex]\dfrac{f}{f-g}<3\end{cases} \tag{4}$$

Rezultă $\frac{1}{2} f < g < \frac{2}{3} f$.

În cazul în care $g = f$, raza reflectată este dirijată paralel cu axa optică deci nu se produce nici o imagine.

4. Pentru ca masa sulului de hîrtie să se micşoreze cu m_1 (kg), ea trebuie derulată pînă la diametrul d_1 (cm). Dacă masa ar trebui să se micşoreze cu m_2(kg), sulul ar trebui derulat pînă la diametrul d_2. Fie diametrul căutat notat cu d_x.

Din $m_1 \leqslant m_x \leqslant m_2$, rezultă $d_2 \leqslant d_x \leqslant d_1$. (1)

Pentru volumul întregului sul de hîrtie şi hîrtia derulată, se obţine:

$$V = \frac{\pi b D^2}{4} \tag{2}$$

$$V_1 = \frac{\pi b (D^2 - d_1^2)}{4} \tag{3}$$

$$V_2 = \frac{\pi b (D^2 - d_2^2)}{4} \tag{4}$$

În acest caz b este lăţimea sulului, V — volumul întregului sul, iar V_1 şi V_2 — volumul hîrtiei derulate cu masa m_1 şi, respectiv, cu masa m_2. Fie D — diametrul întregului sul de hîrtie. Evident, vom avea : $\frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1}{V_2}$ şi $\frac{m_2}{m} = \frac{V_2}{V}$. Prin urmare, rezultă :

$$\frac{m_1}{m} = \frac{D^2 - d_1^2}{D^2} \tag{5}$$

$$\frac{m_2}{m} = \frac{D^2 - d_2^2}{D^2} \tag{6}$$

şi, mai departe :

$$d_1 = D \sqrt{\frac{m - m_1}{m}} \tag{7}$$

$$d_2 = D \sqrt{\frac{m - m_2}{m}} . \tag{8}$$

Din (7), (8) şi (1) rezultă :

$$D\sqrt{\frac{m-m_2}{m}} \leqslant d_x \leqslant D\sqrt{\frac{m-m_1}{m}}. \qquad (8)$$

5. Fie x adîncimea arăturii iar puterea tractorului $y(CP)$. Atunci pentru aratul unui hectar de teren la o rezistenţă specifică $f(\mathrm{N/cm^2})$ se va consuma un lucru mecanic :

$$a\cdot x\cdot f\cdot\frac{10\,000\,m^2}{a}.$$

În acest caz se consideră (a) lăţimea brazdei în m, iar după simplificări se obţine $10^4\cdot f\cdot x\,\mathrm{m}^2$. Dacă lucrul mecanic se efectuează în timpul t, atunci puterea necesară va fi :

$$\frac{10^4\cdot f\cdot x}{75\cdot 3600}, \text{ adică } \frac{f\,x}{27\,f}\cdot\frac{m\cdot CP\cdot h}{\mathrm{N}}.$$

În mod analog rezultă puterea necesară pentru aratul unui hectar, în timpul t_1 (în ore) la rezistenţa specifică a terenului de f_1 (în $\mathrm{N/cm^2}$), şi anume :

$$\frac{f_1x}{27\,t_1}\cdot\frac{m\cdot CP\cdot h}{N}.$$

Problema conduce la sistemul :

$$\frac{fx}{27\,t} \leqslant y \leqslant \frac{f_1x}{27\,t_1},$$

unde $0{,}1\ \mathrm{m} < x < 0{,}85\ \mathrm{m}$, trebuie să fie adevărat.

Pentru $f = 8\ \mathrm{N/cm^2}$, $t = 1\ \mathrm{h}$; $f_1 = 12\ \mathrm{N/cm^2}$ şi $t_1 = 1{,}4\ \mathrm{h}$, rezultă :

$$296{,}3\ \mathrm{CP}\cdot\mathrm{m^{-1}}\ x \leqslant y \leqslant 317{,}6\ \mathrm{CPm^{-1}}x.$$

Fie $x = 0{,}25$ cm, rezultă $74{,}1\ \mathrm{CP} \leqslant y \leqslant 79{,}4\ \mathrm{CP}$.

6. Problema duce la sistemul de inecuaţii :

$$\frac{24}{x-6}+\frac{24}{x+6} \leqslant 3. \qquad 6 < x.$$

Acest sistem poate fi simplificat astfel:

$$0 \leqslant x^2 - 16x - 36, \quad 6 < x.$$

De aici pentru viteza măsurată în km/h, se obține $18 \leqslant x$.

7. Dacă notăm cu $R_1, R_2, \ldots R_n$ rezistența celor n conductori dați, cu R_s rezistența totală pentru conductorii legați în serie și R_p pe cea a conductorilor legați în paralel, în inecuația lui Bunjakovski, avem:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant$$

$\geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n^2)$, mărimile $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se pot înlocui cu $\frac{1}{\sqrt{R_1}}, \frac{1}{\sqrt{R_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{R_n}}$, iar mărimile:

$b_1, b_2, \ldots, b_n$, respectiv cu $\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2}, \ldots, \sqrt{R_n}$, obținem:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right)(R_1 + R_2 + \ldots + R_n) \geqslant n^2. \quad (1)$$

În această inecuație n este un număr cunoscut dat inițial. De aici, tragem următoarea concluzie:

$$\left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right)(R_1 + R_2 + \ldots + R_n)\right] \max = n^2,$$

aceasta avînd loc numai atunci cînd $R_1 = R_2 = \ldots = R_n$, cînd toate rezistențele sînt egale între ele. Conform cunoscutelor legi din fizică privind rezistența conductorilor legați în paralel și în serie, avem: $R_r = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$, respectiv:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}.$$

Astfel pentru problema dată în ecuația (2) se poate simplifica în felul următor:

$$\frac{R_r}{R_p} \geqslant n^2.$$

unde $\frac{R_r}{R_p} = n^2$, are loc atunci și numai atunci cînd toate rezistențele sînt egale, deci: $R_1 = R_2 = \ldots = R_n$.

Exemplu numeric:

Fie $n = 3$; $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 3\Omega$ și $R_3 = 4\Omega$.

Atunci $R_e = 6\Omega$, $R_p = \frac{2}{3}\ \Omega$, $\frac{R_e}{R_p} = 6 : \frac{2}{3} = 9 = 3^2$.

$$R_R = (2 + 3 + 4)\Omega = 9\Omega\ ;\ R_p = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}\ \Omega = \frac{12}{13}\ \Omega;$$

$$\frac{R_R}{R_p} = 9 : \frac{12}{13} = 9\frac{3}{4} > 3^2 = 9.$$

Fie $n = 3$, $R_1 = R_2 = R_3 = 2\Omega$.

8. În ecuația lui Bunjakowski:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant$$
$$\geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2,$$

vom pune: $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$, inecuația va lua forma:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)n \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \text{ sau:}$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)n}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$, fiind perimetrul ferestrelor în m,
$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = A$ — suprafața totală a ferestrelor în m².

Atunci, din inecuația (1), rezultă:

$$4(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \leqslant 4\sqrt{A_n},$$

unde $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ este lungimea totală a perimetrelor celor n ferestre.

Rezultă că valoarea căutată se poate exprima prin inecuația:

$$[4(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)d]\, I_{\max} = 4\sqrt{A_nd} \qquad (3)$$

inecuație ce este valabilă atunci cînd:

$$a_1 + a_2 = \ldots = a_n = \frac{\sqrt{A_n}}{n} = \sqrt{\frac{A}{n}},$$

adică atunci cînd toate n ferestre sînt egale între ele.

9. Valoarea absolută pentru viteza proprie a bărcii, o vom nota cu y m/s, iar viteza curentului apei cu x m/s. Problema conduce atunci la sistemul de inecuații:

$$\frac{60\text{ m}}{(x + y)\text{m/s}} \geqslant 5{,}4\ \text{s}.$$

$$\frac{60\text{ m}}{(y - x)\text{m/s}} \leqslant 7{,}2\ \text{s};\ 0\frac{\text{m}}{\text{s}} < x\frac{\text{m}}{s} < y\frac{\text{m}}{\text{s}}, \qquad (1)$$

unde avem:

$$(30 + x)\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \leqslant y\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \leqslant (40 - x)\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \qquad (2)$$

$$0\,\frac{\text{km}}{\text{h}} < x\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \leqslant 5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Exemplu numeric:

— Fie viteza curentului de 2km/h = 0,55 $m.s^{-1}$; atunci valoarea absolută a vitezei proprii a bărcii va fi:

$$32\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \leqslant y\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \leqslant 38\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Probă. Considerăm viteza proprie de 35 km/h = 9,72 m/s. Din sistemul de inecuaţii (1), rezultă:

$$\frac{60}{(9{,}72 + 0{,}55)}\,\text{s} \approx 5{,}8\,\text{s} > 5{,}4\,\text{s},$$

$$\frac{60}{(9{,}72 - 0{,}55)}\,\text{s} \approx 6{,}5\,\text{s} < 7{,}2\,\text{s}.$$

10. Notînd cu x distanţa căutată $\overline{DK}$ din figura 24.1 se vede că ochii observatorului sînt protejaţi împotriva efectului de orbire dacă unghiul $\widehat{DAC}$ nu este mai mic decît unghiul $\widehat{BAC}$, adică avem:

$$\operatorname{tg}\widehat{BAC} \leqslant \operatorname{tg}\widehat{DAC}. \qquad (1)$$

Din triunghiurile dreptunghice BAC şi DAC se obţine:

$$\operatorname{tg}\widehat{DAC} = \frac{\overline{DK}}{\overline{AK}} = \frac{x}{r_2 + r_1} \qquad (2)$$

respectiv:

$$\operatorname{tg}\widehat{BAC} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{h}{r_2 + r_1 + l} \qquad (3)$$

Din ecuaţiile (1) şi (3), rezultă inecuaţiile:

$$\frac{h}{r_2 + r_1 + l} \leqslant \frac{x}{r_2 + r_1} \qquad (4)$$

respectiv:

$$h \cdot \frac{r_2 + r_1}{r_2 + r_1 + l} \leqslant x.$$

Exemplu numeric: Fie dat $h = 1{,}00$ m; $r_2 = 0{,}25$ m; $r_1 = 0{,}01$m și $l = 1{,}00$ m. vom avea:

$$l \cdot \frac{0{,}26}{1{,}26} \text{ m} \leqslant x, \text{ sau } 21 \text{ cm} \leqslant x = \overline{DK}.$$

11. Vom prelungi dreptele $\overline{AC}$ și $\overline{BD}$ pînă la intersectarea lor și vom nota acest punct de intersecție cu E (vezi fig. 24.2), apoi, aplicînd teorema cosinusurilor în triunghiul ECD, vom obține:

$$\overline{EC}^2 + \overline{ED}^2 - 2\overline{EC} \cdot \overline{ED} \cos \widehat{CED} = \overline{CD}^2. \qquad (1)$$

Mai departe:

$$\widehat{CED} = 90° - 60° = 30° \qquad (2)$$

$$\overline{AE} = AB \operatorname{tg} 60° = AB\sqrt{3} \qquad (3)$$

$$\overline{EC} = (AB\sqrt{3} + 200 \text{ m})$$

$$\overline{BE} = \frac{AB}{\cos 60°} = 2\ AB$$

$$\overline{ED} = (2\,AB + 100) \qquad (4)$$

$$\overline{CD} \leqslant 130 \text{ m}. \qquad (5)$$

Din ecuația (1) și inecuația (5), după simplificare, rezultă următoarea inecuație de gradul II cu o necunoscută:

$$\overline{AB}^2 + 100\,\overline{AB} - 1540 \leqslant 0.$$

Rezolvînd această inecuație și, ținînd seama de faptul că problema are sens numai pentru valorile $0 \leqslant \overline{AB}$, vom obține:

$$0 \leqslant AB \leqslant 13{,}56 \text{ m}$$

12. Fie M centrul pămîntului, F racheta geofizică, iar $FA = x$ înălțimea de deasupra suprafeței terestre. Fie FN distanța orizontului vizibil. Astfel, în triunghiul dreptunghic FMN vom avea:

$$\sqrt{(\overline{MA} + x)^2 - \overline{MN}^2} = \overline{FN} \qquad (1)$$

Dacă în datele problemei considerăm $\overline{MA} = \overline{MN} = 6370$ km și $2000 \text{ km} \leqslant \overline{FN}$, după simplificări rezultînd următoarea inecuație de gradul II cu o necunoscută:

$$0 \leqslant x^2 + 12\,740\,x - 4\,000\,000. \qquad (2)$$

A ceastă problemă are sens numai pentru $0 < x$. Rezolvînd ecuația (2) obținem :

$$x > 310 \text{ km}.$$

13. Din triunghiul oarecare COC_1 (vezi fig. 24.3) cu ajutorul teoremei cosinusului, obținem :

$$(l_0 + a)^2 = l_0^2 + s_c^2 - 2s_c l_0 \cos(\theta + \gamma)$$

sau :

$$s_c^2 - 2l_0 s_c \cos(\delta + \gamma) - (2al_0 + a^2) = 0.$$

Rezolvînd această ecuație, obținem :

$$s_{c_{1,2}} = l_0 \cos(\theta + \gamma) \pm \sqrt{l_0^2 \cos^2(\theta + \gamma) + 2al_0 - a^2}.$$

Vom alege valoarea lui s_{c_1}, care are semnul pozitiv înaintea radicalului, obținînd $s_c = s_{c_1}$. În cazuri speciale, obținem :

$$\delta = 80°, a = 5{,}5 \text{ cm}, l_0 = 23{,}9 \text{ cm și } \gamma = 60° \text{ și :}$$

$$s_c = 23{,}9 \cos(80° + 60°) + \sqrt{23{,}9^2 \cos^2(80° + 60°) + 2 \cdot 5{,}5 \cdot 23{,}9 + 5{,}5^2)}$$

$$s_c \approx 6{,}7 \text{ cm}.$$

14. În trapezul $ABCD$, vom nota înălțimea $\overline{BE}$ și unghiul $\widehat{BAD}$ cu x.

Vom avea :

$$\overline{AD} = 2a \cos x + a \text{ și } \overline{BE} = a \sin x,$$

și suprafața trapezului va fi :

$$A = a^2 (1 + \cos x) \sin x, \quad (1)$$

sau, aplicînd formulele trigonometrice :

$$A = 4a^2 \cdot \cos^3 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}. \quad (2)$$

Suprafața A ia valoarea maximă dacă $\cos^3 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$ ia un maximum și acest produs este pozitiv deoarece, conform condițiilor problemei, avem : $0° < x < 90°$.

Rezultă:

$$\cos^3\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\cos^6\frac{x}{2}\cdot\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos^3\frac{x}{a}\sin\frac{x}{2}=\sqrt{27}\quad\sqrt{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{3}\cdot\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{3}\cdot\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{3}}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}}$$

Dar:

$\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{3}+\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{3}+\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{3}+\sin^2\dfrac{x}{2}=1$, iar, pe baza teoremei menționate în observație, se stabilește că:

$\cos^6\dfrac{x}{2}\sin^2\dfrac{x}{2}$ și, deci, $\cos^3\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}$, ia valoare maximă atunci cînd:

$$\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{3}=\sin^2\frac{x}{2}.$$

Soluția acestei ecuații trigonometrice este:

$$x=2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=60°.$$

15. Fie un dreptunghi *ABCD* într-un cerc cu diametrul dat. Suprafața *ABCD* este exprimată prin ecuația: $A=\overline{AB}\cdot\overline{BC}$. Problema conduce astfel la a determina valorile pentru $\overline{AB}$ și $\overline{BC}$, astfel încît produsul lor pentru diagonala $\overline{AC}=d$, dată inițial, să fie minimă. Deoarece avem *O* mai mic decît *A*, valoarea *AB* și

BC, care corespund maximului A corespunde maximului A^2 deoarece funcţia $A = AB \cdot BC$ se pot înlocui prin: $A^2 = \overline{AB^2} \cdot \overline{BC}$, conform teoremei lui Pitagora, avem: $\overline{AB^2} + \overline{BC^2} = \overline{AC^2} = d^2$. De aici rezultă că $A^2 = \overline{AB^2} \cdot \overline{BC^2}$ constituie produsul a doi factori pozitivi a căror sumă are o valoare constantă. Aceasta este maximă atunci cînd $\overline{AB^2} = \overline{BC^2}$. Dar pentru $\overline{AB} = \overline{BC}$, dreptunghiul căutat devine pătrat. Deci, dacă dintr-o bară trebuie să se taie o bară dreptunghiulară cu deşeu minim, atunci secţiunea ei trebuie să fie pătrată. Aceasta întrucît produsul a doi factori pozitivi, a căror sumă $x + (p - x) = p$ este cunoscută, ia valoarea maximă atunci cînd ambii factori sînt egali:

$$x = p - x. \qquad (2)$$

Din (2) rezultă că din toate dreptunghiurile cu perimetrul dat 2 p pătratul are cea mai mare suprafaţă.

16. Volumul cisternei este:

$$V = \pi r^2 h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi r^2 \cdot \pi r h \cdot \pi r h},$$

unde:

$$0 < 2\pi r^2 \text{ şi } 0 < \pi r h.$$

În problemă avem:

$$2\pi r^2 + \pi r h + \pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r h = A.$$

În condiţiile problemei, A poate fi considerată o constantă dată. Rezultă că V ia valoarea sa maximă cînd $2\pi r^2 = \pi r h$. Aceasta înseamnă că $2r = h$ şi că cilindrul are înălţimea egală cu lungimea diametrului.

Din sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 2r = h \\ 2\pi r^2 + 2\pi r h = A \end{cases}$$

rezultă că $r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ şi $h = 2\sqrt{\frac{A}{6\pi}}$.

Volumul cisternei ia aşadar valoarea maximă cînd:

$$V = \pi \left(\sqrt{\frac{A}{6\pi}}\right)^2 \cdot 2\sqrt{\frac{A}{6\pi}} = \frac{A}{3}\sqrt{\frac{A}{6\pi}}.$$

17. Problema cere ca relațiile dintre raza r a suprafeței de bază și înălțimea h a cilindrului, să se determine astfel încît pentru volumul V stabilit anterior, să se poată determina suprafața A_0 ca valoare minimă. Astfel avem :

$$A_0 = 2\pi rh + 2\pi r^2 \qquad (1)$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \qquad (2)$$

De aici obținem :

$$A_0 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 = \frac{V}{r} + \frac{V}{r} + 2\pi r^2. \qquad (3)$$

Astfel se va afla valoarea razei r pentru care suma $\frac{V}{r} + \frac{v}{r} +$ $+ 2\pi r^2$ devine minimă. Expresia $\frac{V}{r} + \frac{V}{r} + 2\pi r^2 = 2\pi V$, formează o sumă a trei termeni de adunare pozitivi al căror produs pentru volumul V dat inițial este o constantă.

Pentru volumul V al suprafeței A_0, ia valoarea maximă atunci cînd : $\frac{V}{r} = 2\pi r^2$, adică : $V = 2\pi r^3$. (4)

Din ecuațiile (2) și (4), rezultă în final :

$$h = 2r. \qquad (5)$$

18. Masa piesei este $m = \rho V = \frac{\rho\pi}{4}(d^2 + D^2 y)$, unde x și y sînt lungimile corespunzătoare pieselor cu diametrul d și D.

Distanța de la partea frontală a piesei cilindrice cu diametrul D pînă la centrul de greutate al piesei este :

$$a = \frac{\rho\frac{\pi}{4}\left[\frac{D^2y^2}{2} + d^2x\left(\frac{x}{2} + y\right)\right]}{m}.$$

După transformare, obținem un sistem de două ecuații cu două necunoscute :

$$\frac{4m}{\pi\rho d^2} = x + \frac{D^2}{d^2}y; \quad \frac{4am}{\pi\rho d^2} = \frac{x^2}{2} + xy + \frac{1}{2}\cdot\frac{D^2}{d^2}y^2.$$

Eliminînd pe x din această ecuaţie, obţinem :

$y^2 - 2Ay + B = 0$, unde am introdus, pentru prescurtare,

$$A = \frac{4m}{\pi \rho d^2} \text{ şi } B = A\frac{A\frac{D^2}{d^2} - 2a}{\frac{D^2}{d^2} - 1}.$$

Coeficientul A dă înălţimea unui cilindru cu diametrul D, a cărui masă este m. Rezolvînd ecuaţia dată, găsim lungimea piesei cu diametrul D: $y = A \pm \sqrt{A^2 - B}$ sau, după transformarea corespunzătoare $y = A\left(1 \pm \sqrt{\frac{\frac{2a}{A} - 1}{\frac{D^2}{d^2} - 1}}\right)$.

Cum $2a > A$ şi $D > d$, sînt valabile semnele dinaintea radicalului. Totuşi, A trebuie să fie mai mare decît y, astfel masa piesei va fi mai mare decît m.

Prin urmare: este valabilă relaţia :

$$y = A\left(1 - \sqrt{\frac{\frac{2a}{A} - 1}{\frac{D^2}{d^2} - 1}}\right).$$

Lungimea piesei cu diametrul d o găsim în prima ecuaţie a sistemului :

$$x = \frac{D^2}{d^2}A - \frac{D^2}{d^2}y = \frac{D^2}{d^2}(A - y);$$

pentru valorile numerice date, obţinem :

$$A = \frac{4 \cdot 85 \cdot 10^3\ g}{\pi \cdot 7{,}85\ g\ cm^{-3}\ (18\ cm^2)} \approx 42{,}6\ cm^2$$

$$y = 42{,}6\left(1 - \sqrt{\frac{\frac{2 \cdot 28}{42{,}60} - 1}{\left(\frac{18}{10}\right)^2 - 1}}\right) \approx 26{,}6\ cm.$$

$$x = \left(\frac{18}{10}\right)^2 (42{,}6 - 26{,}6) \approx 52\ cm.$$

19. Din figura 24.6 se vede că avem:

$$a^2 + h^2 = d^2.$$

Grinda va avea atunci forța portantă maximă, cînd între a și h există relația ah^2, unde $0 < a$ și $0 < h$.
Avem astfel:

$$ah^2 = 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \frac{h^2}{2}}.$$

Dar:

$a^2 + \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{2} = a^2 + h^2 = d^2$, este o mărime constantă dată inițial.

Produsul ah^2 ia de asemenea valoare maximă atunci cînd $a^2 = \frac{h^2}{2}$. (3)

De aici rezultă că dintr-un trunchi circular de diametru d se poate obține o grindă de secțiune ortogonală cu lățimea a și înălțimea h de portanță maximă, dacă înălțimea ia valori de: $\frac{1}{3} d\sqrt{3}$ respectiv $\frac{1}{3} d\sqrt{6}$.

20. Vom nota cu x, y și z lungimile muchiilor. Volumul chioșcului va fi:

$$V = \frac{1}{6} x y z. \qquad (1)$$

Mărimile x, y și z pot fi considerate ca mărimi variabile. Suma lor $x + y + z = l$, este o constantă. Volumul ia valoarea maximă cînd avem:

$$x = y = z = \frac{l}{3}.$$

Substituind această valoare în ecuația (1) rezultă:

$$V_{\max} = \frac{l^3}{162}.$$

21. Se separă partea algebrică de cea transcendentă $\frac{x-2}{0{,}1} = \sin x$, sau:

$$10\,x - 20 = \sin x,$$

apoi se reprezintă curbele:

$$y = 10\,x - 20 \quad \text{și} \quad y = \sin x.$$

Abscisa punctului A, OA' este abscisa punctului de intersecție a celor două curbe. $x = OA' \approx 2{,}1$ rad.

Din tabelele care transformă radianii în grade se obține $x \approx 119°$

sau se calculează $x = 2{,}1\ x \dfrac{\pi}{180} \approx 119°$.

22. Fie $AC + l : BC = h$. Vectorul AA'', a cărei direcție trece prin B, este viteza mișcării ce trebuie să rezulte din compunerea vitezei v a apei și a vitezei v_1 a înotătorului.

Din $\Delta AA'A''$ rezultă:

$$\sin x + \frac{A'A''}{v_1} = \frac{A''A''' - A'A''}{v_1}.$$

Din asemănarea triunghiurilor $A'A''A$ și CBA, se calculează $A'A'' = \dfrac{hv_1}{l} \cos x$.

Înlocuind în relația precedentă, se obține:

$$V_1 \sin x = V - \frac{hV_1}{l} x \cos x,$$

adică ecuația trigonometrică:

$$lV_1 \sin x + hV_1 \cos x = V_1.$$

Ea este de forma: $a \sin x + b \cos x = c$, a cărei reducere la două ecuații trigonometrice simple se obține folosind metoda unghiului auxiliar.

$$\sin (x + \alpha) = \frac{c}{a^2 + b^2} \quad \text{unde} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

În cazul problemei:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{l}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{h}{1} \text{ și } \sin (z + \alpha) = \frac{lv}{V_1\sqrt{l^2 + h^2}}.$$

În cazul paroticular ecuația este:

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Pentru $a = l$, $b = l$ și $c = l$, rezultă:

$$\alpha = \operatorname{arctg} 1 = 45°$$

$$\sin (x + 45°) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

adică cel mai mic argument pozitiv este:

$$(a + 45°) = 45°$$

şi, aplicînd formulele de periodicitate:

$$x + 45° = 360°k + 45°$$
$$x + 45° = (2k + 1)180° - 45°.$$

Singura soluţie acceptabilă ($0 \leqslant x \leqslant 90°$) este $x = 0$; deci, în acest caz, înotătorul pleacă perpendicular pe direcţia apei.

23. Înlocuind în ecuaţiile mişcării $V_0 = 300$ $x = 1200$ şi $y = 0$, se obţine din prima ecuaţie: $t = \dfrac{4}{\cos\alpha}$, iar din a doua ecuaţie (excluzînd $t = 0$):

$$t = \frac{600 \sin\alpha}{9{,}81},$$

adică:

$$\frac{4}{\cos\alpha} = \frac{400 \sin\alpha}{9{,}81},$$

sau:

$$\sin 2\alpha = \frac{9{,}81}{75} \cdot (1)$$

Din tabele se obţin valorile:

$\alpha' = 3°45$: (tragere de distrugere)

$\alpha'' = 86°15'$ (tragere prin doborîre)

şi timpurile respective:

$$t' = 4 \text{ s};\ t'' = 61 \text{ s}.$$

24. Spaţiul descris de culisa AB este $s = a \cos wt$ şi viteza $v = a\omega \sin \omega t$, unde amplitudinea mişcării este a; frecvenţa $s = 6$ ture/min, perioada $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{6}$ min $= 10$ s.

Pulsaţia va fi:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \text{ rad/s}.$$

Viteza este deci reprezentată prin relaţia:

$$v = 10\frac{\pi}{5} \sin\frac{\pi t}{5}$$

$$v = -2\pi \sin\frac{\pi t}{5},$$

iar curbele vor fi:

$$s = 10 \cos \frac{\pi t}{5}$$

$$v = -2\pi \sin \frac{\pi t}{5}.$$

În particular, pentru $\alpha = 30°$, vom avea:

$$v = -2\pi \sin 30° = -3{,}14 \text{ m/s}.$$

25. (1) Din datele problemei rezultă următoarea inecuaţie:

(1) $$A \leqslant x \frac{60 \cdot 75.981 \text{ J}}{s} \cdot 200 \cdot 3600 \text{ s}.$$

În acest caz, x este numărul de tractoare căutat, iar A lucrul mecanic total (în J) pentru ararea suprafeţei unui teren de 3 000 ha. Pentru determinarea lui A se calculează mai întîi lucrul mecanic necesar pentru un hectar:

$$5000 \cdot 2 \cdot 0{,}35 \cdot 12\,000 \cdot 9{,}81 \text{J} = 35 \cdot 12 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

De aici, rezultă pentru întreaga suprafaţă:

(2) $$A \leqslant 5000 \cdot 35 \cdot 12 \cdot 10^5 \text{ J} = 6 \cdot 35 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

Astfel, rezultă:

$$6 \cdot 35 \cdot 10^9 \text{J} \leqslant 6 \cdot 75 \cdot 72 \cdot 10^5 \text{ J}\, x$$

sau $65 \leqslant x$.

26. Această problemă ne conduce la următorul sistem de inecuaţii:

$$\begin{cases} 1400\text{m} < 1900 \text{ m} - 4 \dfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot x; \\ \\ 1580 \text{ m} - 4{,}5 \dfrac{\text{m}}{\text{s}} < 1400 \text{ m}; \end{cases}$$



sau :

$$\left(1900\ \text{m} - 4\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot x\right) - 1400\,\text{m} < 1400\text{m} - \left(1580\ \text{m} - 4{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}x\right).$$

În acest caz x este timpul căutat, care a trecut de la saltul parașutiștilor A și B (vezi fig. 24.8). Soluția sistem acestui este :

$$80 < x < 125\ \text{s}.$$

27. Problema conduce la un sistem de două inecuații :

$$\begin{cases} \dfrac{6{,}5\ \text{m}}{0{,}85\ \text{m}\cdot 0{,}75}\cdot 750\ \text{m}\ 2 \geqslant 5\ \text{h}\cdot x\dfrac{\text{m}}{\text{h}} \\ \dfrac{6{,}5\ \text{m}}{0{,}85\text{m}\cdot 0{,}75}\cdot 750\ \text{m}\cdot 2 \leqslant 6\ \text{h}\ x\dfrac{\text{m}}{\text{h}} \end{cases}$$

În acest caz viteza căutată s-a considerat $x\,\text{m}\cdot\text{h}^{-1}$. Dacă rezolvăm acest sistem și-l convertim în $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ obținem :

$$2{,}5\frac{\text{km}}{\text{h}} \leqslant x\frac{\text{km}}{\text{h}} \leqslant 3\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

28. Pentru un sabot de frînă, se calculează forța de frecare după formula $F = N\cdot\mu$. Momentul de frecare este : $M_{fr} = F\cdot D = N\cdot\mu\cdot D$. După înlocuirea valorii pentru M_{fr} în inegalitatea $M_{fr} \geqslant \beta M$, obținem :

$N\cdot\mu\cdot D \geqslant B\cdot M$, din care $N \geqslant \dfrac{\beta\cdot M}{\mu D} = \dfrac{1{,}75\cdot 3000\text{kg}\cdot\text{cm}}{0{,}15\cdot 50\ \text{cm}} =$ $= 700$ kg.

29. Evident că la începutul deplasării în sus tensiunea în cablu este mai mare decît la începutul deplasării în jos. La începutul deplasării în sus încărcarea cablului trebuie să fie egală cu F. Astfel rezultă inecuația :

$$\frac{F}{x} < \frac{\sigma}{n}$$

x fiind secţiunea transversală căutată a cablului în cm². Avem:

$$F = (m \cdot g + m \cdot a)$$

de unde rezultă:

$$\left(\frac{mg + ma}{x}\right) < \frac{\sigma}{n}$$

iar de aici:

$$\frac{mg\left(1 + \frac{a}{g}\right)n}{\sigma} < x.$$

30. Notăm cu q_1 debitul ce trece prin ţeava B pe secundă, iar cel care trece prin ţeava C cu q_2.

Pentru scăderea de presiune din ţeava B, se utilizează relaţia:

$$h_1 = 0{,}83 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3} \cdot \lambda_1 \cdot l_1 \frac{q_1^2}{d_1^5},$$

iar pentru ţeava C:

$$h_2 = 0{,}83 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3} \cdot \lambda_2 \cdot l_2 \frac{q_2^2}{d_2^5}.$$

După supoziţia problemei, scăderea presiunii ar trebui să fie egală în cele două ramificaţii ale conductei.
Prin urmare:

$$h_1 = h_2 \text{ sau } \lambda_1 l_1 \frac{q_1^2}{d_1^5} = \lambda_2 l_2 \frac{q_2^2}{d_2^5}.$$

Cantitatea totală de apă pe fiecare secundă, care curge prin conductă este $q = q_1 + q_2$. În acest mod putem obţine mărimile necunoscute q_1 şi q_2 dintr-un istem de două ecuaţii:

$$q_2^2 = \frac{\lambda_1 l_1}{\lambda_2 l_2}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^5 q_1^2;\ q_1 + q_2 = q.$$

Pentru simplificarea metodei de calcul se substituie:

$$X = \frac{\lambda_1 l_1}{\lambda_2 l_2}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^5.$$

Rezultă:

$$\begin{cases} q_2^2 = X q_1^2 \\ q_1 + q_2 = q. \end{cases}$$

Substituind valoarea lui q_2 din a doua ecuație în prima ecuație, obținem:

$$(q - q_1)^2 = X q_1^2,$$

sau:

$$q - q_1 = \pm q_1\sqrt{X}.$$

Obținem cantitatea de apă ce curge prin țeava B, în unitatea de timp: $q_1 = \dfrac{q}{1 \pm \sqrt{X}}$, iar prin țeava C curge în unitatea de timp cantitatea de apă:

$$q_2 = q - q_1 \text{ sau } q_2 = q - \frac{q}{1 \pm \sqrt{X}} = \frac{\pm q\sqrt{X}}{1 \pm \sqrt{X}}.$$

Alegem semnul pozitiv dinaintea radicalului, căci astfel cantitatea de apă ce curge prin una din țevi ar fi negativă ceea ce nu este în concordanță cu ipoteza problemei.

De aceea:

$$q_1 = \frac{q}{1 + \sqrt{X}} \text{ și } q_2 = \frac{q \cdot \sqrt{X}}{1 + \sqrt{X}}.$$

Rezultă:

1) $X = \dfrac{\lambda_1 l_1}{\lambda_2 l_2}\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^5 = \dfrac{0{,}04 \cdot 30 \text{ m}}{0{,}03 \cdot 50 \text{ m}}\left(\dfrac{100 \text{ mm}^5}{50 \text{ mm}}\right) \approx 25{,}6$

2) $\sqrt{X} \approx \sqrt{25{,}6} \approx 5{,}06$;

3) $q_1 = \dfrac{25 \text{ l.s}^{-1}}{1 + 5{,}06} \approx 4{,}13$ l/s.

4) $q_2 = \dfrac{5{,}06}{1 + 5{,}06} \cdot 25$ l/s $\approx 20{,}87$ l/s.

31. Fie triunghiul dreptunghic ABC. Avem deci $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ (vezi fig. 24.11).

Trebuie demonstrată relaţia : $\overline{CD} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\,(\overline{AC} + \overline{BC})$.

Dacă o aplicăm la ambele triunghiuri dreptunghice (ACD şi BCD), obţinem :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\overline{CD} + \overline{AD}) \leqslant \overline{AC} \qquad (1)$$

şi

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\overline{CD} + \overline{DB}) \leqslant \overline{BC}. \qquad (2)$$

Prin adunarea ambelor inecuaţii, se obţine :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(2\,\overline{CD} + \overline{AB}) \leqslant \overline{AC} + \overline{BC}. \qquad (3)$$

Dacă în inecuaţia (3) înlocuim $\overline{AB}$ cu $\frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{\sqrt{2}}$ rezultă :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\,\overline{CD} + \frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{\sqrt{2}}\right) \leqslant \overline{AC} + \overline{BC}. \qquad (4)$$

Rezolvînd inecuaţia (4), obţinem :

$$\overline{CD} \leqslant \frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{2\sqrt{2}}\,; \qquad (5)$$

în cazul $\overline{AC} = \overline{BC}$, această inecuaţie se transformă în ecuaţie.

32. În triunghiul dreptunghic ABC din figura 24.12, avem :

$$\overline{AC} = \overline{AB}\cos\alpha \qquad (1)$$

şi

$$\overline{BC} = \overline{AB}\cos\beta\,; \qquad (2)$$

de aici, decurge :

$$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB}\,(\cos\alpha + \cos\beta)$$
$$= \overline{AB}\cdot 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$= \overline{AB}\cdot 2\cdot\cos 45^\circ\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Aşadar:

$$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB}\sqrt{2}\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (3)$$

se obţine:

$$\overline{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\ (\overline{AC} + \overline{BC}). \qquad (4)$$

Deoarece însă $0 < \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \leqslant 1$, din formula (4) deducem:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ (\overline{AC} + \overline{BC}) \leqslant \overline{AB}. \qquad (5)$$

Inecuaţia (5) se transformă în ecuaţie numai atunci cînd avem $\overline{AC} = \overline{BC}$ adică, numai dacă este vorba de un triunghi dreptunghic isoscel.

Din inecuaţia (5), ţinînd seama de relaţia $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$, se obţine:

$$0 < (\overline{AC} + \overline{BC}) - \overline{AB} \leqslant \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\overline{AC} + \overline{BC})$$

$$0 < (\overline{AC} + \overline{BC}) - \overline{AB} \leqslant \frac{2-\sqrt{2}}{2}(\overline{AC} + \overline{BC}).$$

33. Dacă în cazul acestei probleme se presupune că numărul orificiilor, diametrele lor şi presiunea apei sînt egale, atunci cantitatea de apă irigată în unitatea de timp pe unitatea de suprafaţă este direct proporţională cu orificiile de stropire.

Deducem următoarea inecuaţie:

$$\pi\,\overline{AM_1}\cdot\overline{AS} + \pi\overline{AM_1^2} < 2\pi\cdot\overline{M_2S}\cdot\overline{M_1S}. \qquad (1)$$

Dacă notăm cu x unghiul $\widehat{ASM_1}$, avem:

$$\overline{M_1S} = \overline{AS}\cos x;\ \overline{M_2S} = \frac{\overline{AS}}{2\cos x}\ \text{şi}\ \overline{AM_1} = \overline{AS}\sin x.$$

Înlocuind în inecuaţia (1) segmentele $\overline{M_2S}$, $\overline{M_1S}$ şi AM_1, corespunzător relaţiilor mai sus arătate, cu $\overline{AS}$, iar unghiul cu x, după simplificare obţinem inecuaţia:

$$\sin^2 x + \sin x - 1 < 0. \qquad (2)$$

Rezolvînd această inecuaţie şi ţinînd seama de relaţia $0 < x < 90°$, obţinem :

$$0 < x < 38°12'. \qquad (3)$$

Deoarece $\widehat{AM_2B} = 360° - 4x$, rezultă :

$$360° - 4 \cdot 38°12' < \widehat{AM_2B} < 360°, \qquad (3)$$

adică :

$$207°12' < \widehat{AM_2B} < \widehat{360°}. \qquad (4)$$

De aici rezultă că, pentru o presiune egală a apei şi pentru aceeaşi densitate şi mărime a orificiilor, instalaţia de irigare la care apa este ejectată prin orificiile din capacul conului cu un arc căruia îi corespunde un unghi la centru 207°12′ este mai productivă decît instalaţia la care orificiile se află pe suprafaţa de bază şi pe mantaua conului.

34. Înlocuind datele problemei în formula :

$$x = \frac{1}{2} gt^2 \sin\alpha,$$

obţinem :

$$\sin\alpha = 0{,}1134 \text{ sau } \alpha = 6°C' \ (0° < \alpha < 90°),$$

Viteza corpului coborînd pe planul înclinat de la înălţime este

$$v = \sqrt{2gh} = 6{,}06 \text{ m/s}.$$

36. Din triunghiul dreptunghic OAB (fig. 24.13) se ia :

$$OA^2 - AB^2 = OB^2, \text{ sau } \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2} - x\right)^2,$$

unde x este distanţa căutată.

Dacă extragem rădăcina obţinem :

$$\frac{d}{2} - x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{d^2 - b^2}$$

de unde :

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(d \pm \sqrt{d^2 - b^2}). \qquad (1)$$

Din problemă rezultă că $x = x_1 = \frac{1}{2}(d - \sqrt{d^2 - b^2})$, fiindcă x nu poate fi mai mare decît raza frezei şi în cazul nostru :

$$x = \frac{1}{2}(100 \text{ mm} - \sqrt{100^2 \text{ mm}^2 - 80^2 \text{ mm}^2}) = 20 \text{ mm}.$$

Aranjînd ecuaţia (1), obţinem:

$$x = \frac{d}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2}}\right). \qquad (2)$$

Din ecuaţia (2), rezultă că, dacă mărim raportul b/d, drumul suplimentar creşte şi atinge valoarea maximă $\frac{b}{d} = 1$. În ultimul caz $x = \frac{d}{2}$ iar $\frac{b}{d} > 1$. Prelucrarea dintr-o singură trecere nu este posibilă fiindcă freza nu acoperă toată lăţimea suprafeţei prelucrate.

Pentru scurtarea timpului de prelucrare trebuie urmărit ca drumul acoperit de freză să fie cît mai mic, aceasta putîndu-se realiza dacă majorăm diametrul frezei. Dar mai există o posibilitate pentru atingerea acestui scop. Astfel, de exemplu, piesele de prelucrat se vor aşeza la distanţe mici una de alta.

37. Un corp cu masa m, care se găseşte faţă de centrul Pămîntului la distanţa x, este atras cu o forţă: $F_1 = \frac{km \cdot m_1}{x^2}$, unde k este un factor de proporţionalitate şi m_1, este masa Pămîntului. Dacă m se află pe o dreaptă care leagă punctele centrelor Pămîntului şi Lunii, aceasta este atrasă de Lună cu o forţă: $F_2 = \frac{k \cdot m \cdot m_2}{(l - x)^2}$, unde m_2 reprezintă masa Lunii. Din enunţ, rezultă: $F_1 = F_2$ sau

$$\frac{k \cdot m \cdot m_1}{x^2} = \frac{k \cdot m \cdot m_2}{(l - x)^2}, \text{ sau } \frac{x}{l - x} = \pm\sqrt{\frac{m_1}{m_2}};$$

rezolvînd ecuaţiile, obţinem:

$$x_1 = l\,\frac{\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}}{1 + \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}} = 3{,}84 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \frac{\sqrt{81{,}5}}{1 + \sqrt{81{,}5}} \approx 3{,}46 \cdot 10^5 \text{ km},$$

$$x_2 = l\,\frac{\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}}{\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} - 1} = 3{,}84 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \frac{\sqrt{81{,}5}}{\sqrt{81{,}5} - 1} \approx 4{,}32 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

Evident, prima soluţie a ecuaţiei dă un punct situat între Pămînt şi Lună, iar a doua soluţie un punct situat dincolo de Lună. În primul punct forţele de atracţie ale Pămîntului şi Lunii sînt egale, dar îndreptate în sens contrar, iar în punctul al doilea acţionează forţele de atracţie cu acelaşi sens.

38. Vom nota lungimea şi lăţimea căutată cu x şi, respectiv, y (în m). Lungimea întregii împrejmuiri a parcului se va nota cu z vezi (fig. 24.14). Vom avea : $2xy + \frac{\pi y^2}{4} = A$ (1) şi $4x + 2y + \pi y = z$ (2). Se caută valorile pentru x şi y care pentru constanta dată A (în m²), corespund celei mai mici valori ale lui z. Din ecuaţiile (1) şi (2), x, se exprimă în funcţie de $x = \frac{A}{2y} - \frac{\pi y}{8}$ (3). Din ecuaţiile (2) şi (3) rezultă : $z = \frac{2A}{y} + \frac{\pi + 4}{2} y$ (4). Ecuaţia (4) exprimă în sfîrşit că z se poate reprezenta ca sumă a doi termeni pozitivi al căror produs este o constantă, deoarece avem :
$\frac{2A}{y} \cdot \frac{\pi + 4}{2} y = (\pi + 4) A$, iar A, conform condiţiilor problemei, este o mărime dată iniţial. Prin urmare, z ia valoarea maximă atunci cînd y satisface relaţia : $\frac{2A}{y} = \frac{\pi + 4}{2} y$. Rezolvînd această ecuaţie, se obţine :

$$y = 2\sqrt{\frac{A}{\pi + 4}}. \qquad (5)$$

Din ecuaţiile (3) şi (5), valoarea corespunzătoare pentru x devine :

$$x = \sqrt{\frac{A}{\pi + 4}}. \qquad (6)$$

Din ecuaţiile (4) şi (5) rezultă în final :

$$z_{minim} = 2\sqrt{(\pi + 4)A}. \qquad (7)$$

Exemplu numeric : $A = 10\,000$ m², înlocuind în ecuaţiile (5),(6) şi (7) avem :

$$x = 2\sqrt{\frac{100\,000}{\pi + 4}} \text{ m} \approx 56{,}5 \text{ m}$$

$$y = 2\sqrt{\frac{100\,000}{\pi + 4}} \text{ m} \approx 113 \text{ m}$$

$$z_{min} = 2\sqrt{(\pi + 4)\,100\,000 \text{ m}} \approx 535 \text{ m}$$



39. Să notăm cu l_1 lungimea unei suduri şi cu l_2 lungimea celei de a doua suduri, iar lungimea laterală a sudurii cu l_s, aceasta însemnînd că $l_s = l_1 + l_2$.

Lungimea minimă admisibilă, l_s se găseşte în ipoteza ca tensiunea maximă în care sudurile să nu depăşească tensiunea admisibilă: $\sigma_{max} \leqslant \sigma_{adm}$, această formulă exprimînd aşa-numita condiţie de rezistenţă. Fiindcă tensiunea maximă în secţiunea cordonului de sudură se precizează în tehnică cu ajutorul formulei: $\tau_{max} = \frac{F}{0{,}7\, tl_\delta}$, condiţia de rezistenţă admisibilă are forma: $\frac{F}{0{,}7 tl\delta} < \tau_{ad}$;

de aici rezultă: $l_\delta = \frac{F}{0{,}7\ t\tau_{ad}} = \frac{150000\ \text{N}}{0{,}7 \cdot 0{,}8\text{cm} \cdot 10000\ \text{N} \cdot \text{cm}^{-2}} \approx$ $\approx 26{,}8$ cm, astfel se obţine $l_1 + l_2 = 26{,}8$ cm. Totodată împărţind forţele care acţionează prin frecare din cele două lungimi de sudură invers proporţional cu distanţa lor de la linia de acţionare a forţei F, aceasta înseamnă că este valabil $\frac{l_1}{l_2} = \frac{b - z_0}{z_0}$, mărimile b şi z_0 găsindu-se în tabele speciale. După un astfel de tabel s-a stabilit $z_0 = 2{,}1$ cm şi $b = 7{,}5$ cm. În acest fel, se obţin două in ecuaţii:

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = l_\delta \\ \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{b - z_0}{z_0} \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1 + l_2 = 26{,}8\ \text{cm.} \\ \dfrac{l_1}{l_2} \approx 2{,}57\ \text{cm.} \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem, obţinem:

$$l_1 = 16{,}4\ \text{cm şi } l_2 = 10{,}4\ \text{cm.}$$

40. Să notăm că F_1 forţa pe care o comprimă resortul interior şi cu F_2 cea care comprimă resortul exterior. Dat fiind că suma acestor forţe este egală cu F, putem nota ecuaţia $F_1 + F_2 = F$. Pentru găsirea celei de a doua ecuaţii, folosim ipoteza că la comprimare ambele arcuri se scurtează la aceeaşi valoare, aceasta însemnînd că $T_1 = T_2$. Scurtarea primului şi celui de al doilea arc îl precizăm după formula: $t_1 + \frac{F_1}{C_1}$ şi $t_2 = \frac{F_2}{C_2}$, iar a doua ecuaţie va fi de forma: $\frac{F_1}{C_1} = \frac{F_2}{C_2}$ sau $C_2\ F_1 = C_1\ F_2$.

Rezolvînd sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} F_1 + F_2 = F \\ C_2 F_1 = C_1 F_2 \end{cases}$,

obţinem : $F_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot F$ şi $F_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} F$.

41. Prin logaritmare obţinem :

$$\lg F = \lg \alpha + \lg \varphi + 2 \lg n_s + 4 \lg D$$

sau : $\lg F = \lg 0{,}18 + \lg 0{,}125 + 2 \lg 25 + 4 \lg 2{,}1 \approx 2{,}4368$
rezultînd : $F = 273{,}4$ N.
Prin logaritmare : $\lg P = \lg \beta + \lg \rho + 3 \lg n_s + 5 \lg D$,
sau : $\lg P = \lg 0{,}28 + \lg 0{,}125 + 3 \lg 25 + 5 \lg 2{,}1 \approx 4{,}3488$
Rezultă : $P = 223300$ W.

42. Prin logaritmarea formulei, obţinem :
$\lg v = \lg 32{,}6 - 0{,}16 \lg s - 0{,}38 \lg \lambda = \lg 32{,}6 - 0{,}16 \lg 2 -$

$- 0{,}38 \lg 0{,}4 \approx 1{,}616$; de unde : $v \approx 41{,}3 \text{ m} \cdot \text{mm}^{-1}$.

43. Cablul remorcherului A, trebuie să formeze cu axa lui unghiul x, iar cablul remorcherului B trebuie să formeze cu aceeaşi axă unghiul y (vezi fig. 24.18). Din datele problemei, rezultă următorul sistem de ecuaţii :

$$\begin{cases} 6 \cos x + 4 \cos y > 5 \\ 10 \cos x + 5 \cos y > 8 \\ 0 < x < 90° : 0 < y < 90°. \end{cases}$$

Dacă vom rezolva acest sistem în raport cu y, rezultă :

$$0 < y < \arccos \frac{5 - 6 \cos x}{4} \quad (1)$$

Pentru $\arccos \frac{5}{6} < x < \arccos 0{,}7$ şi anume : $33°31' < x <$ $< 45°30'$, $0 < y < \arccos \frac{8 - 10 \cos x}{5}$, (2)

pentru $\arccos 0{,}3 < x < \arccos 0{,}7$ şi anume : $45°30' < x <$ $< 72°30'$.
Exemplu numeric :

Fiind dat $x = \arccos 0{,}5 = 60°$, vom avea :

$$0° < y < \arccos \frac{8 - 10 \cdot 0{,}5}{5}, \text{ adică } 0° < y < 53°.$$

Probă:
Considerînd $y = 50°$, rezultă

$$6 \cos 60° + 4 \cos 50° = 3 + 4 \cdot 0{,}643 \approx 5{,}57 > 5.$$

$$10 \cos 60° + 5 \cos 50° = 5 + 5 \cdot 0{,}643 \approx 8{,}26 > 8.$$

44. Vagonetul încărcat dezvoltă la coborîre pe planul înclinat datorită masei sale, forța de tracțiune $F_1 = F_G(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)$.
În acest caz φ este egal cu unghiul de înclinare căutat. Forța care este necesară pentru ridicarea uniformă a n vagonete grele este $F_2 = nf_G(\sin \varphi + \mu \cos \varphi)$.
De aici rezultă următoarea inecuație:
$nf_G(\sin \varphi + \mu \cos \varphi) \leqslant F_G(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)$, după care rezolvînd inecuația și ținînd seama că: $f_G = m_G\, g$ și $F_G = M_G\, g$, rezultă:

$$\operatorname{arctg} \frac{\mu(F_G + n\, f_G)}{F_G - n\, f_G} \leqslant \varphi < 90°.$$

Din această ultimă inecuație, se vede că problema se poate rezolva numai cînd $n\, f_G < F_G$.
Exemplu numeric:
Fie dat: $F_G = 2{,}5$ t, $f_G = 0{,}4$ t, $\mu = 0{,}02$
Pentru ca, vagonetul încărcat în coborîrea lui trebuie să ridice cel puțin 5 vagoneți goi, unghiul de înclinare μ, trebuie să aibă următoarele limite:

$$\operatorname{arctg} \frac{0{,}02(2{,}5 + 5 \cdot 0{,}4)}{2{,}5 - 5 \cdot 0{,}4} \approx \operatorname{arctg} 0{,}18 \leqslant \varphi \leqslant 90°,$$

adică $10°18' \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

45. Volumul filtrului conic se poate determina cu formula: $V = \frac{1}{3} \pi\, x^2 \sqrt{r^2 - x^2}$ (1), unde x este raza suprafeței de bază.

Din (1) se vede că funcția pozitivă $x^2\sqrt{r^2 - x^2}$ ia valoarea maximă simultan cu funcția: $x^2\,(r^2 - x^2)$, deoarece aceasta din urmă este doar o parte din cele prezentate anterior. Produsul $x^4(r^2 - x^4)$ poate fi adus la forma $\frac{1}{2}\, x^2 \cdot x^2(2r^2 - 2x^2)$, printr-o transformare identică. Suma $x^2 + x^2 + (2r^2 - 2x^2) = 2r^2$ este încă o constantă, deoarece r este o mărime fixă. Volumul V ia valoarea maximă atunci cînd avem: $x^2 = 2r^2 - 2x^2$,

sau
$$x = \frac{r\sqrt{6}}{3}. \quad (2)$$

Deoarece :
$$2\pi x = b_1 = \frac{\pi r(360° - \widehat{AMB})}{180°}, \quad (3)$$

din formulele (2) şi (3), rezultă în final că volumul V ia valoarea maximă cînd avem : $\widehat{AMB} \approx 66°$.

46. Dacă notăm cu A aria secţiunii inelare, obţinem :

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi D^2}{4}(1 - a^2).$$

Se formează sistemul :

$$\begin{cases} (D^2 - d^2) = 4A \\ D - d = 2S \end{cases}$$

Se va găsi : $D = 200$ mm şi $d = 152$ mm.

47. Rezolvind sistemul :

$$\begin{cases} \pi(D^2 - d^2) = 4A \\ \dfrac{d}{D} = a \end{cases}$$

obţinem : $D = 2\sqrt{\dfrac{A}{(1 - a^2)}}, \quad d = 2a\sqrt{\dfrac{A}{(1 - a^2)}}$.

49. Din ΔOCA, se obţine (fig. 24.20) :

$\left(\dfrac{D}{2} - v\right)^2 = \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 + \left[\dfrac{D}{2} - (v + H)\right]^2$, dar pentru simplificarea calculului se introduce o nouă variabilă :

$x = \dfrac{D}{2} - r$ (vezi fig. 24.20).

Vom obţine ecuaţia : $x^2 = \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 + (x - H)^2$, de unde :

$$x = \frac{l^2 + 4H^2}{8H}.$$

Înlocuind pe x cu valoarea $\frac{D}{2} - r$, se obține :

$$D = H + \frac{l^2}{4H} + 2r.$$

În cazul măsurării diametrului exterior, ecuația inițială va fi de forma :

$$\left(\frac{D}{2} + r\right)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left[\frac{D}{2} - H + r\right]^2,$$

de unde :

$$D = H + \frac{l^2}{4H} - 2r.$$

50. $R = G = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)\, h\gamma - V\gamma$, unde V este volumul, iar $R = R$ piesă finisată.
Notăm cu x adîncimea de scufundare a bacului în apă (vezi fig. 24.23). Bacul are la suprafața apei lățimea

$$y = a + 2x \ \operatorname{tg} \alpha.$$

Bacul dislocă un volum de apă $V = \frac{a + y}{2} \cdot xl.$

Din principiul lui Arhimede, bacul este împins cu o forță $F = V\rho m = mg$, iar $m = (ax + x^2 \operatorname{tg}\alpha) l\rho$ sau $x^2 \operatorname{tg}\alpha + ax - \frac{m}{l\rho} = 0$. După rezolvarea ecuației și înlocuirea valorilor date în problemă, obținem $x = 0{,}405$ m.

53. Pentru precizarea mărimilor S_1 și S_2, trebuie rezolvat sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} S_1 - S_2 = 200 \text{ N} \\ S_1 + S_2 = 500 \text{ N} \end{cases}$$

Rezultă $S_1 = 350$ N, $S_2 = 15$ N.

54. Notăm x timpul necunoscut. Întrucît numărul de ture al compresorului este $n = 150$ rot/min, cantitatea de aer comprimată în rezervor într-un minut va fi :

$$V_{\min} = n \, \Delta V.$$

Volumul total al aerului comprimat în timpul x în rezervor şi al aerului existent în rezervorul W înainte de pornirea compresorului va fi indicat în termenul $(x+1)$ al progresiei aritmetice, al cărei prim termen este V_k şi a cărei raţie este V_{min} : $V = V_k + xV_{min}$. În acest caz, aerul va fi comprimat la volumul V_k. La presiune crescătoare şi temperatură constantă, conform legii Boyle-Mariotte : $pV_k = p_0 V$, la care $p_0 = 1$ at (presiunea atmosferică).

De aceea $V = \frac{p}{p_0} \cdot V_k$ sau $V_k + xV_{min} = \frac{p}{p_0} V_k$,

din care :

$$x = \frac{V_k}{V_{min}} \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right) = \frac{100 \text{ dm}^3}{150 \text{ min}^{-1}\, 0{,}5 \text{ dm}^{-3}} \left(\frac{4 \text{ at}}{1 \text{ at}} - 1 \right).$$

55. Pentru precizarea adîncimii H a puţului şi τ timpul de cădere a pietrei, obţinem un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute :

$$\begin{cases} H = \dfrac{g\tau^2}{2} \\ H = c(t - \tau). \end{cases} \qquad (1)$$

Prin eliminarea lui H, rezultă :

$$\frac{g\tau^2}{2} = c(t - \tau) \text{ sau : } \tau^2 + \frac{2c}{g}\tau - \frac{2\,ct}{g} = 0,$$

din care :

$$\tau_{1,2} = -\frac{c}{g} \pm \sqrt{\frac{c^2}{g^2} + \frac{2ct}{g}}.$$

Timpul de cădere a pietrei nu poate fi negativ, prin urmare unica soluţie este :

$$\tau = \tau_1 = \sqrt{\frac{c^2}{g^2} + \frac{2ct}{g}} - \frac{c}{g} = \frac{c}{g}\left(\sqrt{1 + \frac{2gt}{c}} - 1 \right). \qquad (2)$$

Introducem timpul determinat τ în a doua ecuaţie a sistemului (1) şi găsim adîncimea puţului :

$$H = c\left[t - \frac{c}{g}\left(\sqrt{1 + \frac{2\,gt}{c}} - 1 \right) \right]. \qquad (3)$$

Exemplu numeric : $t = 5$ s, $c = 340$ m/s şi $g = 9{,}81$ m/s².

56. Notăm cu x forța care va fi transmisă prin piciorul 1 al suportului (vezi fig. 24.26). Forțele ce vor fi transmise prin picioarele 2 și 4 sînt egale între ele fiindcă sînt dispuse simetric față de diagonale cu picioarele 1 și 3. Aceste forțe egale le notăm cu y. Piciorul 3 transmite forța z pe suporți. Evident, suma acestor forțe este egală cu forța care acționează pe suport, piesa de fontă și masă.

Greutatea mesei este neglijabilă în comparație cu aceea a piesei de fontă.

Avem deci : $x + 2y + z = F$.

Dacă calculăm suma momentelor tuturor forțelor față de diagonala ce trece prin picioarele 2 și 4, obținem o a doua ecuație

$$x \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} - Ft\sqrt{2} - z\frac{l\sqrt{2}}{2} = 0 \text{ sau } lx - 2\,Ft - lz = 0.$$

Putem presupune că, sub acțiunea forței $\vec{F}$, placa mesei ia o poziție care este reprezentată prin linia punctată $A-A$. Aceasta înseamnă că scurtarea picioarelor 2 și 4 este egală cu media aritmetică de scurtare a picioarelor 1 și 3. Scurtarea picioarelor este însă proporțională cu efectul forțelor de apăsare, de aceea :

$$\frac{x+z}{2} = 2y \text{ sau } x + z = 4\,y.$$

Ca rezultat, obținem un sistem de 3 ecuații :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3000 \text{ N} \\ x - z = 600 \text{ N}. \\ x - 4y = z = 0 \text{ N}. \end{cases}$$

Obținem : $x = 1300$ N, $y = 500$ N, $z = 700$ N.

58. Lungimea unei spire în prima situație a cablului (considerat pe linia mediană a cablului) este egală cu $\pi(D+d)$.

Lungimea spirelor din următoarele situații este cu $2\,\pi\,d$ mai mare decît cele anterioare. Lungimea tuturor spirelor, fiecare în situația respectivă este cu $2\,\pi\,dm$, mai mare decît cele anterioare.

Este evident că lungimea totală a cablului, este suma primilor termeni n ai unei progresii aritmetice a cărei rație este $2\pi dm$.

Primul rînd ai progresiei este $\pi m(D+d)$, iar al n — lea termen este :

$$\pi m(D+d) + (n-1)\,2\pi\,dm = \pi\,m\,[D+(2n-1)d].$$

Obţinem deci pentru lungimea totală a cablului:

$$l = \frac{\pi m(D+d) + \pi m[D+(2n-1)d]}{2} \cdot n \approx \pi\, mn(D+nd).$$

Pentru distanţa de depăşire avem relaţia:

$$l = \frac{x}{2} = a_1 + l_B + v_B \cdot t + a_2 + l_A, \text{ unde:}$$

t este timpul de depăşire şi $l = \frac{x}{2} = v_A\, t.$

Prin rezolvarea acestei ecuaţii obţinem:

$$t = \frac{a_1 + a_2 + l_A + l_B}{v_A - v_B}$$

$$x = 2v_A \cdot \frac{a_1 + a_2 + l_A + l_B}{v_A - v_B}.$$

Caz numeric:
Dacă se dă $a_1 = 20$ m, $a_2 = 30$ m, $l_A = 4$ m, $l_B = 6$ m, $v_A = 60$ km/h şi $v_B = 40$ km/h, atunci:

$$x = 2 \cdot 60 \cdot \frac{20+30+4+6}{60-40} = 360 \text{ m}.$$

59. Cu ajutorul figurii 24.29 se stabileşte uşor egalitatea:

$$\frac{d_1 - d_2}{l} = \frac{d_1 - d}{\lambda}.$$

De unde rezultă $d = d_1 - \frac{d_1 - d_2}{l}\,\lambda.$

Exemplu numeric:
Se dau: $d_1 = 50$ mm; $d_2 = 30$ mm; $l = 200$ mm şi $\lambda = 50$ mm; vom obţine:

$$d = 50 - \frac{50-30}{200} \cdot 50 = 45 \text{ mm}.$$

60. Se cere distanţa x, a centrului de greutate C, faţă de reazemul A (vezi fig. 24.30).
Dacă dinamometrul indică forţa $F_1 = 120\ N$, pe reazemul A, forţa aplicată F_2 este : $F_2 = F - F_1 = 150$ N, unde F este greutatea corpului.

Forţele F_1 şi F_2 sînt în raport invers proporţional cu distanţele lor faţă de punctul C.

Rezultă :

$$\frac{F_1}{x} = \frac{F_2}{l - x}, \text{ sau } \frac{120\ \text{N}}{x} = \frac{150\ \text{N}}{45\ \text{cm} - x}$$

De aici : 12 N (45 cm $- x$) = 15 N $\cdot x$,
iar $x = 20$ cm.

61. În cazul nostru p_0 este egal cu 10 N/cm². Înlocuind mărimile date în ecuaţia de bază a hidrostaticii, se obţine :

$$1{,}15\ \text{N/cm}^2 = 10\ N/\text{cm}^2 + 150\ \text{cm} \cdot \rho \cdot 981\ \text{cm/s}^2.$$

Din această ecuaţie rezultă, după efectuarea calculelor :

$$\rho = 0{,}001\ \text{kg/cm}^3.$$

63. Poziţia verticală a diagonalelor $\overline{BD}$ ale brazdelor (vezi fig. 24.33) este poziţia limită la care brazda nu cade. Din asemănarea triunghiurilor BDE şi BAC rezultă că :

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{BC}, \text{ de unde :}$$

$$BC = b;\ BD = \sqrt{a^2 + b^2};\ BE = b \text{ şi } AC = a.$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{b} \quad \text{sau} \quad b^2 = a\sqrt{a^2 + b^2}$$

Împărţim ambele părţi ale ecuaţiei prin a^2 şi introducem variabila $x = \dfrac{b}{a}$.

Atunci $x^2 = \sqrt{1 - x^2}$ sau $x^4 - x^2 - 1 = 0$.

Să notăm cu $t = x^2$ şi avem : $t^2 - t - 1 = 0$.

Se obţine $t_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Reţinem numai soluţiile reale:

$$t = t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ de unde: } x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Vom reţine numai valoarea pozitivă şi anume:

$$x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Obţinem în final:

$$\frac{b}{a} = x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \approx 1{,}27.$$

Mărimea x depinde de construcţia plugului a cărui dimensionare se va alege astfel încît $1{,}27 < x < 2$.

64. La deformarea grinzii în limitele elasticităţii, pentru rigiditatea sa avem: $c = \frac{F}{\delta}$ în care δ este săgeata la mijlocul grinzii sub acţiunea forţei $\vec{F}$.

Pentru înălţimea de cădere a greutăţii inclusiv săgeata grinzii avem:

$$H = h + \delta = h + \frac{F}{c}.$$

Energia cinetică a corpului care este: $W = mgH$.
La şoc această acţiune se transformă în energie potenţială a săgeţii grinzii; aceasta înseamnă că $W = W_p$, sau:

$$\frac{F^2}{2c} = mg\left(h + \frac{F}{c}\right).$$

După simplificare, obţinem:

$$F^2 - 2\,mgF - 2\,mgch = 0, \text{ de unde:}$$

$$F = mg\left(1 \pm \sqrt{1 + 2\frac{ch}{mg}}\right).$$

Luînd valorile reale obținem :

$$F = mg\left(1 + \sqrt{1 + 2\frac{ch}{mg}}\right), \text{ sau :}$$

$$F = k_d\ mg$$

în care coeficientul dinamic k_d este :

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2ch}{mg}},$$

care indică de cîte ori forța $\vec{F}$, este mai mare decît greutatea $\overrightarrow{mg}$.

În domeniul elasticității, săgeata grinzii este tensiunea acesteia, proporțională cu acțiunea forței.

Prin urmare :

$\delta = \delta_0 k_d$ și $\sigma = \sigma_0 k_d$, în care σ_0 este tensiunea în grindă la acțiunea forței statice $\overrightarrow{mg}$ și δ_0 deformația grinzii prin acțiunea forței egală mg.

Din formula pentru precizarea coeficientului dinamic, se poate reține că acesta este dependent de rigiditate. Cu cît rigiditatea este mai mică, cu atît este mai mic și coeficientul dinamic, ceea ce înseamnă că și șocul va fi atenuat.

Pentru amortizarea șocurilor folosim elemente elastice în formă de arcuri ș. a. m. d.

În cazul considerat, coeficientul dinamic se exprimă prin :

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 500 \cdot 10^4\ \text{N/m}^2 \cdot 0{,}5\ \text{m}}{20\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}} \approx 51,$$

deci $F = k_d\ mg = 51 \cdot 20\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 1020\ \text{N}$.

65. Cantitatea scursă în prima secundă este :

$$q_1 = ah_1.$$

Cantitatea scursă în secunda a doua este :

$$q_2 = ah_2 = a\left(h_1 - \frac{q_1}{A}\right) = ah_1\left(1 - \frac{a}{A}\right).$$

Pentru a treia secundă avem :

$$q_3 = ah_3 = a\left(h_1 - \frac{q_2}{A}\right) = a\left[h_1\left(1 - \frac{a}{A}\right) - h_1\frac{a}{A}\left(1 - \frac{a}{A}\right)\right],$$

$$q_3 = ah_1\left(1 - \frac{a}{A}\right)^2.$$

Pentru a patra secundă avem :

$$q_4 = ah_4 = a\left(h_3 - \frac{q_3}{A}\right) = ah_1\left(1 - \frac{a}{A}\right)^3.$$

Pentru a t-a secundă avem relația :

$$q_t = ah_1\left(1 - \frac{a}{A}\right)^{t-1}.$$

Stabilim că, pe secundă, cantitatea scursă se micșorează după o progresie geometrică a cărei rație este $\left(1 - \frac{a}{A}\right)$ și ai cărei prim și ultim termeni sînt : $q_1 = ap_1$ și, respectiv

$$q_t = qh_1\left(1 - \frac{a}{A}\right)^{t-1}.$$

Cantitatea totală scursă este redată prin suma primilor termeni ai acestei progresii :

$$Q = \frac{ah_1 - ah_1\left(1 - \frac{a}{A}\right)^{t-1}\left(1 - \frac{a}{A}\right)}{1 - \left(1 - \frac{a}{A}\right)} = ah_1\,\frac{1 - \left(1 - \frac{a}{A}\right)^t}{\frac{a}{A}}$$

sau :

$$Q = Ah_1\left[1 - \left(1 - \frac{a}{A}\right)^t\right].$$

Întrucît $Ah_1 = V_1$ (V_1 volumul inițial din rezervor), formula se poate scrie și sub forma :

$$Q = V_1\left[1 - \left(1 - \frac{a}{A}\right)^t\right].$$

66. Pentru tensiunea unitară a transmisiilor cu cablu avem relația :

$$s_1 = \frac{F}{k},\ s_2 = \frac{F}{k^2}, \ldots, s_n = \frac{F}{k^n}.$$

Obținem o progresie geometrică a cărei rație este $1/k$.

Greutatea K este egală cu suma tensiunilor în transmisia cu cablu.

$$Q = s_1 + s_2 + \ldots + s_n = F\,\frac{k^{n-1}}{k^n(k-1)}\ ;\ \text{de unde rezultă};$$

$$F = s_n k^n = 2430\ \text{N} \cdot 1{,}02^4 \approx 2630\ \text{N}.$$

$$Q = s_n\,\frac{k^{n-1}}{k-1}\quad 2430\ \text{N}\,\frac{1{,}02^4 - 1}{1{,}02 - 1} \approx 10000\text{N}$$

67. Din inegalitatea : $\dfrac{F_k(l_k + b) - F_k(l - b)}{F(l - b)} \geqslant 1{,}4$, obținem :

$$F \leqslant \frac{F_k(l_k + b) - F_k(l - b)}{1{,}4 \cdot (l - b).}\ .$$

68. Fie n numărul de zale al lanțului. Pentru ridicarea greutății este necesară forța :

$$F_1 = \frac{mg}{2n}\ .$$

Lucrul mecanic necesar pentru aceasta este $W_1 = \dfrac{mg}{2n} \cdot \dfrac{l}{n} = \dfrac{mgl}{2n^2}$.

Pentru zala a doua avem :

$$F_2 = \frac{mg}{2n} + \frac{mg}{n}\ ;\ W_2 = \frac{mgl}{2n^2} + \frac{mgl}{n^2}\ .$$

Pentru zala a treia avem :

$$F_3 = \frac{mg}{2n} + \frac{2mg}{n}\ ;\ W_3 = \frac{mgl}{2n^2} + \frac{2mgl}{n^2}\ .$$

Pentru a n-a zală avem :

$$F_n = \frac{mg}{2n} + (n-1)\,\frac{mg}{n}\ ;\ W_n = \frac{mgl}{2n^2} + (n-1)\,\frac{mgl}{n^2}\ .$$

Lucrul mecanic ce s-a folosit pentru ridicarea întregului lanț îl putem reda în următoarea progresie aritmetică ca sumă a n zale :

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots + W_n = \frac{W_1 + W_2}{2}\,n\ ;$$

$$W = \frac{mgl}{n^2}\,\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + n - 1}{2}\,n = \frac{mgl}{2}\ .$$

69. Pentru zborul de ducere la viteza aeronavei față de aerul ambiant se adaugă viteza vîntului, iar la întoarcere se scade. De aceea viteza aeronavei este în raport cu suprafața pămîntului la ducere $v + v_w$, la întoarcere $v - v_w$.
Acum se pot stabili ușor ecuațiile:

$$\frac{s}{v + v_w} = t_1; \frac{s}{v - v_w} = t_2.$$

Rezolvarea lor dă:

$$v = \frac{s}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right); \quad v_w = \frac{s}{2}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right).$$

Dacă s este drumul pe care aeronava îl parcurge în timpul $t_1 + t_2$, cu viteza v, atunci putem scrie:

$$s = v(t_1 + t_2) = 2s + (t_1 + t_2)v_w.$$

70. Se cunoaște: $T_2 = T_1 + \Delta t$; $p_2 = p_1 + \Delta p$.

Substituind T_2 și p_2 în formulă, obținem:

$$\frac{p_1 + \Delta p}{p_1} = \left(\frac{T_1 + \Delta t}{T_1}\right)^{\frac{1,2}{1,2-1}} = \left(1 + \frac{\Delta t}{T_1}\right)^6 =$$

$$= 1 + 6\frac{\Delta t}{T_1} + 15\left(\frac{\Delta t}{T_1}\right)^2 + 20\left(\frac{\Delta t}{T_1}\right)^3 +$$

$$+ 15\left(\frac{\Delta t}{T_1}\right)^4 + 6\left(\frac{\Delta t}{T_1}\right)^5 + \left(\frac{\Delta t}{T_1}\right)^6.$$

Pentru că $\Delta t \leqslant T_1$, este valabilă și relația: $\frac{\Delta t}{T_1} \leqslant 1$; prin urmare, toate puterile pot fi neglijate fără urmări pentru exactitatea soluției.
Atunci:

$$\frac{p_1 + \Delta p}{p_1} = 1 + \frac{\Delta p}{p_1} \approx 1 + 6\frac{\Delta t}{T_1} \text{ de unde:}$$

$$\Delta p \approx 6\frac{p_1}{T_1}\Delta t = 6 \cdot \frac{20\ \text{N/cm}^2}{300\text{K}} \cdot 5\ \text{K} = 2\text{N/cm}^2.$$

71. Parașutistul pierde în timpul căderii libere înălțimea $h_1 = \frac{gt_1^2}{2}$.

Spaţiul parcurs în cădere cu paraşuta deschisă este:

$$h_2 = vt_2$$

Cum $h = h_1 + h_2$, obţinem un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute:

$$\begin{cases} gt_1^2 + vt_2 = h \\ t_1 + t_2 = t_0. \end{cases}$$

Prin eliminarea lui t_2 şi simplificarea transformărilor rezultă:

$$t_1^2 - \frac{2v}{g}\, t_1 - \frac{2}{g}(h - vt_0) = 0,$$

iar prin rezolvarea acestei ecuaţii de gradul II, obţinem timpul de cădere cu paraşuta închisă:

$$t_1 = \frac{v}{g} \pm \sqrt{\frac{v^2}{g^2} + \frac{2(h - vt_0)}{g}}\,.$$

Dacă paraşuta se deschide imediat după săritură, avem: $h = vt_0$. Dacă săritura este executată cu deschiderea întîrziată a paraşutei, avem: $h \neq vt_0$. Luînd în considerare numai valorile reale obţinem:

$$t_1 = \frac{v}{g}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2g(h - vt_0)}{v^2}}\,\right].$$

72. Fie un corp greu de masă m situat la latitudinea φ. Punctul A este solicitat de două forţe: forţa de gravitaţie $\vec{P}$, îndreptată către centrul Pămîntului, a cărei mărime este $P=mg$. (g=accelera-ţia gravitaţiei) şi forţa centrifugă $\vec{F}$ perpendiculară pe axa Pămîntului, la distanţa $R\varphi$ de ea; mărimea ei este: $F = m\gamma = m\,\omega^2 R\varphi$. Greutatea $\vec{P}_\varphi$ la latitudinea φ este deci rezultanta acestor două forţe, $\vec{P}$ şi $\vec{F}$. Forţa $\vec{F}$ este foarte mică în comparaţie cu forţa de gravitaţie. Calculăm raportul mărimilor lor.

$\dfrac{F}{P} = \dfrac{m\omega^2 R\cos\varphi}{mg} = \dfrac{\omega^2 R}{g}\cdot\cos\varphi$, înlocuind pe ω, R şi g, se obţine $\dfrac{F}{P} = \dfrac{1}{289}\cos\varphi$. Aceasta înseamnă că, la ecuator, forţa centrifugă F este a 289-a parte din forţa gravitaţională care acţionează asupra corpului.

73. Viteza unghiulară ω nu depinde de poziţia punctului pe glob ; ea este dată de :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400}\ \text{rad/s}.$$

$$\omega \approx 7{,}3 \cdot 10^{-5}\ \text{rad/s}.$$

Punctul situat pe suprafaţa Pămîntului la latitudinea φ, descrie o circumferinţă de rază $R\varphi$. Viteza liniară la latitudinea φ este :
$v_\varphi = \omega R\varphi = \omega R \cos\varphi$, în care $R = 6370$ km $= 6{,}37 \cdot 10^6$ m este valoarea mijlocie a razei Pămîntului. Înlocuind se obţine :

$$v_\varphi = 7{,}3 \cdot 10^{-5} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \cos\varphi$$
$$v_\varphi = 4{,}69 \cdot 10^2 \cdot \cos\varphi\ \text{m/s}.$$

74. Însemnînd cu P_1 mărimea componentei a doua din $\Delta\, OAP$ aplicînd teorema sinusurilor, obţinem :

$$\frac{P}{\sin\beta} = \frac{P_1}{\sin\alpha}$$

şi $P_1^2 = P^2 + P^2 - 2P \cdot P\cos\alpha = 2P^2(1 - \cos\alpha) = 4P^2 \sin\frac{\alpha}{2}$.

Deci :

$$P_1 = 2P\sin\frac{\alpha}{2} \text{ şi înlocuind } \frac{P}{\sin\beta} = \frac{2P\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

sau :

$$\sin\beta = \cos\frac{\alpha}{2}, \text{ deci : } \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

75. Se calculează : — $\lim\limits_{R\to\infty} p = \lim \dfrac{R^2 - r^2}{\sqrt{3R^4 - r^4}}\sigma_t$.

Se va găsi : $p = \dfrac{\sigma_t\sqrt{3}}{3}$.

76. Ţinînd seama de valorile lui A şi t se obţine :

$$i = \frac{p}{4}\sqrt{1 + a^2}.$$

b) — rezolvînd sistemul format din ecuaţiile date, se obţine:

$$D = \sqrt{8i^2 + \frac{2I}{\pi i^2}}\ ; d = \sqrt{8i^2 - \frac{2I}{\pi i^2}}\ .$$

Aplicaţie numerică: $I = 2700$ cm; $i = 7{,}7$, găsim: $D = 20$ cm, $d = 18$ cm.

77. În momentul prinderii tablei de către valţ, asupra ei acţionează următoarele forţe: reacţiunile normale $\vec{N}$ pe direcţia razelor AC şi BD ale valţurilor, forţele de frecare kN pe direcţia tangentelor la valţuri. Proiectînd pe orizontal, ecuaţia de echilibru este $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + 2\,kN\cos\varphi = 0$, adică $-\sin\alpha + k\cos\alpha = 0$, din care rezultă $\operatorname{tg}\alpha \leqslant k$, dar $k = \operatorname{tg}\varphi$($\varphi$ fiind unghiul de frecare între valţuri şi fierul înroşit); deci $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \operatorname{tg}\varphi$, adică $\alpha \leqslant \varphi$. Grosimea maximă (admisibilă) a tablei ce poate fi laminată este baza CD a trapezului $ABCD$, în care AC este egal cu $BD = 2$; $AB = a + 2r$ şi $CD = b$ fiind grosimea (admisibilă) avem:

$$AB = b + 2\,r\cos\alpha, \text{ deci } b + 2r\cos\alpha = a + 2r$$

sau $b = a + 2r\,(1 - \cos\alpha)$.

Folosind relaţia $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\varphi$ şi înlocuind $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}$,

rezultă $b \leqslant a + 2r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}\right)$.

În cazul numeric dat, se obţine $b \leqslant 0{,}75$ cm.

78. Amplitudinea mişcării oscilatorii este $AB = a = 2{,}5$ cm; perioada mişcării se deduce din: $T = \frac{\lambda}{v_0} = \frac{8}{200} = 0{,}04$ s.

pulsaţia $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\,\pi \cdot 25 = 50\,\pi$ rad/s.

Ecuaţia mişcării oscilatorii armonice este: $x = a\cos(\omega\,t + \alpha)$; înlocuind, obţinem $x = 2{,}5\cos(50\,\pi t + \alpha)$. Faza iniţială se determină prin condiţiile iniţiale date:

pentru $t = 0$, $k = 0$, deci: $2{,}5\cos\alpha = 0$; $\cos\alpha = 0$, $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$.

Ecuaţia mişcării este deci:

$$x = 2{,}5 \cos\left(50\,\pi\,t \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = 2{,}5 \sin(-50\,\pi\,t) = -2{,}5 \sin 50\,\pi\,t$$

$$x = 2{,}5 \sin\left(\frac{\pi}{2} - 50\,\pi\,t + \frac{\pi}{2}\right) = 2{,}5 \sin 50\,\pi\,t.$$

79. Problema are două necunoscute, α şi β, între care există relaţia: $\alpha + \beta = \varphi$.
A doua ecuaţie se obţine scriind că suma momentelor forţelor în raport cu un punct fix, de exemplu punctul O, este nulă.

$$\begin{cases} \overline{MP_A} = -P_A \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \sin\alpha \\ \overline{MP_B} = P_B \cdot \dfrac{b}{2} \cdot \sin\beta, \end{cases}$$

căci forţele $\vec{P}_A$ şi $\vec{P}_B$ acţionează în centrele de greutate ale barelor (adică în mijloacele lor) şi sînt verticale. Barele OA şi OB fiind omogene, greutăţile sînt proporţionale cu a şi b, deci:

$$-a\frac{a}{2}\sin\alpha + b\frac{b}{2}\sin\beta = 0$$

$$a^2 \sin\alpha - b^2 \sin\beta = 0.$$

Necunoscutele α şi β se pot afla deci ca soluţii ale sistemului de ecuaţii trigonometrice.
Substituind $\beta = \varphi - \alpha$ în a doua ecuaţie, obţinem:

$$a^2 \sin\alpha - b^2 \sin(\varphi - \alpha) = 0,$$

care conduce la ecuaţia trigonometrică simplă:

$$(a^2 + b^2 \cos\varphi)\sin\alpha - b^2 \sin\varphi \cos\alpha = 0, \text{ adică:}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b^2 \sin\varphi}{a^2 + b^2\cos\varphi}.$$

80. Din figura 24.39 se vede că distanţa articulaţiei A de arcul de cerc descris de articulaţia B, ia valoarea minimă cînd unghiul $\widehat{AM_1M_2}$ dintre braţele $\overline{M_1A}$ şi $\overline{M_1M_2}$, este 0° sau 360°. Distanţa ia valoarea maximă în poziţia unghiulară de 180°. Deci, dacă relaţiile dintre valorile $\overline{M_1A}$, $\overline{AB}$, $\overline{M_2B}$ şi $\overline{M_1M_2}$ se aleg astfel încît unghiul $\widehat{AM_1M_2}$ să ia valorile 0° şi 150°, atunci valorile corespunzătoare satisfac poziţiile unghiulare intermediare de la 0° la 360°.

În consecință, sînt suficiente condițiile care permit rotirea liberă a elementului $\overline{M_1A}$ în jurul articulației M_1 (elementul $\overline{M_1A}$ devenind manivelă). Fie $\overline{M_1A} = a$; $\overline{AB} = b$; $\overline{M_2B} = c$ și $\overline{M_1M_2} = d$.

Din figură se vede că unghiul $\widehat{AM_1M_2} = 0°$ (sau $360°$) cînd: $|b - c| \leqslant d - a$ (1), iar unghiul $\widehat{AM_1M_2} = 180°$ cînd: $d + a \leqslant b + c$. (2)

În consecință, $\overline{M_1A}$ poate deveni manivelă dacă se îndeplinește sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} d - a \geqslant |b - c| \\ d + a \leqslant b + c, \end{cases} \quad (3)$$

unde valorile a, b, c și d, din considerațiuni de ordin fizic, trebuie să fie pozitive.

Exemplu numeric:

Fie: $\overline{AB} = b = 6$ cm; $\overline{M_2B} = c = 4$ cm și $\overline{M_1M_2} = d = 5$ cm.

Domeniul admisibil pentru elementul $\overline{M_1A}$ trebuie ales în așa fel ca $\overline{M_1A}$ să se poată roti liber în jurul punctului M_1, adică $\overline{M_1A}$ să devină manivelă. Din sistemul (3) rezultă:

$$\begin{cases} 5 \text{ cm} - a \geqslant 6 \text{ cm} - 4 \text{ cm} \\ 5 \text{ cm} + a \leqslant 6 \text{ cm} + 4 \text{ cm} \end{cases}$$

de unde se obține:

$$0 \text{ cm} < a \leqslant 3 \text{ cm}:$$

81. Fie punctul M de intersecție al diagonalelor pătratului $ABCD$, MF perpendiculara dusă pe acest punct și K mijlocul laturii BC. Unim F cu K și notăm unghiul $\widehat{FKM}$ cu x și segmentul $\overline{MF}$ cu y (vezi fig. 24.40).

Conform legilor opticii, iluminarea (în lucși) în punctul K pentru o sursă de lumină de intensitate I (în candele) care se află în punctul F, se obține din formula:

$$E = \frac{I}{FK^2}\cos(90° - x) = \frac{I}{\left(\dfrac{a}{2\cos x}\right)^2}\sin x,$$

sau:

$$E = \frac{4I}{a^2}\sin x\cos^2 x.$$

$$E = \frac{4I}{a^2}\sin x(1 - \sin^2 x). \quad (1)$$

Funcţia $\sin x(1-\sin^2 x)$ este numai pozitivă deoarece, conform datelor problemei, sînt admise numai valorile din intervalul $0^\circ < x < 90^\circ$.

Funcţia $\sin^2 x(1-\sin^2 x)^2$ se poate reduce la următoarea formă:

$$\frac{1}{2}[2\sin^2 x(1-\sin^2 x)(1-\sin^2 x)];$$

însă $2\sin^2 x+(1-\sin^2 x)+(1-\sin^2 x) = 2$ este o constantă.

Produsul $2\sin^2 x(1-\sin^2 x)(1-\sin^2 x)$ va avea deci o valoare maximă atunci cînd:

$$2\sin^2 x = 1-\sin^2 x,$$

adică rezultă $\sin x = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Iluminarea E atinge valoarea maximă în punctul K atunci cînd $x = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{3}}$.

În triunghiul dreptunghic MFK rezultă că acestei valori a unghiului îi corespunde o lungime a catetei:

$$\overline{MF} = \overline{MK}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Rezultă că un bec care trebuie să lumineze optim o suprafaţă pătrată cu lungimea laturii a(m) trebuie amplasat deasupra centrului acesteia la o înălţime de $\frac{a}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}36\,a$.

82. La înălţimea h_2, se duce o dreaptă orizontală $\overline{CC_1}$ (vezi fig. 24.41), iar prin punctele A şi B se trasează un cerc tangent la dreapta CC_1. Fie O punctul de contact al cercului cu dreapta. Din acest punct se va privi tabloul sub unghiul maxim. Atunci OC este distanţa căutată.

Fie D punctul de intersecţie la prelungirii dreptei AB cu dreapta CC_1. Din teorema secantei şi a tangentei, rezultă:

$$OD = \sqrt{AD\cdot BD}$$

şi

$$CO = \sqrt{AD\,(BD-CD)}$$

Avem:

$$AD = AB + BD = a + \frac{BC}{\cos\alpha} = a + \frac{h_1-h_2}{\cos\alpha}$$

şi

$$CD = BC\operatorname{tg}\alpha = (h_1-h_2)\operatorname{tg}\alpha.$$

Astfel se obţine:

$$CO = \sqrt{\left(a + \frac{h_1 - h_2}{\cos\alpha}\right) \frac{h_1 - h_2}{\cos\alpha}} - (h_1 - h_2)\ \mathrm{tg}\,\alpha$$

iar după simplificare

$$CO = \frac{1}{\cos\alpha} \sqrt{(a\cos\alpha + (h_1 - h_2))\,(h_1 - h_2)} - (h_1 - h_2)\sin\alpha.$$

95. Grosimea maximă a aşchiei în cazul frezării cu o freză cilindrică este dată de relaţia cunoscută din teoria aşchierii:

$a_{max} = 2\, S_d \sqrt{\frac{t}{D} - \frac{t^2}{D^2}}$ (mm), (1) în care S_d este avansul pe dinte $\left(\text{în } \frac{\text{mm}}{\text{dinte}}\right)$, F — diametrul frezei (în mm), iar t — adîncimea de aşchiere (în mm).

Prin transformarea relaţiei (1) în urma ridicării la pătrat, se obţine o ecuaţie de gradul 2:

$$4\frac{S_d^2}{D^2} \cdot t^2 - 4\frac{S_d^2}{D} \cdot t + a_{max}^2 = 0, \qquad (2)$$

adică forma clasică: $ax^2 + bx + c = 0$, în care $x = t$ este necunoscuta.

De asemenea, se cunoaşte:

$$D_s = \sqrt{d^2 + 4d\,h}\ \text{(mm)}, \qquad (3)$$

în care d = diametrul corpului cilindric (mm), iar h = înălţimea cilindrului obţinut (mm).

În practică problema se poate pune şi invers, adică se verifică dacă corpul cilindric cu înălţimea h ce se obţine din semifabricatul cu diametrul D_s, va avea diametrul necesar d. Relaţia (3) se ridică la pătrat şi se obţine ecuaţia de gradul doi:

$$d^2 + 4\,hd - D_s^2 = 0 \qquad (4)$$

adică tot forma clasică $ax^2 + bc + c = 0$ în care $x = d$.

96. Fie x distanţa DC în km (vezi fig. 24.49). Vom avea $BD = d - x$ şi $DA = \sqrt{x^2 + h^2}$. În felul acesta durata mişcării y (mh) pentru distanţa totală $BD + DA$ se poate exprima prin ecuaţia:

$$y = \frac{d - x}{v} + \sqrt{\frac{x^2 + h^2}{v_1}}. \qquad (1)$$

Vom căuta valoarea lui x căreia în cazul v şi v_1 dat îi corespunde valoarea minimă y. Rezolvînd ecuaţia (1) în raport cu x, obţinem :

$$x = \frac{v_1^2 (vy - d) \pm v\sqrt{v_1^2 (vy - d)^2 - h^2 (v^2 - v_1^2)}}{v^2 - v_1^2}. \qquad (2)$$

Cum din datele problemei pentru x avem numai valori reale, se poate observa din ecuaţia (2) că y poate lua numai valori care satisfac inecuaţia :

$$v_1^2 (vy - d)^2 - h^2 (v^2 - v_1^2) \geqslant 0. \qquad (3)$$

Ca soluţie a acestei inegalităţi, se obţine :

$$\frac{h\sqrt{v^2 - v_1^2} + d\,v_1^2}{vv_1} \leqslant y. \qquad (4)$$

În acest caz $0 < \sqrt{v^2 - v_1^2}$, deoarece conform datelor problemei $v_1 < v$, rezultă deci că şi y este un număr real. Cum în problemă h, v, v_1 şi d sînt date, din inecuaţia (4) se poate vedea că valoarea minimă y se exprimă prin următoarea ecuaţie :

$$y_{\min} = \frac{h\sqrt{v^2 - v_1}\, dv_1}{vv_1}. \qquad (5)$$

Dacă vom introduce pe (5) în (2), atunci se vede că y ia valoarea minimă pentru :

$$x = \frac{v_1 h}{v^2 - v_1^2}. \qquad (6)$$

Pentru ca transportul pe traseul (BD+DA) sau $(AD+BD)$ să se poată efectua într-un timp minim, punctul D de pe segmentul BC trebuie ales la o distanţă $DC = \frac{v_1 h}{\sqrt{v^2 - v_1^2}}$ de punctul C.

Dacă avem : $d \leqslant \frac{v_1 h}{\sqrt{v^2 - v_1^2}}$ şi dacă staţia B se află deci în punctul D şi C linia în derivaţie se va trasa din punctul D. Dacă $BC < DC$, atunci şi $AB < AD$ şi, deci :

$$\frac{AB}{v_1} < \frac{AD}{v_1} < \frac{BD}{v} + \frac{AD}{v_1}.$$

Exemplu numeric :
Fie $d = 100$ km, $h = 40$ km ; $v = 50$ km/h şi $v_1 = 30$ km/h.

Din inecuaţia (3) rezultă

$$x = DC = \frac{30 \cdot 40}{\sqrt{50^2 - 30^2}} \text{ km} = 30 \text{ km}.$$

Cum în acest caz $x < d$ (adică 30 km < 100 km) linia în derivaţie trebuie construită din punctul D.

97. Fie AB un ecran dispus vertical, D punctul de privire al ochiului spectatorului, $\overline{DM}$ distanţa de la ochiul spectatorului la ecran, $\overline{AM}$ distanţa de la marginea inferioară a ecranului şi ochi. În enunţul problemei $AB = l$ şi $DM = a$, sînt date. Segmentul AM şi unghiul de vedere ADB sînt necunoscute. Tot necunoscut este şi unghiul ADM. Să notăm cu x unghiul ADB cu y unghiul ADM şi cu z distanţa AM. Din $\Delta\, BMD$ rezultă :

$$z + l = a\text{tg}\,(x+y)$$

$$z + l = a\,\frac{\text{tg}x + \text{tg}y}{1 - \text{tg}x \cdot \text{tg}y} \qquad (1)$$

Din $\Delta\, ADM$ rezultă :

$$\text{tg}\ y = \frac{z}{a} \qquad (2)$$

Din ecuaţiile (1) şi (2) decurge :

$$z + 1 = \frac{a^2\,\text{tg}x + az}{a - z\text{tg}\,x}$$

iar de aici $\text{tg}\ x = \dfrac{al}{z^2 + lz + a^2}$, (3)

conform teoremei valorilor extreme ale funcţiilor de gradul 2, termenul pătrat $z^2 + lz + a^2$ în cazul valorilor date iniţial pentru l şi a, ia valoarea minimă cînd $z = -\dfrac{l}{2}$.

Deci marginea inferioară a ecranului trebuie să fie cu $\dfrac{l}{2}$ mai jos decît punctul de privire al ochiului, l fiind distanţa dintre marginea inferioară şi cea superioară a ecranului. În acest caz, triunghiul

ADB devine isoscel, iar DM este înălţimea la bază şi, totodată, bisectoarea unghiului din vîrf.

Deoarece $DM = a$ şi $AM = \frac{l}{2}$, rezultă :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)_{max} = \frac{l}{2} : a = \frac{l}{2a} \quad (4)$$

şi $x_{max} = 2 \operatorname{arctg} \frac{l}{2a}$.

Fie : $l = 3$ m ; $a = 10$ m. Din ecuaţia (4) rezultă atunci :

$x = 2 \operatorname{arctg} \frac{3}{20} = 2 \operatorname{arctg} 0{,}15 \approx 2 \cdot 8°30' \approx 16°.$

98. Cum punctele D, C şi E se află într-un plan, iar cele două triunghiuri DCQ şi ECL sînt egale, volumul mercurului din tub trebuie să rămînă de asemenea egal.

De aici se poate conchide că în cazul presiunii egale din cele două baloane (fig. 24.50) şi coloanele de mercur CA şi CB au aceeaşi lungime iar triunghiul ABC este isoscel.

Fie deci un triunghi isoscel AOB şi un triunghi oarecare DOC în care avem :

$$AO = OB = \frac{s}{2} \text{ şi } OD + OC = AO + OB = s$$

unde s este suma laturilor triunghiurilor care formează unghiul comun, demonstrînd că este valabilă $AB < CD$.

Demonstraţia geometrică este :

Din punctul B se duce segmentul $BE = AD$ şi paralel cu AD.

Punctele A, B, E şi D formează un paralelogram $ABED$, din care se vede că avem :

$$DE \parallel AB \text{ şi } DE = AB \quad (1), (2)$$

Deoarece $BE = AD$ şi $AD = BC$, ultima reieşind din :
$AO + BO = OA + OC + CB = AD + AO + OC = DO + OC,$
rezultînd : $BE = BC$. (3)

Deoarece $\measuredangle ABE = \measuredangle OAB$ şi $\measuredangle OAB = \measuredangle OBA$, rezultă relaţia

$$\measuredangle ABE = \measuredangle OBA. \quad (4)$$

Din ecuațiile (3) și (4) se poate deduce că $AB \perp CE$ și, deci, $DE \perp CE$ vom avea atunci :

$$DE < CD \tag{5}$$

Din formulele (1) și (4) rezultă : $AB < CD$,
Demonstrația trigonometrică :
(1) Din $\Delta\, DOC$, rezultă :

$$\frac{CD}{OC+OD} = \frac{2R \sin \widehat{DOC}}{2R \sin \widehat{ODC} + 2R \sin \widehat{OCD}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{\widehat{DOC}}{2} \cos \frac{\widehat{DOC}}{2}}{\sin \frac{\widehat{ODC}+\widehat{OCD}}{2} \cdot \cos \frac{\widehat{ODC}-\widehat{COD}}{2}}$$

$$\frac{CD}{OC+OD} = \frac{\sin \frac{\widehat{DOC}}{2}}{\cos \frac{\widehat{ODC}-\widehat{OCD}}{2}}$$

Dacă ținem seama că $OC+OD=s$, rezultă :

$$CD = \frac{s \sin \frac{\widehat{DOC}}{2}}{\cos \frac{\widehat{ODC}-\widehat{OCD}}{2}}$$

conform condițiilor problemei $\sphericalangle DOC$ și s rămîn neschimbate. De aceea, din ecuația (1) se poate spune că CD ia valoarea minimă atunci cînd :

$$\sphericalangle ODC = \sphericalangle OCD, \text{ adică dacă } OC = OD = \frac{s}{2}. \tag{2}$$

Folosind teorema consinusului, din ΔDOC reiese:

$$(1)\quad CD^2 = OD^2 + OC^2 - 2OD \cdot OC \cos \widehat{DOC}$$

Deoarece $OD = OA + AD = \frac{s}{2} + x$ şi $OC = OB - BC = \frac{D}{2} - x$, relaţia (1) se poate transforma astfel:

$$(2)\quad CD^2 = \left(\frac{s}{2} + x\right)^2 \left(\frac{s}{2} - x\right)^2 - 2\left(\frac{s^2}{4} - x^2\right)\cos \widehat{DOC}$$

După simplificare se obţine:

$$(3)\quad CD = \sqrt{2(1 - \cos \widehat{DOC})\, x^2 + \frac{s^2}{2}(1 + \cos \widehat{DOC})}$$

cum $\widehat{DOC}$ şi suma s rămîn neschimbate, din ecuaţia (3) rezultă că CD ia valoarea minimă atunci cînd $x = 0$, adică dacă:

$$OD = OC = \frac{s}{2}.$$

99. Se poate vedea că sînt posibile următoarele şase rute:

1) $S_1 = OA + b + a + BO$
2) $S_2 = OA + c + a + CO$
3) $S_3 = OC + b + c + BO$
4) $S_4 = OB + a + b + OA$
5) $S_5 = OC + a + c + AO$
6) $S_6 = OB + c + b + CO$

cum $S_1 = S_4$, $S_2 = S_5$ şi $S_3 = S_6$, problema dată conduce la compararea laturilor triunghiului.

Soluţie trigonometrică. Din O se duce normala pe cele trei laturi ale triunghiului ABC, rezultînd punctele K, L, M şi avem $OK \perp BC$; $OL \perp AC$ şi $OM \perp AB$, precum şi $OK = OL$, $OM = r$, unde r este raza cercului înscris. Mai departe avem

$$\widehat{OAL} = \frac{\alpha}{2}, \quad \widehat{OCK} = \frac{\gamma}{2} \text{ şi } \widehat{OBA} = \frac{\beta}{2}$$

Vom obţine :

$$OA = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \tag{1}$$

$$OB = \frac{r}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

$$OC = \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

$$a = BK + KC = r\left(\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}\right)$$

$$b = CL + LA = r\left(\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right) \tag{2}$$

$$c = AM + MB = r\left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}\right)$$

Mai departe, vom obţine :

$$S_1 = r\left(\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + 2 \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}}\right)$$

$$S_2 = r\left(\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}}\right) \tag{3}$$

$$S_3 = r\left(\frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} + 2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}}\right)$$

Vom forma diferenţele $S_1 - S_2$ şi $S_3 - S_1$:

$$S_1 - S_2 = r\left(\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} - \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\right) =$$

$$= r\left[\left(\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} - \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right) - \left(\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} - \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)\right] =$$

$$= r\left(\frac{1-\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} - \frac{1-\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\right)$$

$$S_1 - S_2 = r\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{4} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}\right) < 0.$$

Deoarece din datele problemei se vede că inegalitatea este adevărată rezultă $S_1 < S_2$ (4)

În mod analog se obţine:

$$S_3 - S_1 = r\left(\frac{1-\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} - \frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$S_3 - S_1 = r\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right) < 0,$$

de unde, din datele problemei $\gamma < \alpha$, rezultă

$$S_3 < S_1 \qquad (5)$$

Din inecuaţiile (4) şi (5) se poate conchide imediat că cea mai scurtă din rute este dată de S_3 şi, respectiv, S_6, deoarece $S_3 = S_6$.

100. Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiurile CDE şi $C_1D_1E_1$ (vezi fig. 24.51), vom obţine :

$$\frac{v}{\sin y} = \frac{x}{\sin\alpha} \qquad (1)$$

$$\frac{z}{\sin(\alpha + y)} = \frac{v}{\sin y} \qquad (2)$$

$$\frac{z'}{\sin(\alpha - y)} = \frac{v}{\sin y} \qquad (3)$$

unde z este viteza vaporului în raport cu malul în timpul mişcării de la A la B, dar z' este viteza în raport cu malul în timpul mişcării de la B la A. Componenta vitezei, datorită curentului se va considera V în CN pe care se bazează puterea motorului va fi notată cu n (în m/s), cu y vom nota unghiul pe care-l formează componenta x cu rezultanta z.
Din ecuaţiile (1) şi (3) vom obţine :

$$x = \frac{v \sin\alpha}{\sin y} \qquad (4)$$

$$z = v(\sin\alpha \operatorname{ctg} y + \cos\alpha) \qquad (5)$$

$$z' = v(\sin\alpha \operatorname{ctg} y - \cos\alpha). \qquad (6)$$

Aceste ecuaţii dau următorul sistem de inecuaţii ($S = AB$)

$$\begin{cases} \dfrac{s}{v\,(\sin\alpha \operatorname{ctg} y + \cos\alpha)} \geqslant t \\[2ex] \dfrac{s}{v(\sin\alpha \operatorname{ctg} y - \cos\alpha)} \leqslant t_1 \end{cases} \qquad (7)$$

Soluţia acestui sistem este :

$$\operatorname{arctg} \frac{vt \sin\alpha}{s - vt\cos\alpha} \leqslant y \leqslant \operatorname{arctg} \frac{vt_1 \sin\alpha}{s + vt_1 \cos\alpha} \qquad (8)$$

$$\text{şi } \frac{1}{t_1}\sqrt{s^2 + v^2 t_1^2 + 2\, s\, vt_1 \cos\alpha} \leqslant x \leqslant \frac{1}{t}\sqrt{s^2 + v^2t^2 - 2\, vt\cos\alpha}$$

Exemplu numeric.

Fie $s = 1\,200$ m

$v = 1{,}9$ m/s

$\alpha = 60°$

$t = 120$ s.

$t_1 = 180$ s.

În inecuațiile (8) și (9) rezultă:

$$\operatorname{arctg} 0{,}18 \leqslant y \leqslant \operatorname{arctg} 0{,}23$$

$$\frac{1395}{180} \leqslant x \leqslant \frac{1104}{120}$$

adică: $10° \leqslant y \leqslant 12°$ și $7{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \leqslant x \leqslant 9{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

101. Ca strungul universal cu 3 bacuri (vezi fig. 24.52) se deplasează bacurile (1) simultan în care suprafețele care strîng presa pentru prelucrare se găsesc la distanțe egale față de axa de rotație a axului (pct. c). Aceasta simplifică și accelerează simțitor prinderea pieselor cu suprafețele exterioare cilindrice la care toate axele geometrice ale pieselor trebuie să coincidă. La prelucrarea de piese excentrice axa geometrică a piesei cilindrice prinse în universalul cu 3 bacuri raportat la axa de rotație trebuie să fie deplasată cu excentricitatea e. Pentru aceasta trebuie pus sub unul din bacuri o șaibă măsurată.
Din $\Delta\, OCA$ se va stabili:

$$OA^2 = AC^2 + OC^2 - 2\, OC \cdot KC \qquad (1)$$

În ΔAKC: $\widehat{KCA} = \frac{\alpha}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$ și $KC = \frac{AC}{2}$

Luăm în considerație că:

$OA = \frac{D}{2} \cdot DC = e$; $AC = \frac{D}{2} + x - e$ și înlocuind în (1) obținem:

$$\frac{D^2}{4} = \left(\frac{D}{2} - e + x\right)^2 + e^2 - \left(\frac{D}{2} - e + x\right)e,$$

$$\text{sau}: y^2 - ey - \left(\frac{D^2}{4} - e^2\right) = 0, \qquad (2)$$

unde $y = \frac{D}{2} - e + x$.

Rezolvînd ecuaţia de gradul 2, obţinem:

$$y_{1,2} = \frac{e}{2} \pm \sqrt{\frac{e^2}{4} + \left(\frac{D^2}{4} - e^2\right)} = \frac{e}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - 3e^2}$$

înlocuind valoarea lui y în (2) găsim ecuaţia care dă grosimea plăcii

$$x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{D^2 - 3e^2} - (D - 3e)}{2}$$

sau: $x_{1,2} = \frac{D}{2}[\pm\sqrt{1 - 3\varepsilon^2} - (1 - 3\varepsilon)]$

unde excentricitatea numerică este: $\varepsilon = \frac{e}{D}$.

În Δ COA luăm excentricitatea teoretică maximă $e_{max} = \frac{D}{2\sqrt{3}}$.

Excentricitatea numerică corespunzătoare este următoarea:

$$\varepsilon_{min} = \frac{e_m}{D} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0,288.$$

În cazul nostru excentricitatea numerică este:

$$\varepsilon = \frac{10}{100} = 0,1,$$

iar grosimea plăcii $x = \frac{100 \text{ mm}}{2}\left[\sqrt{1 - 3\cdot 0,1^2} - (1\cdot 3\cdot 0,1)\right]$ sau

$x = 71,2$ mm.

102. Cantitatea Q kg de grîu netreierată conţine $\frac{Qk}{100}$ kg impurităţi şi $Q\,\frac{(100-k)}{100}$ kg boabe de cereale. La treierat rămîne întreaga cantitate de grîu neschimbată. Se schimbă însă partea impurităţilor — care se micşorează.

După primul treierat cantitatea de amestecuri se micşorează la $\frac{Qk}{100}\cdot\frac{q}{100}$ kg, formînd deci numai $\left(\frac{Qk}{100}-\frac{Qk}{100}\cdot\frac{q}{100}\right)$kg. Convertind, rezultă cantitatea de $\frac{Qk}{100}\cdot\frac{100-q}{100}$ kg. Cel de-al doilea treierat reduce cantitatea impurităţilor la $\frac{100-q}{100}$ din cantitatea rămasă după primul treierat. De aici, rezultă $\frac{Qk}{100}\left(\frac{100-q}{100}\right)^2$ kg.

Prin raţionamente analoage, se ajunge la concluzia că după cel de al n-lea treierat masa amestecurilor s-a redus la $\frac{Qk}{100}\cdot\left(\frac{100-q}{100}\right)^n$ kg. Atunci întreaga cantitate rămasă după al n-lea treierat este:

$$\left[\frac{Qk}{100}\cdot\left(\frac{100-q}{100}\right)^n+\frac{Q\,(100-k)}{100}\right]\text{kg.}$$

De aici, ţinînd seama de condiţiile din problemă, se poate formula următoarea inecuaţie:

$$\frac{\frac{Qk}{100}\cdot\left(\frac{100-q}{100}\right)^n}{\frac{Qk}{100}\cdot\left(\frac{100-q}{100}\right)^n+\frac{(100-k)}{100}}\leqslant\frac{f}{100}.$$

Această inecuaţie se poate simplifica astfel:

$$\left(\frac{100-2}{100}\right)^n\leqslant\frac{f(100\cdot k)}{k(100-f)}.$$

Din (2) se obţine prin logaritmare

$$n \lg \frac{100 - q}{100} \leqslant \lg \frac{f(100 - k)}{f(100 - f)} .$$

Dacă ţinem seama în acest caz că $\frac{100-q}{100} < 1$; deci $\lg \frac{100-q}{100} < 0$, atunci prin împărţirea inecuaţiei (3) la valoarea negativă $\log \frac{100-q}{100}$, se obţine inecuaţia (4) prezentată mai jos, la care s-a inversat semnul inegalităţii :

$$\frac{\lg \dfrac{f(100 - k)}{k(100 - f)}}{\lg \dfrac{100 - q}{100}} \leqslant n.$$

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

1. ARAMĂ, L., MORUZAN, T., *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral*, Edit. tehnică, București, 1967.
2. ARY, QUINTELLA, *Matemática*, Companhia Editora Nacional, São Paulo, 1966.
3. ATANASIAN, S., *Gheometria*, vol. I, Moskva, 1973.
4. BANEA, H., *Probleme de matematică*. Edit. didactică și pedagogică, București, 1977.
5. BARTOLI, C., *Mathématiques modernes — Complements*, Ed. Roudil, Paris, 1971.
6. CĂLUGĂRIȚA, G., ȘTEFĂNESCU, V. *Culegere de probleme de matematică*, Universitatea Populară, București, 1972.
7. CIUCU, G., CRAIU, V., SĂCUIU, I., *Probleme de teoria probabilităților*, Edit. tehnică, București, 1974.
8. COLIN, H., MATHIEU, J., *Mathématiques modernes*, Editions Roudil, Paris, 1971.
9. CORDUNEANU, A., RADU, G., POP, I., GRĂMADĂ, V., *Culegere de probleme de matematică*, Edit. Junimea, Iași, 1972.
10. CORNE CHRISTIAN, NATHAN FERNAND, *Eléments d'algebre au baccalaureat*, 1971.
11. CRAIU, M., ROȘCULEȚ, M., *Culegere de probleme de analiză matematică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1976.
12. DEMIDOVITCH, B., *Recueil d'exercices et des problemes d'analyse mathématique*, Edit. Mir, Moskva, 1972.
13. DOROFEEV, G., POTAPOV, N., ROZOV, N., *Elementary mathematics*, Edit. Mir, Moskva, 1973.
14. DRAGOMIR, P., DRAGOMIR, A., *Structuri algebrice*, Edit. Facla, Timișoara, 1975.
15. ENESCU, GHOERGHE, *Introducere în logica matematică*, Edit. științifică, București, 1965.
16. FREUDENTHAL, H., *Limbajul logicii matematice*, Edit. tehnică, București, 1973.
17. GEORGESCU-BUZĂU, MATEI E., *Exerciții de teoria mulțimilor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1969.
18. GUIAȘU, S., MALIȚA, M., *Triade*, Edit. științifică, București, 1973.

19. IAGLOM, I. M., IAGLOM, A. M., *Probleme neelementare tratate elementar*, Edit. tehnică, București, 1962.
20. ION, I., RADU, N., *Algebra*, ed. a II-a, Edit. didactică și pedagogică, București, 1975.
21. KIPNIS, J. M., *Aufgabesammlung für ungleichungen*, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin, 1964.
22. KURATOWSKI, K., *Introducere în teoria mulțimilor și în topologie*, Edit. tehnică, București, 1969.
23. LAVROV, I. A., MAXIMOV, L. L., *Probleme de logică*, Centrul de multiplicare al Universității București, 1973.
24. MOISIL, G., *Elemente de logică matematică și teoria mulțimilor*, Edit. științifică, București, 1968.
25. ONICESCU, OCTAV, *Strategia jocurilor cu aplicații la programarea liniară*, Edit. Academiei R.S.R., București, 1975.
26. ORIOL, R., *Mathématiques de l'apprentissage*, tom I, Arithmétique, tom II, Geometrie, Paris, 1964, 1965.
27. QUEYSANNE, M., *Algebre M. P. et speciales*, Paris, 1970.
28. RAMIS, E., *Exercices d'algebre*, Edit. Masson et Cie., Paris, 1974.
29. REISCHER, C., SÂMBOAN, A., *Culegere și probleme de teoria probabilităților și statistică matematică*, Edit. didactică și pedagogică, 1972.
30 SERVAIS, W., C. CLEAX, M. BIEFNOT, *Matematique*, Editions Labor, Bruxelless.
31. SIMIONESCU, G., ȘTEFĂNESCU, V, *Aplicații ale calculului vectorial în geometrie și trigonometrie*, Edit. didactică și pedagogică, București 1975.
32. SCHKARIN, A., FEDJANOW, A., SANDLER, B., *Algebraische aufgaben aus der technik* — Volk und Wiessen Volkseigener Verlag, Berlin, 1964.
33. SPERANZA, F., *Relații și structuri*, Edit. științifică și enciclopedică, București, 1975.
34. ȘTEFĂNESCU, V., POPA, T., ENACHE, M., *Cu privire la introducerea unor elemente din teoria mulțimilor și logica matematică în școala generală* în *Matematica în școala generală — Culegere de articole metodice și științifice*, S. S. M. R. S. R., București, 1976.

Redactor: ION MOGA
Tehnoredactor: CONSTANTIN IORDACHI
Coll de tipar: 56 cd. 1782
Tirajnl: 35.000 Bun de tipar: 15. 02. 1979.



C. 1782. I. P. INFORMAŢIA
str. Brezoianu nr. 23—25,
Bucureşti

editura științifică și enciclopedică

lei 23